Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, А. Н. Карпов, К характеристикам Брюйнинга–Нагаты и Хашимото–Хаттори размерности $\dim$, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 353–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:47:52

К ХАРАКТЕРИСТИКАМ БРЮЙНИНГА–НАГАТЫ И ХАШИМОТО–ХАТТОРИ РАЗМЕРНОСТИ $\dim$

С. А. Богатый, А. Н. Карпов

В духе подхода Дж. Нагаты вводятся новые инварианты топологических пространств размерностного типа. Формулы, выражающие введенные инварианты через лебегову размерность, содержат формулы Брюйнинга–Нагаты и Хашимото–Хаттори.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Классическое понятие размерности в смысле покрытий $\dim$ является “глобально-точечным” понятием – для глобального объекта (покрытия) требуется существование глобального объекта с точечным условием (кратностью покрытия в точке).

Брюйнинг и Нагата ввели “глобально-глобальный” инвариант $\Delta_k(X)$ [1] топологического пространства X и вскрыли его связь с размерностью $\dim$. Именно, для натурального $k \in \mathbb{N}$ инвариант $\Delta_k(X)$ определяется как такое минимальное число $m \in \mathbb{N}$, что для всякого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X мощности k существует такое открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X , что $|\mathcal{V}| \leq m$ и $\mathcal{V}$ звездно вписано в $\mathcal{U}$. Они доказали, что

$$\Delta_k(X) = \begin{cases} 2^k - 1 & \text{при } k \leq n + 1, \\ \sum_{m=1}^{n+1} C_k^m & \text{при } k \geq n + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее под X понимается бесконечное нормальное пространство, n означает его размерность $\dim$ и k – натуральное число. С помощью этой формулы они предложили следующую характеристику размерности $\dim$ бесконечного пространства:

$$\dim X = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \Delta_k(X)}{\log k} - 1.$$

В [2] Нагата ввел другой “глобально-глобальный” инвариант $*_k(X)$ – такое минимальное число $m \in \mathbb{N}$, что для всякого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X мощности k существует такое открытое покрытие $\mathcal{V}$ пространства X , что $|\mathcal{V}| \leq m$ и $\mathcal{V}$ сильно звездно вписано в $\mathcal{U}$. Он доказал, что при $k \geq n + 1$ справедливо неравенство

$$\Delta_k(X) \leq *_k(X) \leq \sum_{m=1}^{n+1} (2^m - 1) C_k^m$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00706.

и поставил задачу нахождения для инварианта $*_k(X)$ формулы, аналогичной формуле (1).

Хашимото и Хаттори решили [3] задачу Нагаты и показали, что

$$*_k(X) = \begin{cases} k \cdot 2^{k-1} & \text{при } k \leq n+1, \\ \sum_{m=1}^{n+1} m C_k^m & \text{при } k \geq n+1. \end{cases}$$

Основная цель данной работы заключается в нахождении чисел $\Delta_k^l(X)$ (теорема А) и $*_k^l(X)$ (теорема Б) – аналогов чисел $\Delta_k(X)$ и $*_k(X)$ – при условии, что покрытие $\mathcal{V}$ (сильно) l -звездно вписано в покрытие $\mathcal{U}$.

2. Определения и формулировки основных теорем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для покрытия $\mathcal{V}$ пространства X и множества $A \subseteq X$ звездой $\text{St}_{\mathcal{V}} A$ множества A по покрытию $\mathcal{V}$ называется множество

$$\text{St}_{\mathcal{V}} A = \bigcup \{V \in \mathcal{V} : V \cap A \neq \emptyset\}.$$

Будем считать, что $\text{St}_{\mathcal{V}}^0 A = A$, $\text{St}_{\mathcal{V}}^1 A = \text{St}_{\mathcal{V}} A$ и далее $\text{St}_{\mathcal{V}}^l A = \text{St}_{\mathcal{V}}(\text{St}_{\mathcal{V}}^{l-1} A)$.

Покрытие $\mathcal{V}$ называется l -звездно вписанным в покрытие $\mathcal{U}$, если для всякой точки $x \in X$ множество $\text{St}_{\mathcal{V}}^l(x)$ содержится в некотором элементе U покрытия $\mathcal{U}$.

