Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, О накоплении собственных значений операторного пучка, связанного с задачей о колебаниях вязкоупругого стержня, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 369–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:15:30

УДК 517.984

О НАКОПЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА, СВЯЗАННОГО С ЗАДАЧЕЙ О КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

А. А. Владимиров

В статье исследуется вопрос о накоплении дискретного спектра к границе существенного для граничной задачи четвертого порядка, возникающей в теории малых поперечных колебаний неоднородного вязкоупругого стержня (материал Кельвина–Фойхта). Устанавливаются условия и асимптотики такого накопления, выраженные в терминах коэффициентов определяющего задачу дифференциального выражения. Полученные результаты иллюстрируются данными численных расчетов.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Рассмотрим динамическую краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left[p + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = u|_{x=1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (1.2)$$

возникающую в теории малых колебаний неоднородного вязкоупругого стержня (см., например, [1]–[3]). Здесь $p > 0$, $\alpha > 0$, g , β и $\rho > 0$ – заранее фиксированные вещественнозначные непрерывные функции аргумента x , а u – функция аргумента x и времени t .

Поскольку коэффициенты p , α и g не предполагаются гладкими, то задача (1.1), (1.2) не может, вообще говоря, быть понята непосредственным образом. Однако всегда можно рассмотреть для нее следующую слабую интерпретацию:

- (1) u есть функция времени t со значениями из пространства $\dot{W}_2^2[0, 1]$;
- (2) для любого элемента $v \in \dot{W}_2^2[0, 1]$ справедливо равенство

$$\int_0^1 \left\{ \left(pu'' + \alpha \frac{du''}{dt} \right) \overline{v''} + gu' \overline{v'} + \left(\beta \frac{du}{dt} + \rho \frac{d^2 u}{dt^2} \right) \overline{v} \right\} dx = 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00712, и программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1927.2003.1.

Именно такое понимание задачи и будет в дальнейшем предполагаться.

С динамической задачей (1.1), (1.2) можно связать спектральную задачу о собственных колебаниях моделируемой системы, т.е. поставить вопрос о решениях вида

$$u(t) = e^{\lambda t} y,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а y — некоторый ненулевой элемент пространства $\dot{W}_2^2[0, 1]$. Такой вопрос эквивалентен вопросу об описании собственных пар $\{\lambda, y\}$ задачи

$$\int_0^1 \{ (py'' + \lambda \alpha y'') \overline{v''} + gy' \overline{v'} + (\lambda \beta y + \lambda^2 \rho y) \overline{v} \} dx = 0 \quad \forall v \in \dot{W}_2^2[0, 1]. \quad (1.3)$$

В свою очередь, эта задача может быть переформулирована следующим образом. Введем в рассмотрение дуальное к $\dot{W}_2^2[0, 1]$ относительно $L_2[0, 1]$ пространство $\dot{W}_2^{-2}[0, 1]$, а также полуторалинейную форму $\mathfrak{I}$, определенную на $L_2[0, 1] \times \dot{W}_2^2[0, 1]$ тождеством

$$\mathfrak{I}[y, z] = \int_0^1 y \overline{z} dx \quad \forall y \in L_2[0, 1] \quad \forall z \in \dot{W}_2^2[0, 1]$$

и продолженную по непрерывности на все $\dot{W}_2^{-2}[0, 1] \times \dot{W}_2^2[0, 1]$. Условие (1.3) выражает тогда следующее требование: $\{\lambda, y\}$ является собственной парой квадратичного операторного пучка $T: \dot{W}_2^2[0, 1] \rightarrow \dot{W}_2^{-2}[0, 1]$ вида

$$T(\lambda) = (A_P + A_K) + \lambda \cdot (B_P + B_K) + \lambda^2 C, \quad (1.4)$$

где операторы A_P, A_K, B_P, B_K и C определены соотношениями

$$\mathfrak{I}[A_P y, z] = \int_0^1 py'' \overline{z''} dx, \quad \mathfrak{I}[A_K y, z] = \int_0^1 gy' \overline{z'} dx \quad \forall y, z \in \dot{W}_2^2[0, 1], \quad (1.5)$$

$$\mathfrak{I}[B_P y, z] = \int_0^1 \alpha y'' \overline{z''} dx, \quad \mathfrak{I}[B_K y, z] = \int_0^1 \beta y \overline{z} dx \quad \forall y, z \in \dot{W}_2^2[0, 1], \quad (1.6)$$

$$\mathfrak{I}[C y, z] = \int_0^1 \rho y \overline{z} dx \quad \forall y, z \in \dot{W}_2^2[0, 1]. \quad (1.7)$$

Таким образом, вопрос о собственных колебаниях системы, описываемой понимаемой в слабом смысле задачей (1.1), (1.2), сводится к вопросу о спектре операторного пучка (1.4) с коэффициентами (1.5)–(1.7).

Пучки, аналогичные пучку T вида (1.4)–(1.7), неоднократно рассматривались в литературе (см., например, [2], [3]). В частности, в работе [2] было показано, что число невещественных собственных значений пучка T конечно, а на вещественной оси существует тесная связь между поведением собственных значений пучка T и поведением индекса инерции операторов $T(\lambda)$. Отметим, что формально в работе [2] и продолжающей ее работе [3] рассматривался лишь частный случай пучка (1.4)–(1.7), причем несколько иначе определенный. Однако использованные в указанных работах методы легко переносятся на общий случай.

