Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Камозина, О неоднопорожденных кратно ω -веерных классах Фиттинга конечных групп, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 396–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:57:56

УДК 512.542

О НЕОДНОПОРОЖДЕННЫХ КРАТНО ω -ВЕЕРНЫХ КЛАССАХ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

О. В. Камозина

В статье изучаются алгебраические решетки классов Фиттинга, а также описываются неоднопорожденные классы Фиттинга, у которых все собственные подклассы Фиттинга являются однопорожденными. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Библиография: 13 названий.

Исследование неоднопорожденных классов групп часто сводится к изучению однопорожденных классов групп. Поэтому представляет интерес рассмотрение связей между неоднопорожденными и однопорожденными классами групп. Так, в работах [1]–[3] А. Н. Скибой и Н. Н. Воробьевым показано, что решетка всех формаций, решетка всех n -кратно локальных формаций, решетка всех разрешимых totally локальных формаций и решетка всех разрешимых totally локальных классов Фиттинга являются алгебраическими, причем компактными элементами в данных решетках являются соответствующие однопорожденные классы. Полная решетка называется *алгебраической*, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов.

Другой подход в решении данной задачи связан с изучением неоднопорожденных классов групп, у которых все собственные подклассы являются однопорожденными. Скибой [4] было получено описание локальных наследственных формаций, содержащихся в $\mathfrak{M}^n$ ($n \geq 3$), В. Г. Сафоновым [5] – totally локальных формаций с данным свойством.

В настоящей статье установлена алгебраичность решеткикратно ω -веерных классов Фиттинга с направлением φ , $\rho_0 \leq \varphi$, а также описаны неоднопорожденные totally веерные классы Фиттинга с направлением φ , $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$, у которых все собственные totally веерные подклассы Фиттинга с направлением φ являются однопорожденными.

Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1], [6]–[8]. В частности, ω обозначает некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$,

$$F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_{p'}}, \quad O^{Z_p, (Z_p)'}(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}_{(Z_p)'}}.$$

Функция $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ называется ωR -функцией, функция $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ называется $\mathbb{P}FR$ -функцией. Класс Фиттинга

$$\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$$

называется ω -верным с ω -спутником f и направлением φ . При рассмотрении различных направлений получаются различные классы Фиттинга. В частности, класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ называется ω -полным и обозначается $\mathfrak{F} = \omega AR(f)$, если $\varphi(p) = \rho_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ называется ω -локальным и обозначается $\mathfrak{F} = \omega LR(f)$, если $\varphi(p) = \rho_1(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ называется ω -специальным и обозначается $\mathfrak{F} = \omega SR(f)$, если $\varphi(p) = \rho_2(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{(Z_p)'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

При $n \geq 1$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется n -кратно ω -верным с направлением φ , если $\mathfrak{F}$ имеет хотя бы один ω -спутник, все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно ω -верными классами Фиттинга с тем же направлением φ ; 0 -кратно ω -верным с направлением φ считается всякий класс Фиттинга; класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *тотально ω -верным с направлением φ* , если он n -кратно ω -верный с направлением φ для всех натуральных n .

Непустое множество классов Фиттинга θ называется *полной решеткой* классов Фиттинга, если $\emptyset$ и $\mathfrak{G}$ принадлежат θ и пересечение любой совокупности классов Фиттинга из θ снова принадлежит θ . Элемент с полной решетки L называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leq \sup_L X$ вытекает существование такого конечного подмножества $X_0 \subseteq X$, что $c \leq \sup_L X_0$.

Если G – разрешимая группа, то через $l(G)$ обозначается нильпотентная длина группы G .

Обозначим символом ωR_φ^n (ωR_φ^∞) множество всех n -кратно (тотально) ω -верных классов Фиттинга с направлением φ . В частности, ωA^n (ωA^∞), ωL^n (ωL^∞), ωS^n (ωS^∞) – множество всех n -кратно (тотально) ω -полных, ω -локальных, ω -специальных классов Фиттинга соответственно. При $\omega = \mathbb{P}$ символ $\mathbb{P}$ в данных обозначениях будем опускать.