Покрытие $\mathcal{V}$ называется сильно l -звездно вписанным в покрытие $\mathcal{U}$, если для всякого элемента $V \in \mathcal{V}$ множество $\text{St}_{\mathcal{V}}^l(V)$ содержится в некотором элементе U покрытия $\mathcal{U}$.

Всякому конечному покрытию $\mathcal{U}$ пространства X и фиксированному натуральному числу l можно поставить в соответствие два числа $\Delta^l(\mathcal{U})$ ($*^l(\mathcal{U})$) – наименьшую мощность покрытия $\mathcal{V}$, которое l -звездно (сильно l -звездно) вписано в покрытие $\mathcal{U}$. Это позволяет по фиксированным натуральным числам l и k поставить в соответствие уже пространству X два числа

$$\begin{aligned} \Delta_k^l(X) &= \max \{ \Delta^l(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ – открытое покрытие } X \text{ и } |\mathcal{U}| = k \}, \\ *_k^l(X) &= \max \{ *^l(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ – открытое покрытие } X \text{ и } |\mathcal{U}| = k \}. \end{aligned}$$

Мы вычисляем числа $\Delta_k^l(X)$ и $*_k^l(X)$ и оказывается, что эти числа зависят не от всей топологии пространства X , а только от лебеговой размерности $n = \dim X$ этого пространства.

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_k^l(n) &= \begin{cases} (l+1)^k - l^k & \text{при } k \leq n+1, \\ \sum_{m=1}^{n+1} (l^m - (l-1)^m) C_k^m & \text{при } k \geq n+1, \end{cases} \\ *_k^l(n) &= \begin{cases} k \cdot (l+1)^{k-1} & \text{при } k \leq n+1, \\ \sum_{m=1}^{n+1} m l^{m-1} C_k^m & \text{при } k \geq n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Основными результатами работы являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА А. Для всякого бесконечного нормального пространства X справедливо равенство $\Delta_k^l(X) = \Delta_k^l(n)$, где $n = \dim X$.

ТЕОРЕМА Б. Для всякого бесконечного нормального пространства X справедливо равенство $*_k^l(X) = *_k^l(n)$, где $n = \dim X$.

3. Верхние оценки. Докажем сначала, что $\Delta_k^l(X) \leq \Delta_k^l(n)$, $*_k^l(X) \leq *_k^l(n)$.

Предварим доказательство общей конструкцией специального подразделения симплициального комплекса. Для симплициального комплекса K и произвольного натурального l построим два подразделения $K^{[l]}$ и $K^{\{l\}}$, вершины которых будут соответствовать элементам покрытия l -звездно и сильно l -звездно вписанного в заданное покрытие. Построение проведем индукцией по числу l . Первый шаг $K^{[1]}$ дается барицентрическим подразделением. Напомним его конструкцию.

Определим $K^{[1]}$ как симплициальный комплекс, вершинами которого являются центры (барицентры) симплексов из K , а симплексами — конечные непустые совокупности центров симплексов, принадлежащих линейно упорядоченной системе симплексов из K . Другими словами, симплексами комплекса $K^{[1]}$ являются такие конечные множества $\{b(s_0), \dots, b(s_q)\}$, что s_{i-1} является гранью симплекса s_i , $i = 1, \dots, q$.

Если через $m^q(K)$ обозначить число q -мерных симплексов комплекса K , то легко видеть, что $m^0(K^{[1]}) = m^0(K) + m^1(K) + \dots + m^n(K)$, где $n = \dim K$.

Ясно, что $K^{[1]}$ является симплициальным комплексом, причем если L — подкомплекс в K , то $L^{[1]}$ — подкомплекс в $K^{[1]}$. Это означает, в частности, что для того, чтобы описать барицентрическое подразделение комплекса K достаточно описать барицентрическое подразделение только для симплексов, но таким образом, чтобы подразделение q -мерного симплекса Δ^q соответствовало подразделению q -мерной грани $(q+1)$ -мерного симплекса Δ^{q+1} . Конструкцию барицентрического подразделения можно понимать и следующим образом. В каждый открытый симплекс помещается ровно одна новая вершина.

Рис. 1

Рис. 2

Чтобы получить подразделение $K^{\{1\}}$ в каждый открытый q -мерный симплекс помещается ровно один новый q -мерный симплекс (случай $q = 2$ изображен на рис. 1). При этом параллелепипед над симплексами положительной размерности в грани тоже надо разбивать на симплексы, но, так как конкретный вид такого разбиения для нас не имеет значения, будем считать, что эти параллелепипеды остаются неразбитыми на симплексы и понимаются как клетки.