Главной целью настоящей статьи является конкретизация полученных в работе [2] в абстрактной форме условий накопления собственных значений пучка (1.4)–(1.7) к границе существенного спектра. При этом будут конкретизированы также и содержащиеся

в [2] результаты о поведении собственных значений в окрестности точек накопления, если таковые есть. Некоторые из результатов статьи были ранее анонсированы автором в заметке [4].

Условия накопления и асимптотики собственных значений, аналогичные по форме получаемым ниже, ранее выписывались для некоторых задач второго порядка. Здесь можно упомянуть работы [5] и [6], в которых использовался такой же метод аппроксимации исходной задачи простыми модельными, что и применяемый в п. 3 настоящей статьи. Однако технически случай задачи четвертого порядка несколько более сложен. Грубо говоря, исследование задачи второго порядка в конечном счете сводится к вопросу о том, вещественны или нет корни некоторого квадратного алгебраического уравнения (см. [5]). В случае же задачи четвертого порядка встает вопрос не просто о невещественности, а о “крестообразности” расположения в комплексной плоскости корней некоторого алгебраического уравнения четвертого порядка (см. ниже п. 2).

Структура статьи такова. Пункт 2 содержит имеющие вспомогательный характер результаты, касающиеся некоторых классов модельных квадратичных форм. В п. 3 описывается существенный спектр пучка (1.4)–(1.7) и устанавливаются условия накопления собственных значений к его границе, а также выписываются главные члены асимптотик такого накопления. Наконец, в п. 4 приводятся иллюстрирующие результаты предыдущего пункта данные численных экспериментов.

2. Модельные квадратичные формы. Зафиксируем произвольный интервал (a, b) и рассмотрим семейство квадратичных форм $\mathfrak{s}$ вида

$$\mathfrak{s}(c)[y] = \int_c^b \{ \mathbf{p} \cdot (x-a)^\gamma |y''|^2 + \mathbf{q} \cdot (x-a)^{\gamma-2} |y'|^2 + \mathbf{r} \cdot (x-a)^{\gamma-4} |y|^2 \} dx \quad (2.1)$$

$$\forall c \in (a, b) \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[c, b],$$

где $\mathbf{p} > 0$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ и γ – произвольно фиксированные вещественные числа. При этом пространство $\dot{W}_2^2[c, b]$, на котором определена квадратичная форма $\mathfrak{s}(c)$, зависит от выбора параметра $c \in (a, b)$.

Под *индексом инерции* $\text{ind } \mathfrak{t}$, определенной на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ квадратичной формы $\mathfrak{t}$, будет в дальнейшем пониматься максимальная возможная размерность подпространства $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, подчиненного условию

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall y \in \mathcal{M} \quad \mathfrak{t}[y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Основной целью настоящего пункта является описание поведения величины $\text{ind } \mathfrak{s}(c)$ при $c \searrow a$.

В дальнейшем будет предполагаться, что алгебраическое уравнение

$$\mathbf{p} \cdot \omega \cdot (\omega - 1) \cdot (\omega + \gamma - 2) \cdot (\omega + \gamma - 3) - \mathbf{q} \cdot \omega \cdot (\omega + \gamma - 3) + \mathbf{r} = 0 \quad (2.2)$$

имеет четыре различных комплексных корня ω_k , где $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда, как легко проверить непосредственно, функции y_k , где $k = 1, 2, 3, 4$, вида

$$y_k(x) = \exp \left(\omega_k \cdot \ln \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) \quad \forall x \in (a, +\infty)$$

Рис. 1. Допустимые способы расположения корней уравнения (2.2). Тип А

образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$(\mathbf{p} \cdot (x-a)^\gamma y'')'' - (\mathbf{q} \cdot (x-a)^{\gamma-2} y')' + (\mathbf{r} \cdot (x-a)^{\gamma-4} y) = 0. \quad (2.3)$$

Также будет предполагаться, что точки ω_k расположены в комплексной плоскости согласно одному из следующих двух типов:

- (А) существует вертикальная (т.е. параллельная мнимой оси) прямая, по каждую сторону от которой расположено два корня уравнения (2.2);
- (Б) существует вертикальная прямая, на которой расположены два корня уравнения (2.2), и по каждую сторону от которой расположен один корень этого уравнения.

При этом корни уравнения (2.2) будут всегда нумероваться таким образом, что в случае $j < k$ будет справедливо либо неравенство $\operatorname{Re} \omega_j < \operatorname{Re} \omega_k$, либо пара соотношений $\operatorname{Re} \omega_j = \operatorname{Re} \omega_k$ и $\operatorname{Im} \omega_j < \operatorname{Im} \omega_k$. Сделанные предположения иллюстрируются рисунками 1 и 2.

Центральную роль в дальнейших рассуждениях будет играть следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *При любом $c \in (a, b)$ справедливо равенство*

$$\operatorname{ind} \mathfrak{s}(c) = \sum_{\varkappa \in (c, b)} M(\varkappa),$$

где через $M(\varkappa)$ обозначена размерность пространства решений задачи, определенной дифференциальным уравнением (2.3) и граничными условиями

$$y(\varkappa) = y'(\varkappa) = y(b) = y'(b) = 0.$$

Утверждение 2.1 представляет собой тривиальное следствие теоремы 4.1 из [7].