ЛЕММА 1. ωR_φ^n – полная решетка классов Фиттинга для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любого φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 0$ утверждение леммы следует из определения класса Фиттинга.

Пусть $n = 1$. По лемме 11 [6] пересечение любой совокупности ωR -классов Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, является ωR -классом Фиттинга, причем если $\mathfrak{F}_i = \omega R(f_i, \varphi)$, $i \in I$, то $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \omega R(f, \varphi)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$. Для $n > 1$ предположим, что пересечение любой совокупности ωR_φ^{n-1} -классов Фиттинга есть ωR_φ^{n-1} -класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_i = \omega R(f_i, \varphi) \in \omega R_\varphi^n$, $i \in I$, причем $f_i(p) \in \omega R_\varphi^{n-1}$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. Тогда по предположению индукции $f(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p) \in \omega R_\varphi^{n-1}$ и по определению $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi) \in \omega R_\varphi^n$. Таким образом, пересечение любой совокупности ωR_φ^n -классов Фиттинга есть ωR_φ^n -класс Фиттинга для любого натурального n .

По лемме 9 [6] $\emptyset = \omega R(h, \varphi)$, где $h(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, φ – произвольное направление. Тогда по индукции, учитывая строение спутника h , нетрудно показать, что $\emptyset \in \omega R_\varphi^n$.

Для любого $\omega \subseteq \mathbb{P}$ имеем $\mathfrak{G} = \omega R(m, \varphi)$, где $m(p) = \mathfrak{G}$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$, φ – произвольное направление. Действительно, для любой группы $G \in \mathfrak{G}$ имеем $G^{\varphi(p)} \in \mathfrak{G} = m(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$, $O^\omega(G) \in \mathfrak{G} = m(\omega')$. Следовательно, $G \in \omega R(m, \varphi)$ и $\mathfrak{G} \subseteq \omega R(m, \varphi)$. Обратно, так как рассматриваются только классы Фиттинга конечных групп, то $\omega R(m, \varphi) \subseteq \mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{G} = \omega R(m, \varphi)$. Опять по индукции, учитывая

строение спутника m , нетрудно показать, что $\mathfrak{G} \in \omega R_\varphi^n$.

Следовательно, ωR_φ^n – полная решетка классов Фиттинга для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любого φ . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. ωR_φ^∞ – полная решетка классов Фиттинга для любого φ .

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп. Тогда $\text{fit } \mathfrak{X}$ состоит из групп, получаемых в результате конечного применения операций S_n и R к группам из $\mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathfrak{F} = \{G \in k_1 \cdots k_m \mathfrak{X} \mid k_i \in \{S_n, R\}, i = 1, \dots, m, m \in \mathbb{N}\}.$$

Покажем, что $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. Пусть $N \triangleleft H \in \mathfrak{F}$. Тогда $N \triangleleft H \in k_1 \cdots k_t \mathfrak{X}$, и значит, $N \in S_n(H) \subseteq S_n k_1 \cdots k_t \mathfrak{X}$. Следовательно, $N \in S_n k_1 \cdots k_t \mathfrak{X}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Допустим, что $B = N_1 N_2$, где $N_i \in \mathfrak{F}$, $N_i \triangleleft B$, $i = 1, 2$. Тогда $N_1 \in k_{i_1} \cdots k_{i_r} \mathfrak{X}$, $N_2 \in k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}$. Ввиду того, что S_n и R являются расширяющимися и монотонными, получаем следующие включения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &\subseteq k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}, \quad k_{i_1} \cdots k_{i_r} \mathfrak{X} \subseteq k_{i_1} \cdots k_{i_r} k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}, \\ k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X} &\subseteq k_{i_1} \cdots k_{i_r} k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Таким образом, $N_i \in k_{i_1} \cdots k_{i_r} k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, а значит,