Теперь чтобы получить подразделение $K^{[l]}$ (случай $q = 2, l = 2$ изображен на рис. 2) $(K^{\{l\}})$ необходимо в каждый открытый q -мерный симплекс комплекса K поместить комплекс $(\Delta^q)^{[l-1]}$ $((\Delta^q)^{\{l-1\}})$. Индукцией по l легко проверяется, что при этом подразделения грани симплекса и самого симплекса согласованы. Также легко увидеть, что

$$m^0(K^{[l]}) = m^0(K) + m^0((\Delta^1)^{[l-1]})m^1(K) + m^0((\Delta^2)^{[l-1]})m^2(K) + \dots \\ + m^0((\Delta^n)^{[l-1]})m^n(K)$$

и

$$m^0(K^{\{l\}}) = m^0(K) + m^0((\Delta^1)^{\{l-1\}})m^1(K) + m^0((\Delta^2)^{\{l-1\}})m^2(K) + \dots \\ + m^0((\Delta^n)^{\{l-1\}})m^n(K),$$

где $n = \dim K$.

Из этих равенств индукцией по числу l несложно проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливы равенства*

$$m^0((\Delta^n)^{[l]}) = (l+1)^{n+1} - l^n, \quad m^0((\Delta^n)^{\{l\}}) = (n+1)(l+1)^n, \\ m^0((\Delta_n^{k-1})^{[l]}) = \Delta_k^l(n), \quad m^0((\Delta_n^{k-1})^{\{l\}}) = *_k^l(n),$$

где Δ_n^N — это n -мерный остов N -мерного симплекса.

На симплициальном комплексе K рассмотрим стандартное покрытие $\mathcal{U}$ из открытых звезд вершин. Положим

$$\text{St } v = \bigcup \{ \sigma : v \text{ является вершиной симплекса } \sigma \}.$$

Пусть $\mathcal{U}_K = \{ \text{St } v : v \text{ — вершина комплекса } K \}$. Рутинная проверка дает доказательство следующих двух лемм.

ЛЕММА 1А. *Покрытие $\mathcal{U}_{K^{[l]}}$ l -звездно вписано в покрытие $\mathcal{U}$.*

ЛЕММА 1Б. *Покрытие $\mathcal{U}_{K^{\{l\}}}$ сильно l -звездно вписано в покрытие $\mathcal{U}$.*

ЛЕММА 2А. *Если X — нормальное пространство и $\dim X \leq n$, то для всякого покрытия $\mathcal{U}$ мощности k существует такое l -звездно вписанное покрытие $\mathcal{V}$, что $|\mathcal{V}| \leq \Delta_k^l(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Комбинаторно впишем в покрытие $\mathcal{U}$ покрытие $\mathcal{W}$ мощности k и кратности $n+1$. Пусть $p_{\mathcal{W}}: X \rightarrow N_{\mathcal{W}} \subset \Delta_n^{k-1} \subset \Delta^{k-1}$ — подчиненное покрытию $\mathcal{W}$ отображение в нерв $N_{\mathcal{W}}$. Согласно лемме 1А покрытие $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{N_{\mathcal{W}}^{[l]}}$ l -звездно вписано в покрытие $\mathcal{U}_{N_{\mathcal{W}}}$, а значит, и в покрытие $\mathcal{U}$. Из включения $N_{\mathcal{W}} \subset \Delta_n^{k-1}$ и предложения 1 вытекает нужная оценка.

ЛЕММА 2Б. *Если X — нормальное пространство и $\dim X \leq n$, то для всякого покрытия $\mathcal{U}$ мощности k существует такое сильно l -звездно вписанное покрытие $\mathcal{V}$, что $|\mathcal{V}| \leq *_k^l(n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится так же, как в лемме 2А, с заменой $\mathcal{U}_{N_{\mathcal{W}}^{[l]}}$ на $\mathcal{U}_{N_{\mathcal{W}}^{\{l\}}}$.

4. Нижние оценки.