ЛЕММА 2.1. Если корни уравнения (2.2) расположены согласно типу А, то найдется постоянная $Z > 0$, для которой независимо от выбора интервала (a, b) при любом $c \in (a, b)$ будет выполняться неравенство

$$\text{ind } \mathfrak{s}(c) \leq Z.$$

Рис. 2. Допустимые способы расположения корней уравнения (2.2). Тип Б

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение целую функцию D вида

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ e^{\omega_1 \mu} & e^{\omega_2 \mu} & e^{\omega_3 \mu} & e^{\omega_4 \mu} \\ \omega_1 e^{(\omega_1-1)\mu} & \omega_2 e^{(\omega_2-1)\mu} & \omega_3 e^{(\omega_3-1)\mu} & \omega_4 e^{(\omega_4-1)\mu} \end{vmatrix} \quad \forall \mu \in \mathbb{C}. \quad (2.4)$$

Для случая $\mu \in (-\infty, 0)$ эта функция представляет собой характеристический определитель задачи, отвечающей уравнению (2.3) и граничным условиям

$$y(a + e^\mu \cdot (b - a)) = y'(a + e^\mu \cdot (b - a)) = y(b) = y'(b) = 0. \quad (2.5)$$

Согласно утверждению 2.1 это означает, что величина $\text{ind } \mathfrak{s}(c)$ не превосходит удвоенного числа нулей функции D , принадлежащих интервалу

$$\left(\ln \left\{ \frac{c - a}{b - a} \right\}, 0 \right).$$

Однако если корни уравнения (2.2) расположены согласно типу А, то для некоторой постоянной $\sigma > 0$ при любом $\mu < 0$ будет справедливо неравенство

$$|D(\mu) - (\omega_4 - \omega_3) \cdot (\omega_2 - \omega_1) \cdot e^{(\omega_1 + \omega_2 - 1)\mu}| \leq \sigma \cdot e^{(\text{Re}(\omega_1 + \omega_3) - 1)\mu}.$$

Тем самым, слева от нуля расположено конечное число вещественных нулей функции D , что означает справедливость утверждения леммы.

ЛЕММА 2.2. Если корни уравнения (2.2) расположены согласно типу Б, то найдутся постоянные $\varepsilon > 0$ и $Z > 0$, для которых независимо от выбора интервала (a, b) при выполнении неравенства $(c - a) < \varepsilon \cdot (b - a)$ будет выполняться неравенство

$$\left| \text{ind } \mathfrak{s}(c) - \frac{\text{Im } \omega_3}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{b - a}{c - a} \right) \right| \leq Z.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. Рассмотрим вместе с целой функцией D вида (2.4) целую функцию D_0 вида

$$D_0(\mu) = 2i \cdot |\omega_4 - \omega_3| \cdot |\omega_2 - \omega_1| \cdot e^{(\omega_1 + \operatorname{Re} \omega_2 - 1)\mu} \times \sin[-\operatorname{Im} \omega_3 \cdot \mu + \arg\{(\omega_4 - \omega_3) \cdot (\omega_2 - \omega_1)\}] \quad \forall \mu \in \mathbb{C}.$$

Если корни уравнения (2.2) расположены согласно типу Б, то для некоторых постоянных $\sigma > 0$ и $\theta > \omega_1 + \operatorname{Re} \omega_2 - 1$ в левой полуплоскости $\{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu < 0\}$ будет выполняться неравенство

$$|D(\mu) - D_0(\mu)| \leq \sigma \cdot e^{\theta \cdot \operatorname{Re} \mu} \cdot e^{\operatorname{Im} \omega_3 \cdot |\operatorname{Im} \mu|}.$$

Если число $\hat{\mu} < 0$, подчиненное условию

$$\frac{-\operatorname{Im} \omega_3 \cdot \hat{\mu} + \arg\{(\omega_4 - \omega_3) \cdot (\omega_2 - \omega_1)\}}{\pi} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z},$$

достаточно велико по абсолютной величине, то на вертикальных прямых

$$\Gamma_1 = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu = \hat{\mu}\}, \quad \Gamma_2 = \left\{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu = \hat{\mu} - \frac{\pi}{\operatorname{Im} \omega_3}\right\}$$

справедливо неравенство

$$|D_0(\mu)| > \sigma \cdot e^{\theta \cdot \operatorname{Re} \mu} \cdot e^{\operatorname{Im} \omega_3 \cdot |\operatorname{Im} \mu|}$$

и такое же неравенство при $N \gg 0$ справедливо на отрезках

$$\Gamma_3 = \left\{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu - \hat{\mu} \in \left[-\frac{\pi}{\operatorname{Im} \omega_3}, 0\right], \operatorname{Im} \mu = N\right\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{\mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu - \hat{\mu} \in \left[-\frac{\pi}{\operatorname{Im} \omega_3}, 0\right], \operatorname{Im} \mu = -N\right\}$$

(см. рис. 3). При этом в области Ω , ограниченной линиями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и Γ_4 , функция D_0 имеет ровно один нуль, причем простой. Применяя теперь к функциям D и D_0 теорему Руше, убеждаемся, что функция D также имеет в Ω единственный, причем простой, нуль. Поскольку в случае расположения корней уравнения (2.2) согласно типу Б справедливо тождество

$$D(\bar{\mu}) = -\overline{D(\mu)} \quad \forall \mu \in \mathbb{C},$$

этот нуль является вещественным.