$$B = N_1 N_2 \in R k_{i_1} \cdots k_{i_r} k_{j_1} \cdots k_{j_s} \mathfrak{X}$$

и $B \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, значит, и $\text{fit } \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку по определению класс Фиттинга k_i -замкнут, то $k_i \text{fit } \mathfrak{X} = \text{fit } \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \text{fit } \mathfrak{X}$ и k_i монотонна, то $k_m \mathfrak{X} \subseteq k_m \text{fit } \mathfrak{X} = \text{fit } \mathfrak{X}$. Продолжая этот процесс, получим $k_1 \cdots k_m \mathfrak{X} \subseteq k_1 \text{fit } \mathfrak{X} = \text{fit } \mathfrak{X}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \text{fit } \mathfrak{X}$, и значит, $\text{fit } \mathfrak{X} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Решетка всех классов Фиттинга является алгебраической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой класс Фиттинга является решеточным объединением всех своих однопорожденных подклассов Фиттинга. Покажем, что каждый однопорожденный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \text{fit } G$ является компактным элементом в решетке всех классов Фиттинга.

Пусть

$$\mathfrak{F} = \text{fit } G \subseteq \mathfrak{M} = \text{fit} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Тогда $G \in \text{fit}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. По лемме 2 $G \in k_1 \cdots k_m (\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$, где $k_i \in \{S_n, R\}$, $i = 1, \dots, m$. Индукцией по m покажем, что существует конечное множество $J \subset I$ такое, что

$$G \in k_1 \cdots k_m \left(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j \right).$$

Пусть $m = 1$. Если $G \in S_n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$, то найдется $T \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ такая, что $G \triangleleft T$. Так как $T \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, существует хотя бы один $\mathfrak{F}_j$, $j \in I$, такой, что $T \in F_j$, и значит, $G \in S_n(\mathfrak{F}_j)$. Если $G \in R(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$, то $G = T_1 \cdots T_t$, причем t – конечное число, $T_r \triangleleft G$, $T_r \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $r = 1, \dots, t$. Следовательно, найдутся $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_t$ такие, что $T_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, T_t \in \mathfrak{F}_t$. Значит, $T_r \in \mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_t$ и $G \in R(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_t)$.

Пусть утверждение верно для $m > 1$. Докажем справедливость утверждения для $m + 1$. Тогда $G \in k_1 k_2 \cdots k_{m+1}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = k_1(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{H} = k_2 \cdots k_{m+1}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Если $G \in S_n(\mathfrak{H})$, то $G \triangleleft T \in \mathfrak{H}$. Тогда по индукции существуют $1, \dots, p \in I$ такие, что $T \in k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Следовательно, $G \in S_n k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Если $G \in R(\mathfrak{H})$, то $G = T_1 \cdots T_t$, t – конечное число, $T_r \triangleleft G$, $T_r \in \mathfrak{H}$, $r = 1, \dots, t$. Опять по индукции существуют $r_1, \dots, r_k \in I$ такие, что $T_r \in k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k})$. Объединяя все найденные классы Фиттинга для каждого T_r , образуем класс $k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$, причем очевидно, что

$$k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_{r_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{r_k}) \subseteq k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$$

для всех групп T_r . Таким образом, $T_r \in k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$, $r = 1, \dots, t$, и $G \in R k_2 \cdots k_{m+1}(\mathfrak{F}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{F}_p)$. Утверждение индукции доказано.