ЛЕММА 3Б. Если X – бесконечное нормальное пространство, $\dim X = n$, то для всех натуральных k, l существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что $|\mathcal{U}| = k$ и для всякого открытого покрытия $\mathcal{V}$, сильно l -звездно вписанного в $\mathcal{U}$, справедливо неравенство $|\mathcal{V}| \geq *^l_k(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k \geq n+1$. Для случая $k \leq n+1$ рассуждения совершенно аналогичны. Для каждого $\alpha \in C_k^{n+1}$ зафиксируем замкнутое подмножество $C(\alpha) \subset X$ так, что $C(\alpha_1) \cap C(\alpha_2) = \emptyset$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и $\dim C(\alpha) = n$ при каждом $\alpha \in C_k^{n+1}$ (это можно сделать в силу [1, лемма 2]).

Зафиксируем для каждого $\alpha \in C_k^{n+1}$ покрытие $\{U_i^\alpha : i \in \alpha\}$ множества $C(\alpha)$ открытыми в $C(\alpha)$ множествами, которое нельзя ужать до покрытия с пустым пересечением (такое покрытие существует, так как $\dim C(\alpha) = n$). Положим для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$U_i = (X \setminus \bigcup \{C(\alpha) : \alpha \in C_k^{n+1}\}) \cup (\bigcup \{U_i^\alpha : \alpha \ni i\}).$$

Очевидно, $\mathcal{U} = \{U_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ – открытое покрытие пространства X . Пусть $\mathcal{V}$ – открытое покрытие X , сильно l -звездно вписанное в $\mathcal{U}$. Для каждого $m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и каждого $\beta \in C_k^m$ мы укажем подсемейство $\mathcal{V}^\beta \subset \mathcal{V}$ такое, что все элементы $\mathcal{V}^\beta$ попарно различны, $|\mathcal{V}^\beta| = ml^{m-1}$ и $\beta = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} : V \subset U_j\}$ для всякого $V \in \mathcal{V}^\beta$. Последнее условие будет означать, что $\mathcal{V}^{\beta_1} \cap \mathcal{V}^{\beta_2} = \emptyset$ при $\beta_1 \neq \beta_2$, а значит,

$$|\bigcup \{\mathcal{V}^\beta : \beta \in C_k^m, m \in \{1, 2, \dots, n+1\}\}| = \sum_{m=1}^{n+1} C_k^m ml^{m-1}.$$

Зафиксируем $m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и $\beta = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\} \in C_k^m$. Выберем произвольное $\gamma \subset \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $\beta \cap \gamma = \emptyset$, $\beta \cup \gamma \in C_k^{n+1}$. Обозначим $\alpha = \beta \cup \gamma$. Пусть

$$K = C(\alpha) \setminus \bigcup \{U_i : i \in \gamma\}.$$

Очевидно, K – непустое замкнутое подмножество $C(\alpha)$, и $K \subset \bigcup \{U_i : i \in \beta\}$.

Пусть

$$S = \{(s_1, s_2, \dots, s_m) : s_i \in \{0, 1, \dots, l\} \text{ при любом } i \in \{1, 2, \dots, m\}, |\{i : s_i = l\}| = 1\}.$$

Для каждого $s \in S$ мы укажем элемент $V^s \in \mathcal{V}$ такой, что $V^s \subset \bigcap \{U_i : i \in \beta\}$ и включение $V^s \subset U_j$ не выполняется ни при каких $j \notin \beta$. При этом $V^{s'} \neq V^{s''}$ при $s' \neq s''$. Поскольку $|A| = ml^{m-1}$, то тем самым лемма будет доказана.

Зафиксируем произвольное $s = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \in S$. Без ограничения общности будем считать, что $s_1 = l$. Положим для каждого $i \in \{2, 3, \dots, m\}$

$$\mathcal{V}^{\mu_i} = \{V \in \mathcal{V} : \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i+1}(V) \subset U_{\mu_i}, V \notin \mathcal{V}^j \text{ при } 2 \leq j < i\},$$

$W_{\mu_i} = \bigcup \mathcal{V}^{\mu_i}$. Пусть

$$\mathcal{W}^{\mu_1} = \mathcal{V} \setminus \bigcup \{\mathcal{V}^{\mu_i} : i = 2, 3, \dots, m\},$$