Рис. 3. Область Ω из доказательства леммы 2.2

Шаг 2. Из результатов предыдущего шага следует, что число нулей функции D , принадлежащих интервалу

$$\left(\ln \left\{ \frac{c-a}{b-a} \right\}, 0 \right),$$

не более чем на фиксированную постоянную отличается от числа

$$\frac{\operatorname{Im} \omega_3}{\pi} \cdot \ln \left(\frac{b-a}{c-a} \right).$$

При этом число кратных нулей также не превышает некоторую заранее фиксированную постоянную. Однако непосредственным дифференцированием определителя (2.4) легко убедиться, что если μ является простым нулем функции D , то у матрицы из правой части (2.4) найдется ненулевой минор третьего ранга (ср. [8, §2.1]). Следовательно, в том случае, когда μ — простой нуль функции D , размерность пространства решений граничной задачи (2.3), (2.5) равна 1. Для завершения доказательства теперь достаточно применить утверждение 2.1.

Леммы 2.1 и 2.2 обладают такими следствиями.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть фиксирован отрезок $[a, b]$ и пусть $\widehat{\mathbf{s}}$ — семейство определенных на пространстве $\dot{W}_2^2[a, b]$ квадратичных форм вида

$$\widehat{\mathbf{s}}(\tau)[y] = \int_a^b \{ (\mathbf{p} \cdot (x-a)^2 + \tau) \cdot |y''|^2 + \mathbf{q} \cdot |y'|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[a, b] \quad \forall \tau \in (0, +\infty),$$

где $\mathbf{p} > 0$ и $\mathbf{q}$ — произвольно фиксированные вещественные числа. Тогда в случае, если справедливо неравенство $\mathbf{q} > -\mathbf{p}/4$, при $\tau \searrow 0$ имеет место асимптотика

$$\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{s}}(\tau) = O(1). \quad (2.6)$$

Аналогично, если справедливо неравенство $\mathbf{q} < -\mathbf{p}/4$, то при $\tau \searrow 0$ имеет место асимптотика

$$\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{s}}(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} - \frac{1}{4}} \cdot \ln \tau + O(1). \quad (2.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть фиксирован отрезок $[a, b]$ и пусть $\widehat{\mathbf{s}}$ — семейство определенных на пространстве $\dot{W}_2^2[a, b]$ квадратичных форм вида

$$\widehat{\mathbf{s}}(\tau)[y] = \int_a^b \{ (\mathbf{p} \cdot (x-a)^4 + \tau) \cdot |y''|^2 + \mathbf{r} \cdot |y|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[a, b] \quad \forall \tau \in (0, +\infty),$$

где $\mathbf{p} > 0$ и $\mathbf{r}$ — произвольно фиксированные вещественные числа. Тогда в случае, если справедливо неравенство $\mathbf{r} > -9\mathbf{p}/16$, при $\tau \searrow 0$ имеет место асимптотика

$$\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{s}}(\tau) = O(1).$$

Аналогично, если справедливо неравенство $\mathbf{r} < -9\mathbf{p}/16$, то при $\tau \searrow 0$ имеет место асимптотика

$$\operatorname{ind} \widehat{\mathbf{s}}(\tau) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{p}}} - \frac{5}{4}} \cdot \ln \tau + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2.1. Введем в рассмотрение вспомогательные величины $c_{\pm}(\tau) = a \pm (\tau/\mathbf{p})^{1/2}$. Если значение параметра τ достаточно мало, то величина $c_+(\tau)$ лежит в интервале (a, b) . В дальнейшем это и будет всегда предполагаться.

Кроме того, заметим, что если справедливость асимптотики (2.6) доказана для случая $\mathbf{q} \in (-\mathbf{p}/4, 0)$, то эта асимптотика справедлива при всех $\mathbf{q} > -\mathbf{p}/4$. Поэтому без ограничения общности можно предположить, что величина $\mathbf{q}$ отрицательна. В дальнейшем так и будет делаться.

Шаг 1. Легко видеть, что величина $\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}(\tau)$ оценивается сверху увеличенной на 2 суммой индексов инерции квадратичных форм $\widehat{\mathbf{s}}_1(\tau)$ и $\widehat{\mathbf{s}}_2(\tau)$ следующего вида:

(1) квадратичная форма $\widehat{\mathbf{s}}_1(\tau)$ определена на пространстве $\dot{W}_2^2[a, c_+(\tau)]$ условием

$$\widehat{\mathbf{s}}_1(\tau)[y] = \int_a^{c_+(\tau)} \{ \tau \cdot |y''|^2 + \mathbf{q} \cdot |y'|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[a, c_+(\tau)];$$

(2) квадратичная форма $\widehat{\mathbf{s}}_2(\tau)$ определена на пространстве $\dot{W}_2^2[c_+(\tau), b]$ условием

$$\widehat{\mathbf{s}}_2(\tau)[y] = \int_{c_+(\tau)}^b \{ \mathbf{p} \cdot (x - a)^2 |y''|^2 + \mathbf{q} \cdot |y'|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[c_+(\tau), b].$$

Как несложно проверить непосредственно, при $\tau \searrow 0$ справедлива асимптотика

$$\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}_1(\tau) = O(1).$$

Асимптотическое поведение индекса инерции квадратичной формы $\widehat{\mathbf{s}}_2(\tau)$ может быть исследовано на основе лемм 2.1 и 2.2. Алгебраическое уравнение (2.2) принимает при этом вид уравнения

$$\mathbf{p} \cdot \omega^2 \cdot (\omega - 1)^2 - \mathbf{q} \cdot \omega \cdot (\omega - 1) = 0, \quad (2.8)$$