Поскольку $G \in k_1 \cdots k_m(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j) \in \text{fit}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$, J – конечное множество из I , то $\text{fit } G \subseteq \text{fit}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$, и значит, $\mathfrak{F}$ – компактный элемент решетки всех классов Фиттинга. Теорема доказана.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп, θ – полная решетка классов Фиттинга. Пересечение всех θ -классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначим через $\theta \text{fit } \mathfrak{X}$. Если все значения ωR -функции принадлежат θ , то функцию будем называть θ -значной, или коротко $\omega R\theta$ -функцией. Символом $\omega R_\varphi \theta$ обозначим множество всех ω -верных классов Фиттинга с направлением φ , обладающих хотя бы одним $\omega\theta$ -спутником. Пересечение всех $\omega R_\varphi \theta$ -классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначим через $\omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, θ – полная решетка классов Фиттинга. Тогда ω -верный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$ с направлением φ , где $\rho_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\omega\theta$ -спутником f таким, что $f(\omega') = \theta \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = \theta \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс групп, φ – такая $\mathbb{P}FR$ -функция, что $\rho_0 \leq \varphi$. Очевидно, что $\mathfrak{G} \in \omega R_\varphi \theta$. Поскольку $\mathfrak{X}$ – класс конечных групп, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{G}$ и, следовательно, $\mathfrak{F} = \omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует и множество L всех $\omega\theta$ -спутников $\mathfrak{F}$ непусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . Тогда по лемме 11 в [6] $\mathfrak{F} = \omega R(f_1, \varphi)$, причем $f_1(p) = \bigcap_{i \in I} f_i(p) \in \theta$ для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ и, значит, $f_1 \in L$. Так как $f_1 \leq f_i$ для любого $f_i \in L$, то f_1 – единственный минимальный $\omega\theta$ -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f – ωR -функция, описанная в заключении леммы. Покажем, что $f = f_1$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{X} \subseteq \omega R(f, \varphi)$. Поскольку по строению f – $\omega\theta$ -спутник, то $\mathfrak{F} = \omega R\theta(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \omega R(f, \varphi)$.

Как и в теореме 12 в [6], учитывая, что f_1 – $\omega\theta$ -спутник, получаем, что

$$f(\omega') = \theta \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\omega'),$$

$f(p) = \theta \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \emptyset \subseteq f_1(p)$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$. Отсюда $f \leq f_1$ и $\omega R(f, \varphi) \subseteq \omega R(f_1, \varphi)$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ и $f \in L$. Так как f_1 — единственный минимальный $\omega\theta$ -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f \leq f_1$ влечет $f = f_1$. Лемма доказана.

Для произвольной совокупности θ -классов Фиттинга $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee^\theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \theta \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — система $\omega R\theta$ -функций. Тогда через $\vee^\theta(f_i \mid i \in I)$ обозначим такую $\omega R\theta$ -функцию, что $\vee^\theta(f_i \mid i \in I)(p) = \vee^\theta(f_i(p) \mid i \in I)$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$. В дальнейшем, если $\theta = \omega R_\varphi^n$, то вместо символов $\vee^\theta(f_i \mid i \in I)$ и $\vee^\theta(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ будем использовать символы $\vee^n(f_i \mid i \in I)$ и $\vee^n(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

ЛЕММА 4. Пусть θ — полная решетка и f_i — минимальный $\omega\theta$ -спутник ω -векрного класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $\rho_0 \leq \varphi$, $i \in I$. Тогда $\vee^\theta(f_i \mid i \in I)$ — минимальный $\omega\theta$ -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^{\omega R_\varphi \theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \vee^\theta(f_i \mid i \in I)$ и m — минимальный $\omega\theta$ -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^{\omega R_\varphi \theta}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Если $p \in \{\omega'\}$, то по лемме 3

$$\begin{aligned} m(\omega') &= \theta \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \theta \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \theta \text{fit}(O^\omega(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right) \\ &= \theta \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega')\right) = f(\omega'). \end{aligned}$$

Если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$, то $m(p) = \emptyset$ и $f_i(p) = \emptyset$ для любого $i \in I$, а значит, $f(p) = \emptyset$.