$W_{\mu_1} = \bigcup \mathcal{V}^{\mu_1}$. Поскольку $\bigcup \{\mathcal{V}^{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, m\} = \mathcal{V}$ и $\bigcup \mathcal{V} = X$, то $\{W_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, m\}$ – открытое покрытие X . В частности, $\bigcup \{W_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, m\} \supset K$. Кроме того, очевидно, что $W_{\mu_i} \subset U_{\mu_i}$ при $i = 2, 3, \dots, m$ и $W_{\mu_1} \cap K \subset U_{\mu_1}^\alpha$. Таким образом, покрытие $\{W_{\mu_i} \cap K : i = 1, 2, \dots, m\}$ является ужатием покрытия $\{U_j^\alpha : j \in \beta\}$ множества K . Очевидно, $\bigcap \{W_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, m\} \neq \emptyset$ (иначе можно было бы указать ужатие $\overline{\mathcal{U}^\alpha}$ покрытия $\mathcal{U}^\alpha = \{U_i^\alpha : i \in \alpha\}$ такое, что $\bigcap \overline{\mathcal{U}^\alpha} = \emptyset$, а это противоречит определению покрытия $\mathcal{U}^\alpha$).

Пусть $x \in \bigcap \{W_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, m\}$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ зафиксируем $V_{\mu_i} \in \mathcal{V}_{\mu_i}$ такое, что $x \in V_{\mu_i}$. По построению $\mathcal{V}_{\mu_i} \cap \mathcal{V}_{\mu_j} = \emptyset$ при $i \neq j$, поэтому $V_{\mu_i} \neq V_{\mu_j}$ при $i \neq j$.

Покажем, что для всякого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i}(V_{\mu_1}) \subset U_{\mu_i}, \quad (2)$$

$$\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i+1}(V_{\mu_1}) \not\subset U_{\mu_i} \quad \text{при } i \neq 1. \quad (3)$$

В самом деле, поскольку $x \in V_{\mu_1} \in \mathcal{V}$ и $\mathcal{V}$ сильно l -звездно вписано в $\mathcal{U}$, существует $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ такое, что $\text{St}_{\mathcal{V}}^l(V_{\mu_1}) \subset U_{\mu_j}$. По нашему построению

$$\{V \in \mathcal{V} : \text{St}_{\mathcal{V}}^l(V) \subset U_{\mu_j}, j \geq 2\} \subset \bigcup \{\mathcal{V}_{\mu_j} : j \geq 2\},$$

а $V_{\mu_1} \notin \mathcal{V}_{\mu_j}$ при $j \geq 2$, так что $\text{St}_{\mathcal{V}}^l(V_{\mu_1}) \subset U_{\mu_1}$. Таким образом, для $i = 1$ включение (2) доказано. Пусть теперь $i \geq 2$. Тогда, так как $V_{\mu_1} \cap V_{\mu_i} \neq \emptyset$ ($x \in V_{\mu_1} \cap V_{\mu_i}$), то $\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i}(V_{\mu_1}) \subset \text{St}_{\mathcal{V}}^{a_i+1}(V_{\mu_i}) \subset U_{\mu_i}$. В то же время, все $V \in \mathcal{V}$, для которых $\text{St}_{\mathcal{V}}^{a_i+1}(V) \subset U_{\mu_i}$, вошли в $\bigcup \{\mathcal{V}_{\mu_j} : 2 \leq j \leq i\}$, а так как $V_{\mu_1} \notin \mathcal{V}_{\mu_j}$ при $j \geq 2$, то доказано (3).

Положим $V^s = V_{\mu_1}$. Из (2) и (3) вытекает, что $V^{s'} \neq V^{s''}$ при $s' \neq s'' \in S$. Покажем теперь, что для всякого $s \in S$ справедливо равенство $\beta = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} : V^s \subset U_j\}$. Пусть $j = \mu_i \in \beta$. Тогда, так как $x \in V^s \cap V^{\mu_i}$, то $V^s \subset \text{St}_{\mathcal{V}}(V_{\mu_i}) \subset \text{St}_{\mathcal{V}}^{a_i+1}(V_{\mu_i}) \subset U_{\mu_i}$. Пусть $j \notin \beta$. Тогда, так как $x \in K$, $x \in V^s$ и $K \cap (\bigcup \{U_j : j \notin \beta\}) = \emptyset$, то $V^s \not\subset U_j$.

ЛЕММА 3А. Если X – бесконечное нормальное пространство, $\dim X = n$, то для всех натуральных k, l существует такое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что $|\mathcal{U}| = k$ и для всякого открытого покрытия $\mathcal{V}$, l -звездно вписанного в $\mathcal{U}$, справедливо неравенство $|\mathcal{V}| \geq \Delta_k^l(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множества $C(\alpha)$ и покрытие $\mathcal{U}$ определяются так же, как в доказательстве леммы 3Б. Пусть $\mathcal{V}$ – открытое покрытие пространства X , l -звездно вписанное в $\mathcal{U}$.