имеющего при $\mathbf{q} < 0$ корни

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} + \frac{1}{4}}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} + \frac{1}{4}}, \quad \omega_4 = 1.$$

Таким образом, в случае $\mathbf{q} > -\mathbf{p}/4$ из леммы 2.1 вытекает справедливость асимптотики $\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}_2(\tau) = O(1)$, и первое утверждение следствия доказано. В случае же $\mathbf{q} < -\mathbf{p}/4$ из леммы 2.2 вытекает справедливость асимптотики

$$\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}_2(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} - \frac{1}{4}} \cdot \ln \tau + O(1).$$

Тем самым, выражение в правой части соотношения (2.7) представляет собой верхнюю асимптотическую оценку величины $\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}(\tau)$, и для завершения доказательства следствия достаточно установить наличие у этой величины нижней асимптотической оценки того же вида.

Шаг 2. Заметим, что величина $\text{ind } \widehat{\mathbf{s}}(\tau)$ оценивается снизу индексом инерции определенной на пространстве $\dot{W}_2^2[a, b]$ квадратичной формы $\widehat{\mathbf{s}}_3(\tau)$ вида

$$\widehat{\mathbf{s}}_3(\tau)[y] = \int_a^b \{ \mathbf{p} \cdot (x - c_-(\tau))^2 |y''|^2 + \mathbf{q} \cdot |y'|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[a, b].$$

Применяя к этой квадратичной форме лемму 2.2, убеждаемся, что в случае $\mathbf{q} < -\mathbf{p}/4$ ее индекс инерции имеет при $\tau \searrow 0$ асимптотику

$$\text{ind } \widehat{\mathfrak{s}}_3(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}} - \frac{1}{4}} \cdot \ln \tau + O(1).$$

Тем самым, выражение в правой части (2.7) представляет собой нижнюю асимптотическую оценку величины $\text{ind } \widehat{\mathfrak{s}}(\tau)$. Следствие полностью доказано.

Следствие 2.2 доказывается аналогично следствию 2.1, с тем отличием, что вместо вспомогательных величин $c_{\pm}(\tau) = c \pm (\tau/\mathbf{p})^{1/2}$ используются величины $c_{\pm}(\tau) = c \pm (\tau/\mathbf{p})^{1/4}$, а вместо уравнения (2.8) используется уравнение

$$\mathbf{p} \cdot \omega \cdot (\omega - 1) \cdot (\omega + 2) \cdot (\omega + 1) + \mathbf{r} = 0,$$

приводящееся к биквадратному заменой $\omega = \eta - 1/2$.

3. Условия накопления и асимптотики собственных значений. В дальнейшем под T всегда будет пониматься пучок (1.4) с коэффициентами $A_P + A_K$, $B_P + B_K$ и C вида (1.5)–(1.7). Через $\zeta_{\pm}$ в дальнейшем будут обозначаться числа

$$\zeta_- = -\sup_{x \in [0,1]} \frac{p(x)}{\alpha(x)}, \quad \zeta_+ = -\inf_{x \in [0,1]} \frac{p(x)}{\alpha(x)}.$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Существенным спектром пучка T является отрезок $[\zeta_-, \zeta_+]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть справедливость следующих утверждений:

- операторы A_K , B_K и C компактны;
- у операторов A_P и B_P имеются двумерные расширения, изоморфные двумерным возмущениям действующих в пространстве $L_2[0, 1]$ операторов P и G умножения на функции p и α соответственно.

Поэтому существенный спектр пучка T совпадает с существенным спектром линейного пучка $\widehat{T}: L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ вида

$$\widehat{T}(\lambda) = P + \lambda G.$$

Отсюда немедленно вытекает утверждение теоремы.

Под *индексом инерции* $\text{ind } Q$ оператора $Q: \dot{W}_2^2[0, 1] \rightarrow \dot{W}_2^{-2}[0, 1]$, эрмитова относительно полуторалинейной формы $\mathfrak{I}$, будет в дальнейшем пониматься максимальная возможная размерность подпространства $\mathcal{M} \subset \dot{W}_2^2[0, 1]$, подчиненного условию

$$\mathfrak{I}[Qy, y] \leq -\varepsilon \|y\|_{\dot{W}_2^2[0,1]}^2 \quad \forall y \in \mathcal{M} \quad \exists \varepsilon > 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть число $\zeta \in (-\infty, \zeta_-)$ не является собственным значением пучка T . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Каков бы ни был полуинтервал $(\lambda_1, \lambda_2] \subset (-\infty, \zeta)$, сосчитанное с учетом кратности число $\mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2)$ собственных значений пучка T , расположенных на этом полуинтервале, удовлетворяет оценкам

$$\text{ind}(-T(\lambda_1)) - \text{ind}(-T(\lambda_2)) \leq \mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2) \leq \text{ind}(-T(\lambda_1)) - \text{ind}(-T(\lambda_2)) + 2 \text{ind}(-T(\zeta)).$$

(2) Каков бы ни был полуинтервал $[\lambda_1, \lambda_2) \subset (\zeta, \zeta_-)$, сосчитанное с учетом кратности число $\mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2)$ собственных значений пучка T , расположенных на этом полуинтервале, удовлетворяет оценкам

$$\text{ind}(-T(\lambda_2)) - \text{ind}(-T(\lambda_1)) \leq \mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2) \leq \text{ind}(-T(\lambda_2)) - \text{ind}(-T(\lambda_1)) + 2 \text{ind}(-T(\zeta)).$$

(3) Каков бы ни был полуинтервал $(\lambda_1, \lambda_2] \subset (\zeta_+, +\infty)$, сосчитанное с учетом кратности число $\mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2)$ собственных значений пучка T , расположенных на этом полуинтервале, удовлетворяет оценкам

$$\text{ind } T(\lambda_1) - \text{ind } T(\lambda_2) \leq \mathcal{N}_T(\lambda_1, \lambda_2) \leq \text{ind } T(\lambda_1) - \text{ind } T(\lambda_2) + 2 \text{ind}(-T(\zeta)).$$

Утверждение 3.1 представляет собой аналог утверждения [2, предложение 1.8].