Аналогичный случай получаем, когда $p \in (\omega \cap \pi(\mathfrak{F})) \setminus \pi(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Тогда существует $j \in I$ такое, что $f_j(p) \neq \emptyset$. Значит, согласно лемме 3 имеет место

$$\begin{aligned} m(p) &= \theta \text{fit}\left(G^{\varphi(p)} \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i\right) = \theta \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} \theta \text{fit}(G^{\varphi(p)} \mid G \in \mathfrak{F}_i)\right) \\ &= \theta \text{fit}\left(\bigcup_{i \in I} f_i(p)\right) = f(p). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(p) = m(p)$ для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$ и, значит, $f = m$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Решетка ωR_φ^n , где $\rho_0 \leq \varphi$, является алгебраической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой n -кратно ω -векрный класс Фиттинга с направлением φ , $\rho_0 \leq \varphi$, является решеточным объединением своих однопорожденных ωR_φ^n -подклассов Фиттинга. Индукцией по n покажем, что каждый однопорожденный ωR_φ^n -класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в ωR_φ^n .

Пусть

$$\mathfrak{F} = \omega R^n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{M} = \omega R^n\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi\right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ – n -кратно ω -веерный класс Фиттинга с тем же направлением φ , $i \in I$.

При $n = 0$ утверждение верно в силу теоремы 1.

Пусть $n > 0$ и однопорожденные ωR_φ^{n-1} -классы Фиттинга являются компактными элементами в ωR_φ^{n-1} . Обозначим через f_i – минимальный ωR_φ^{n-1} -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, m – минимальный ωR_φ^{n-1} -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{M}$, f – минимальный ωR_φ^{n-1} -спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда по следствию 1 и лемме 3

$$f(\omega') = \omega R^{n-1}(O^\omega(G), \varphi), \quad f(p) = \omega R^{n-1}(G^{\varphi(p)}, \varphi) \quad \text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G),$$

$f(p) = \emptyset$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то $f \leq m$. Ввиду леммы 4 $m = \vee^{n-1}(f_i \mid i \in I)$. Значит, найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что

$$O^\omega(G) \in f(\omega') \subseteq f_{i_1}(\omega') \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{i_t}(\omega'),$$

для каждого $p \in \omega \cap \pi(G)$ найдутся такие индексы $j_1, \dots, j_r \in I$, что

$$G^{\varphi(p)} \in f(p) \subseteq f_{j_1}(p) \vee^{n-1} \dots \vee^{n-1} f_{j_r}(p).$$

Тогда, объединяя все эти индексы и обозначая их через $k_1, \dots, k_s$, получаем, что $G \in \mathfrak{F}_{k_1} \vee^n \dots \vee^n \mathfrak{F}_{k_s}$. Поэтому, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{k_1} \vee^n \dots \vee^n \mathfrak{F}_{k_s}$. Следовательно, решетка ωR_φ^n является алгебраической и ее компактными элементами являются однопорожденные ωR_φ^n -классы Фиттинга. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Решетки ωA^n , ωL^n , ωS^n являются алгебраическими.

СЛЕДСТВИЕ 3. Решетки A^n , L^n , S^n являются алгебраическими.

Следуя [9], для произвольной последовательности простых чисел $p_1, \dots, p_n$ и всякой совокупности групп $\mathfrak{X}$ класс групп $\mathfrak{X}^{p_1 \dots p_n}$ определим следующим образом:

- 1) $\mathfrak{X}^{p_1} = (G^{\varphi(p_1)} \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $\mathfrak{X}^{p_1 \dots p_n} = (G^{\varphi(p_n)} \mid G \in \mathfrak{X}^{p_1 \dots p_{n-1}})$.

Последовательность $p_1, \dots, p_n$ называется *подходящей* для $\mathfrak{X}$, если $p_1 \in \pi(\mathfrak{X})$ и $p_i \in (\mathfrak{X}^{p_1 \dots p_{i-1}})$ для любого $i \in \{2, \dots, n\}$. Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ , f^∞ – его минимальный тотально веерный спутник, $p_1, \dots, p_n$ – некоторая подходящая последовательность для $\mathfrak{F}$. Определим $\mathbb{P}R$ -функцию $f^\infty p_1 \dots p_n$ следующим образом:

- 1) $f^\infty p_1 = (f^\infty(p_1))^\infty$ – минимальный тотально веерный спутник класса Фиттинга $f^\infty(p_1)$;
- 2) $f^\infty p_1 \dots p_n = (f^\infty p_1 \dots p_{n-1}(p_n))^\infty$ – минимальный тотально веерный спутник класса Фиттинга $f^\infty p_1 \dots p_{n-1}(p_n)$.