Для каждого $m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и каждого $\beta \subset \{1, 2, \dots, k\}$ такого, что $|\beta| = m$, укажем подсемейство $\mathcal{V}^\beta \subset \mathcal{V}$ такое, что $|\mathcal{V}^\beta| = l^m - (l-1)^m$, все элементы $\mathcal{V}^\beta$ попарно различны, и, кроме того, для каждого $V \in \mathcal{V}^\beta$ справедливо равенство

$$\beta = \{i \in \{1, 2, \dots, k\} : V \subset U_i\}$$

(это будет означать, что $\mathcal{V}^{\beta_1} \cap \mathcal{V}^{\beta_2} = \emptyset$ при $\beta_1 \neq \beta_2$).

Зафиксируем $m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и $\beta = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\} \in C_k^m$. Выберем произвольное множество $\gamma \subset \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $\beta \cap \gamma = \emptyset$, $\beta \cup \gamma \in C_k^{n+1}$. Положим $\alpha = \beta \cup \gamma$, $K = C(\alpha) \setminus \bigcup \{U_i : i \notin \beta\}$. Очевидно, K замкнуто в X , $K \neq \emptyset$, $K \subset \bigcup \{U_i : i \in \beta\}$.

Пусть

$$S = \{(s_1, s_2, \dots, s_m) : s_i \in \{0, 1, \dots, l-1\} \text{ при каждом } i \text{ и } \{i : s_i = l-1\} \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, $|S| = l^m - (l-1)^m$. Зафиксируем произвольную строку $s = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in S$. Без ограничения общности будем считать, что $s_m = l-1$. Для каждого $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ положим

$$F_j = \{x \in K : \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_j+1}(x) \subset U_{\mu_j}\}.$$

Положим

$$F_m = \{x \in K : \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_m+1}(x) \subset U_{\mu_m}\} \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} (\cup \{V \in \mathcal{V} : \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_j+1}(V) \subset U_{\mu_j}\}).$$

Очевидно, $F_i \subset K$, F_i замкнуто и $F_i \subset U_{\mu_i}$ при каждом $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\cup \{F_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} = K$. В самом деле, пусть x – произвольная точка множества K . Тогда, так как покрытие $\mathcal{V}$ l -звездно вписано в $\mathcal{U}$ и $x \notin U_j$ при $j \notin \beta$, найдется номер $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ такой, что $\text{St}_{\mathcal{V}}^l(x) \subset U_{\mu_i}$. Если $i \neq m$, то $x \in F_i$. Если $i = m$ и $x \notin F_j$ при $j < m$, то покажем, что $x \in F_m$. Пусть, от противного, это не так. Тогда найдется $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ и $V \in \mathcal{V}$ такие, что $x \in V$ и $\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_j+1}(V) \subset U_{\mu_j}$, а значит, $\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_j+1}(x) \subset \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_j+1}(V) \subset U_{\mu_j}$, т.е. $x \in F_j$. Противоречие.

Итак, $\cup \{F_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} = K$ и $F_i \subset U_{\mu_i}$ при каждом $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Если бы оказалось, что $\cap \{F_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} = \emptyset$, то в силу нормальности пространства X мы могли бы раздуть замкнутые множества F_i до открытых U'_{μ_i} так, что $F_i \subset U'_{\mu_i} \subset U_{\mu_i}$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $\cap \{U'_{\mu_i} : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} = \emptyset$. Таким образом, семейство $\mathcal{U}' = \{U_j : j \notin \beta\} \cup \{U'_j : j \in \beta\}$ было бы ужатию покрытия $\mathcal{U}$ и $\cap \mathcal{U}' = \emptyset$, что противоречит выбору покрытия $\mathcal{U}$.

Таким образом, $\cap \{F_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \neq \emptyset$. Выберем произвольную точку $x \in \cap \{F_i : i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$. Зафиксируем произвольный элемент V^s покрытия $\mathcal{V}$, содержащий точку x . Так как $x \in F_i$, то $\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i}(V^s) \subset \text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i+1}(x) \subset U_{\mu_i}$ при каждом $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Кроме того, если $s - i < l - 1$, то $\text{St}_{\mathcal{V}}^{s_i+1}(V^s) \not\subset U_{\mu_i}$ в силу того, что $x \in F_m$.