Следующие две теоремы описывают поведение собственных значений пучка T в окрестности левой границы его существенного спектра.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть функция p/α достигает максимального на отрезке $[0, 1]$ значения $-\zeta_-$ в единственной точке $\hat{x} \in (0, 1)$. Пусть при этом функция $p + \zeta_- \alpha$ обладает непрерывной второй производной в окрестности точки $\hat{x}$, причем имеет место неравенство

$$(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}} < 0.$$

Тогда в случае справедливости неравенства

$$g(\hat{x}) < -\frac{(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}}}{8} \quad (3.1)$$

собственные значения пучка T не накапливаются к точке ζ_- . Напротив, в случае справедливости неравенства

$$g(\hat{x}) > -\frac{(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}}}{8} \quad (3.2)$$

собственные значения пучка T накапливаются к точке ζ_- с асимптотикой

$$\mathcal{N}_T(\zeta, \lambda) \sim -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{8g(\hat{x})}{(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}}}} - 1 \cdot \ln(\zeta_- - \lambda),$$

где ζ — произвольное число, расположенное левее точки ζ_- .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть функция p/α достигает максимального на отрезке $[0, 1]$ значения $-\zeta_-$ в единственной точке $\hat{x} \in (0, 1)$. Пусть при этом функция g тождественно равна нулю, а функция $p + \zeta_- \alpha$ обладает непрерывной четвертой производной в окрестности точки $\hat{x}$, причем имеют место соотношения

$$(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}} = 0, \quad (p + \zeta_- \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}} < 0.$$

Тогда в случае справедливости неравенства

$$\zeta_- \beta(\hat{x}) + \zeta_-^2 \rho(\hat{x}) < -\frac{3}{128} \cdot (p + \zeta_- \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}$$

собственные значения пучка T не накапливаются к точке ζ_- . Напротив, в случае справедливости неравенства

$$\zeta_- \beta(\hat{x}) + \zeta_-^2 \rho(\hat{x}) > -\frac{3}{128} \cdot (p + \zeta_- \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}$$

собственные значения пучка T накапливаются к точке ζ_- с асимптотикой

$$\mathcal{N}_T(\zeta, \lambda) \sim -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1 - \frac{24[\zeta_- \beta(\hat{x}) + \zeta_-^2 \rho(\hat{x})]}{(p + \zeta_- \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}}} - \frac{5}{4} \cdot \ln(\zeta_- - \lambda)},$$

где ζ – произвольное число, расположенное левее точки ζ_- .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Шаг 1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\pm} &= -\frac{(p + \zeta_- \alpha)''|_{x=\hat{x}}}{2} \pm \varepsilon, & \mathbf{q}_{\pm} &= -g(\hat{x}) \pm \varepsilon, \\ \alpha_- &= \inf_{x \in [0, 1]} \alpha(x), & \alpha_+ &= \sup_{x \in [0, 1]} \alpha(x). \end{aligned}$$

Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то величина $\mathbf{p}_-$ оказывается положительной, что и будет в дальнейшем предполагаться.

При выполнении условий теоремы найдутся точки $a_- \in (0, \hat{x})$ и $a_+ \in (\hat{x}, 1)$ со следующими свойствами:

- на каждом из отрезков $[0, a_-]$ и $[a_+, 1]$ функция $p + \zeta_- \alpha$ ограничена снизу некоторой постоянной $\delta > 0$;
- при любом $x \in [a_-, a_+]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_- \cdot (x - \hat{x})^2 &\leq -p(x) - \zeta_- \alpha(x) \leq \mathbf{p}_+ \cdot (x - \hat{x})^2, \\ \mathbf{q}_- + \frac{\varepsilon}{2} &\leq -g(x) \leq \mathbf{q}_+ - \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned}$$

- имеет место неравенство

$$\sup_{x \in [a_-, a_+]} |\zeta_- \beta + \zeta_-^2 \rho| < \frac{\pi^2 \varepsilon}{2(a_+ - a_-)^2}.$$

Зафиксируем такие точки $a_{\pm}$ и рассмотрим определенные на пространстве $\dot{W}_2^2[a_-, a_+]$ квадратичные формы $\widehat{\mathbf{s}}_{\pm}$ вида

$$\widehat{\mathbf{s}}_{\pm}(\lambda)[y] = \int_{a_-}^{a_+} \{ (\mathbf{p}_{\pm} \cdot (x - \widehat{x})^2 + \alpha_{\pm} \cdot (\zeta_{\pm} - \lambda)) \cdot |y''|^2 + \mathbf{q}_{\pm} \cdot |y'|^2 \} dx \quad \forall y \in \dot{W}_2^2[a_-, a_+].$$

Из наложенных на точки $a_{\pm}$ условий следует, что для значений λ из некоторой левой полуокрестности точки ζ_- величина $\text{ind}(-T(\lambda))$ оценивается сверху величиной $\text{ind} \widehat{\mathbf{s}}_-(\lambda) + O(1)$ и оценивается снизу величиной $\text{ind} \widehat{\mathbf{s}}_+(\lambda) + O(1)$.