ЛЕММА 5. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга, когда $\pi(\mathfrak{F})$ конечно и $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний тотально локальный спутник f , что $f(p)$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F} = L^\infty R(G)$ и f – минимальный тотально локальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 3 $f(p) = L^\infty R(F^p(G))$ для всех $p \in \pi(G)$ и $f(p) = \emptyset$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G)$. Кроме того, $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(G)$ – конечное множество.

Достаточность. Пусть $\pi(\mathfrak{F}) = \{p_1, \dots, p_t\}$ – конечное множество и $\mathfrak{F} = LR(f)$, где f – такой внутренний тотально локальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, что $f(p_i) = L^\infty R(A_i)$, $i = 1, \dots, t$. Для всякого $i = 1, \dots, t$ рассмотрим регулярное сплетение $B_i = A_i \wr P_i = [K_i]P_i$, где P_i – группа порядка p_i , K_i – база сплетения. Пусть $G = B_1 \times \dots \times B_t$ и $\mathfrak{M} = L^\infty R(G)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Так как $A_i \in f(p_i)$, f – внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, по лемме 4 в [7] $B_i \in f(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} = L^\infty R(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Обозначим через m_0 минимальный тотально локальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{M}$. Поскольку каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта [10], то по следствию 4.1 в [7] $\mathfrak{M}$ обладает единственным максимальным внутренним спутником m таким, что $m(p_i) = m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} = m_0^*(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} = m_0(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} = m^*(p_i)$. Допустим $A_i \notin m(p_i) = m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}$. Так как $m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}$ – класс Локетта, по утверждению 2.1 [8] $K_{1i} = (B_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}}$ – база сплетения $(A_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}} \wr P_i$. Тогда по лемме 18.2 в [8]

$$B_i / (B_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}} = B_i / K_{1i} \cong A_i / (A_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}} \wr P_i$$

и, следовательно, $p_i \in \pi(B_i / (B_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}})$. Так как $B_i \in \mathfrak{M}$, то $F^{p_i}(B_i) \in m(p_i)$ и, значит, $B_i \in m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}\mathfrak{G}_{p_i'}$ и $p_i \notin \pi(B_i / (B_i)_{m(p_i)\mathfrak{N}_{p_i}})$. Противоречие. Следовательно, $A_i \in m(p_i)$, и из леммы 3 в [3] получаем, что $f(p_i) \subseteq m(p_i)$. Следовательно, $f \leq m$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Лемма доказана.

Группу назовем *f-критической*, если она не принадлежит классу Фиттинга, порожденному всеми ее собственными субнормальными подгруппами. Так как единичная группа 1 не содержит собственных подгрупп, то будем считать, что 1 является *f-критической* группой.

ЛЕММА 6. 1) *Непустой класс Фиттинга порождается всеми своими f-критическими группами.*

2) *Всякий класс Фиттинга с конечным множеством всех попарно неизоморфных f-критических групп является однопорожденным.*

3) *Неединичная f-критическая группа комонолитична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_1$ – подкласс Фиттинга в $\mathfrak{F}$, порожденный всеми *f*-критическими группами из $\mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$ и G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_1$. Тогда любая собственная субнормальная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}_1$. Следовательно, и $\text{fit } \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных субнормальных подгрупп группы G . Так как $G \notin \mathfrak{F}_1$, то $G \notin \text{fit } \mathfrak{X}$ и, значит, G является *f-критической* группой. Тогда $G \in \mathfrak{F}_1$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{F}$ порождается своими *f*-критическими группами.