Таким образом, для каждого $s \in S$ мы указали элемент V^s покрытия $\mathcal{V}$, причем $V^{s_1} \neq V^{s_2}$ при $s_1 \neq s_2$. Положим $\mathcal{V}^\beta = \{V^s : s \in S\}$. Очевидно, $|\mathcal{V}^\beta| = |S| = l^m - (l-1)^m$. Покажем теперь, что $\mathcal{V}^{\beta_1} \cap \mathcal{V}^{\beta_2} = \emptyset$ при $\beta_1 \neq \beta_2$. Для этого заметим, что по построению всякий элемент $V \in \mathcal{V}^\beta$ содержится в каждом из элементов $\{U_j : j \in \beta\}$. Кроме того, если $j \notin \beta$, то $V \not\subset U_j$, так как $x \in V$ и $x \notin U_j$. Таким образом,

$$\beta = \{j \in \{1, 2, \dots, k\} : V \subset U_j\}$$

для всякого $V \in \mathcal{V}^\beta$.

Соединение лемм 2А и 3А дает доказательство теоремы А, а соединение лемм 2Б и 3Б – теоремы Б.

СЛЕДСТВИЕ. Для всякого бесконечного нормального пространства X и для любого натурального l справедливы равенства

$$\dim X = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log \Delta_k^l(X)}{\log k} - 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log *^l_k(X)}{\log k} - 1.$$

5. Правильно вписанные покрытия. Следующие два понятия являются естественными обобщениями правильной вписанности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть γ и μ – покрытия пространства X , l – натуральное число. Покрытие μ называется *l -правильно вписанным* в покрытие γ , если для всякого набора $V_1, V_2, \dots, V_l$ элементов покрытия μ таких, что $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ для $i = 1, 2, \dots, l-1$, найдется такой элемент U покрытия γ , что $\bigcup_{i=1}^l V_i \subset U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть γ и μ – покрытия пространства X , l – натуральное число. Покрытие μ называется *l -связно вписанным* в покрытие γ , если для всякого набора $V_1, V_2, \dots, V_l$ элементов покрытия μ со связным нервом найдется такой элемент U покрытия γ , что $\bigcup_{i=1}^l V_i \subset U$.

Очевидно, всякое l -связно вписанное покрытие является l -правильно вписанным, а при $l \leq 3$ эти два понятия совпадают.

В связи с теоремами А и Б возникает естественный

ВОПРОС. Пусть X – нормальное пространство, k, l – натуральные числа. Найти наименьшее натуральное число $\nabla_k^l(X)$ такое, что в любое открытое k -элементное покрытие пространства X можно l -правильно вписать открытое покрытие мощности $\nabla_k^l(X)$. Найти аналогичную числовую характеристику для l -связно вписанных покрытий.

Очевидно, всякое l -звездно вписанное покрытие является также и l -правильно вписанным. Более того, для l -правильной вписанности достаточно $\frac{l}{2}$ -звездной вписанности при четном l и сильной $\frac{l-1}{2}$ -звездной вписанности при нечетном l . Таким образом, имеется следующая тривиальная оценка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для всякого нормального пространства X справедливы неравенства $\nabla_k^{2m+1}(X) \leq *^m_k(X)$, $\nabla_k^{2m}(X) \leq \Delta_k^m(X)$.

При $l = 2$ имеет место и более точная оценка:

$$\nabla_k^2(X) \leq \begin{cases} 2^{k-1} + k - 1 & \text{при } k \leq n + 1, \\ k + \sum_{m=1}^{[(n+1)/2]} C_k^{2m} & \text{при } k \geq n + 1, \end{cases}$$

где $n = \dim X$. Для получения звездной вписанности делалось барицентрическое подразделение нерва исходного покрытия. Здесь же, для правильной вписанности, достаточно добавлять новые вершины не во все симплексы, а лишь в симплексы нечетной размерности.