Шаг 2. Заметим, что при выполнении неравенства (3.1) значение $\varepsilon > 0$ можно выбрать таким образом, что будет справедливо неравенство $\mathbf{q}_- > -\mathbf{p}_-/4$. Тем самым, из результатов предыдущего шага и следствия 2.1 вытекает, что в случае выполнения неравенства (3.1) индекс инерции операторов $-T(\lambda)$ имеет при $\lambda \nearrow \zeta_-$ асимптотику

$$\text{ind}(-T(\lambda)) = O(1).$$

Согласно утверждению 3.1 это означает отсутствие накопления собственных значений пучка T к точке ζ_- .

Аналогично, из следствия 2.1 вытекает, что при выполнении неравенства (3.2) и выборе достаточно малого $\varepsilon > 0$ величина $\text{ind}(-T(\lambda))$ будет при $\lambda \nearrow \zeta_-$ оцениваться сверху величиной

$$-\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{4\mathbf{q}_-}{\mathbf{p}_-}} - 1 \cdot \ln(\zeta_- - \lambda) + O(1)$$

и оцениваться снизу величиной

$$-\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{4\mathbf{q}_+}{\mathbf{p}_+}} - 1 \cdot \ln(\zeta_- - \lambda) + O(1).$$

Переходя в полученных оценках к пределу по $\varepsilon \searrow 0$ и применяя утверждение 3.1, убеждаемся, что в случае справедливости неравенства (3.2) утверждения теоремы также справедливы. Тем самым, теорема полностью доказана.

Теорема 3.3 доказывается аналогично теореме 3.2, с тем отличием, что вместо следствия 2.1 применяется следствие 2.2.

Имеют место также следующие полные аналоги теорем 3.2 и 3.3 для случая накопления собственных значений пучка T к правой границе его существенного спектра.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть функция p/α достигает минимального на отрезке $[0, 1]$ значения $-\zeta_+$ в единственной точке $\widehat{x} \in (0, 1)$. Пусть при этом функция $p + \zeta_+\alpha$ обладает непрерывной второй производной в окрестности точки $\widehat{x}$, причем имеет место неравенство

$$(p + \zeta_+\alpha)''|_{x=\widehat{x}} > 0.$$

Тогда в случае справедливости неравенства

$$g(\widehat{x}) > -\frac{(p + \zeta_+\alpha)''|_{x=\widehat{x}}}{8}$$

собственные значения пучка T не накапливаются к точке ζ_+ . Напротив, в случае справедливости неравенства

$$g(\hat{x}) < -\frac{(p + \zeta_+ \alpha)''|_{x=\hat{x}}}{8}$$

собственные значения пучка T накапливаются к точке ζ_+ с асимптотикой

$$\mathcal{N}_T(\lambda, +\infty) \sim -\frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{8g(\hat{x})}{(p + \zeta_+ \alpha)''|_{x=\hat{x}}} - 1} \cdot \ln(\lambda - \zeta_+).$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть функция p/α достигает минимального на отрезке $[0, 1]$ значения $-\zeta_+$ в единственной точке $\hat{x} \in (0, 1)$. Пусть при этом функция g тождественно равна нулю, а функция $p + \zeta_+ \alpha$ обладает непрерывной четвертой производной в окрестности точки $\hat{x}$, причем имеют место соотношения

$$(p + \zeta_+ \alpha)''|_{x=\hat{x}} = 0, \quad (p + \zeta_+ \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}} > 0.$$

Тогда в случае справедливости неравенства

$$\zeta_+ \beta(\hat{x}) + \zeta_+^2 \rho(\hat{x}) > -\frac{3}{128} \cdot (p + \zeta_+ \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}$$

собственные значения пучка T не накапливаются к точке ζ_+ . Напротив, в случае справедливости неравенства

$$\zeta_+ \beta(\hat{x}) + \zeta_+^2 \rho(\hat{x}) < -\frac{3}{128} \cdot (p + \zeta_+ \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}$$

собственные значения пучка T накапливаются к точке ζ_+ с асимптотикой

$$\mathcal{N}_T(\lambda, +\infty) \sim -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\sqrt{1 - \frac{24[\zeta_+ \beta(\hat{x}) + \zeta_+^2 \rho(\hat{x})]}{(p + \zeta_+ \alpha)^{(4)}|_{x=\hat{x}}}} - \frac{5}{4}} \cdot \ln(\lambda - \zeta_+).$$

4. Численные результаты. В настоящем пункте будут приведены два примера, из которых первый иллюстрирует теорему 3.2, а второй – теорему 3.5.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим задачу, отвечающую функциям

$$p = 1, \quad \alpha = 1 + \frac{(x - 1/2)^2}{4}, \quad g = 35 + x, \quad \beta = 1, \quad \rho = 4 - x.$$

Существенным спектром соответствующего пучка T является отрезок $[-1, -16/17]$. Кроме того, при некоторых $\lambda < -1$ (в частности, при $\lambda = -2$) индекс инерции оператора $-T(\lambda)$ равен нулю, а потому все собственные значения пучка T из интервала $(-2, -1)$ могут быть численно определены на основе утверждения 3.1. В табл. 1 указаны первые (при нумерации в порядке возрастания) из этих собственных значений. А именно, во второй колонке таблицы приводятся (с указанием границ относительной погрешности) величины отклонения собственных значений от предельного положения $\zeta_- = -1$, а в

ТАБЛИЦА 1. Оценки собственных значений для пучка из примера 4.1

Номер	Отклонение от ζ_-	Точность асимптотики
1	$-8.74 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	$0.51 (\pm 1\%)$
2	$-4.13 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	$1.67 (\pm 1\%)$
3	$-2.00 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	$2.03 (\pm 1\%)$
4	$-1.27 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	$1.95 (\pm 1\%)$
5	$-8.00 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.91 (\pm 1\%)$
6	$-5.61 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.82 (\pm 1\%)$
7	$-3.86 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.76 (\pm 1\%)$
8	$-2.85 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.69 (\pm 1\%)$
9	$-2.05 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.64 (\pm 1\%)$
10	$-1.55 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	$1.58 (\pm 1\%)$

третьей колонке приводятся (также с указанием границ относительной погрешности) соответствующие значения величин

$$-\frac{\sqrt{567}}{2\pi n} \cdot \ln(-1 - \lambda_n). \quad (4.1)$$

Согласно теореме 3.2 величины (4.1) стремятся к 1. Как легко видеть, они действительно, начиная с $n = 3$, приближаются сверху к единице, хотя скорость такого приближения и не является очень высокой. Так, для отсутствующего в таблице собственного значения $\lambda_{20} = -1 + (-1,04 \cdot 10^{-3} (\pm 12\%))$ соответствующая величина (4.1) есть $1,30 (\pm 2\%)$.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим задачу, отвечающую функциям

$$p = 1 + \frac{(x - 1/2)^4}{1000}, \quad \alpha = 1, \quad g = 0, \quad \beta = 1000 + 10x, \quad \rho = 3.$$

Существенным спектром соответствующего пучка T является отрезок $[-16\,001/16\,000, -1]$. В некоторой окрестности левого края ζ_- существенного спектра индекс инерции операторов $-T(\lambda)$ равен нулю, а потому все собственные значения пучка T на полупрямой $(-1, +\infty)$ могут быть численно определены на основе утверждения 3.1. В табл. 2 указаны первые (в порядке убывания) из этих собственных значений. А именно, во второй колонке таблицы приводятся величины отклонения собственных значений от предельного положения $\zeta_+ = -1$, а в третьей колонке приводятся соответствующие значения величин

$$-\frac{\sqrt{3999}}{4\pi n} \cdot \ln(\lambda_n + 1), \quad (4.2)$$

которые согласно теореме 3.5 стремятся к 1. Из данных табл. 2 видно, что, начиная с $n = 4$, намечается тенденция понижения величины (4.2). Однако скорость приближения этой величины к предельному значению 1 даже ниже, чем в случае из примера 4.1.

Как следует из приведенных примеров, поведение первых членов серий собственных значений, накапливающихся к границе существенного спектра, может довольно сильно отличаться от того поведения, которое предписывается главным членом асимптотики. В связи с этим встает вопрос о том, начиная с какого момента асимптотика дает приемлемые оценки собственных значений. Однако изучение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

ТАБЛИЦА 2. Оценки собственных значений для пучка из примера 4.2

Номер	Отклонение от ζ_+	Точность асимптотики
1	$6.66 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	2.04 ($\pm 1\%$)
2	$2.08 \cdot 10^{-1} (\pm 1\%)$	3.95 ($\pm 1\%$)
3	$6.45 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	4.60 ($\pm 1\%$)
4	$2.44 \cdot 10^{-2} (\pm 1\%)$	4.67 ($\pm 1\%$)
5	$1.10 \cdot 10^{-2} (\pm 2\%)$	4.54 ($\pm 1\%$)
6	$5.68 \cdot 10^{-3} (\pm 2\%)$	4.34 ($\pm 1\%$)
7	$3.21 \cdot 10^{-3} (\pm 3\%)$	4.13 ($\pm 1\%$)
8	$1.95 \cdot 10^{-3} (\pm 4\%)$	3.93 ($\pm 1\%$)
9	$1.24 \cdot 10^{-3} (\pm 5\%)$	3.74 ($\pm 1\%$)
10	$8.30 \cdot 10^{-4} (\pm 7\%)$	3.57 ($\pm 1\%$)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Пивоварчик В. Н. Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением // Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 3. С. 68–71.
- [2] Lancaster P., Shkalikov A. Damped vibration of beams and related spectral problems // Canad. Appl. Math. Quat. 1994. V. 2. № 1. P. 45–90.
- [3] Гринив Р. О., Шкаликков А. А. О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 114–131.
- [4] Владимиров А. А. О накоплении собственных значений дифференциальных оператор-функций // УМН. 2002. Т. 57. № 1. С. 151–152.
- [5] Mennicken R., Schmid H., Shkalikov A. A. On the eigenvalue accumulation of Sturm–Liouville problem depending nonlinearly on the spectral parameter // Math. Nachr. 1998. V. 189. P. 157–170.
- [6] Владимиров А. А., Гринив Р. О., Шкаликков А. А. Спектральный анализ периодических дифференциальных матриц смешанного порядка // Тр. ММО. 2002. Т. 63. С. 45–86.
- [7] Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств. Мариуполь, 2001.
- [8] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило
 27.10.2004