Перейдем теперь к нижним оценкам. Очевидно, что если A – замкнутое подпространство в X , то $\nabla_k^l(A) \leq \nabla_k^l(X)$. Если $\dim A = 1$, то $\nabla_k^2(A) = \Delta_k(A)$, поскольку во всякое открытое покрытие одномерного пространства можно вписать покрытие кратности 2, а для таких покрытий 2-правильная вписанность совпадает со звездной вписанностью. Из этих простых наблюдений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если X – бесконечное нормальное пространство и $\dim X \geq 1$, то $\nabla_k^2(X) \geq \Delta_k(1)$.

При этом в случае двумерного пространства X из приведенных выше оценок следует, что $\nabla_k^2(2) = k(k+1)/2$ для любого k .

В трехмерном же случае уже для $k = 4$ верхняя и нижняя оценки различаются: $10 \leq \nabla_4^2(3) \leq 11$.

ТЕОРЕМА. *Имеем $\nabla_4^2(3) = 11$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если в покрытие из открытых звезд вершин трехмерного симплекса σ^3 2-правильно вписано покрытие $\mathcal{U}$, то в нем не менее 11 элементов.

Предположим, что в этом покрытии 10 элементов (если их меньше, то возьмем один из них несколько раз). Пусть вершины симплекса σ^3 занумерованы числами 0, 1, 2, 3. Из доказательства леммы 3А вытекает, что все эти элементы имеют общие точки с одномерным остовом симплекса σ^3 . Более того, согласно доказательству леммы 3А (в простейшем случае $l = 1$) для всякой вершины i симплекса σ^3 имеется элемент покрытия, который содержит эту вершину и не содержит других вершин. Выберем для каждого $i = 0, 1, 2, 3$ такой элемент и обозначим его U_i . Таким же образом, для каждого ребра (ij) симплекса σ^3 существует элемент U_{ij} покрытия $\mathcal{U}$, пересекающийся с этим ребром, но не содержащий вершин и не имеющий общих точек с другими ребрами симплекса σ^3 . Итак, мы указали 10 различных элементов, которые обязаны присутствовать в покрытии $\mathcal{U}$, а так как по нашему предположению покрытие $\mathcal{U}$ содержит всего 10 элементов, то $\mathcal{U} = \{U_i, U_{ij} : i, j = 0, 1, 2, 3; i < j\}$.

Положим теперь $V_0 = U_0 \cup U_{01} \cup U_{02} \cup U_{03}$, $V_1 = U_1 \cup U_{12}$, $V_2 = U_2 \cup U_{23}$, $V_3 = U_3 \cup U_{31}$. Построенное открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_i : i = 0, 1, 2, 3\}$ вписано в первоначальное покрытие из открытых звезд вершин. Следовательно, согласно известной теореме Шпернера кратность построенного покрытия равна 4, т.е. существует точка A , лежащая во всех элементах покрытия $\mathcal{V}$. Покажем, что $A \notin U_0$. В самом деле, если $A \in U_0$, то множество U_0 пересекается с множеством V_1 . Таким образом, мы найдем два пересекающихся элемента покрытия $\mathcal{U}$, один из которых содержит точки на ребре (12), поэтому это объединение не может содержать вершину 0. Аналогично можно показать, что точка A не лежит в множествах U_1, U_2, U_3 . Таким образом, мы показали, что $A \in U_{01} \cup U_{02} \cup U_{03}$ и $A \in U_{12} \cap U_{23} \cap U_{31}$. Если $A \in U_{01}$, то согласно второму включению $A \in U_{23}$, и мы получаем два пересекающихся элемента покрытия $\mathcal{U}$, объединение которых имеет общие точки со всеми гранями симплекса. Аналогично рассматриваются случаи $A \in U_{02}$ и $A \in U_{03}$. Полученное противоречие показывает, что покрытие $\mathcal{U}$ должно содержать по крайней мере 11 элементов.

В общем случае представляется вероятным, что при $k \geq n + 1$ имеет место равенство

$$\nabla_k^2(n) = k + \sum_{m=1}^{[(n+1)/2]} C_k^{2m}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bruijning J., Nagata J. A characterization of covering dimension by use of $\Delta_k(X)$ // Pacific J. Math. 1979. V. 80. № 1. P. 1–8.
- [2] Nagata J. Some questions II // Questions Answers Gen. Topology. 1984. V. 2. P. 2–13.
- [3] Hashimoto K., Hattori Y. On Nagata's star-index $*_k(X)$ // Topol. Appl. 2002. V. 122. P. 201–204.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: bogaty@mech.math.msu.su, karpov@mech.math.msu.su

Поступило
18.05.2004