2) Пусть $\mathfrak{X} = \{G_1, \dots, G_n\}$ – множество всех попарно неизоморфных *f*-критических групп класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \text{fit } \mathfrak{X}$. Рассмотрим группу $G \cong G_1 \times \dots \times G_n$ и класс Фиттинга $\mathfrak{F}_1 = \text{fit } G$. Так как $G_1, \dots, G_n \in \mathfrak{F}$, в силу *R*-замкнутости класса Фиттинга получим, что $G \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, в силу *S_n*-замкнутости

класса Фиттинга получим, что $G_i \in \mathfrak{F}_1$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$.

3) Допустим, что f -критическая группа G имеет две различные максимальные нормальные подгруппы M и N . Тогда $G = MN$ и значит, $G \in \text{fit}\{M, N\} \subseteq \text{fit } \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных субнормальных подгрупп группы G . Но это противоречит тому, что G является f -критической. Следовательно, G – комонотическая группа. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть π – некоторое конечное множество простых чисел. Тогда для любого целого натурального n всякий тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{N}_\pi^n$ является однопорожжденным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi^n$ и $\mathfrak{H}$ – произвольный неединичный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$. Доказательство проведем индукцией по n . Пусть $n = 1$ и A – произвольная неединичная f -критическая группа из $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi$, по лемме 6 $A \cong Z_p$ для некоторого $p \in \pi$. Тогда множество всех попарно неизоморфных f -критических групп из $\mathfrak{H}$ конечно в силу конечности множества π . Следовательно, по лемме 6 $\mathfrak{H}$ является однопорожжденным.

Пусть утверждение леммы верно при $n - 1$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi^n = \mathfrak{N}_\pi^{n-1} \mathfrak{N}_\pi$, по теореме 1 в [11] $\mathfrak{F}$ имеет такой спутник f_1 , что $f_1(p) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}(1) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}$ для всех $p \in \pi$. Отметим, что f_1 – внутренний тотально локальный спутник $\mathfrak{F}$. Если f – минимальный тотально локальный спутник $\mathfrak{F}$, h – минимальный тотально локальный спутник $\mathfrak{H}$, то $h(p) \subseteq f(p) \subseteq f_1(p) = \mathfrak{N}_\pi^{n-1}$, $p \in \pi$. По индукции любой тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{N}_\pi^{n-1}$ является однопорожжденным. Значит, $h(p)$ и $f(p)$ являются однопорожжденными для любого $p \in \pi$. Тогда по лемме 5 $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ являются однопорожжденными. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная цепь n -кратно локальных классов Фиттинга. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ n -кратно локален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n . При $n = 0$ утверждение леммы выполнено. Пусть $n \geq 1$ и f_i – минимальный $(n - 1)$ -кратно локальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\{f_i \mid i \in I\}$ – такая цепь спутников, что $f_i \leq f_j$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_i \leq \mathfrak{F}_j$. Пусть $f = \bigcup_{i \in I} f_i$ и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда найдется такое $i \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_i = LR(f_i)$. Следовательно, $F^p(G) \in f_i(p) \subseteq f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Так как по индукции всякое значение спутника f является $(n - 1)$ -кратно локальным классом Фиттинга, то $G \in L^n R(f)$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq L^n R(f)$.

Пусть $G \in L^n R(f)$. Тогда $F^p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. В силу определения спутника f для множества $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_t\}$ можно указать такие $i_1, \dots, i_n \in I$, $n \leq t$, что $F^{p_k}(G) \in f_{i_j}(p_k)$. Пусть $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$, причем для любого $j \in \{1, \dots, n\}$ справедливо $f_{i_j} \leq f_i$. Тогда $F^{p_k}(G) \in f_{i_j}(p_k) \subseteq f_i(p_k)$ для всех $p_k \in \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ и $L^n R(f) \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = L^n R(f)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольная цепь тотально локальных классов Фиттинга. Тогда класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ тотально локален.

ЛЕММА 9. Пусть $p, q, \dots, r$ – различные простые числа. Тогда

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n = \mathfrak{S}_\pi, \quad \text{где } \pi = \{p, q, \dots, r\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n$. Допустим, что $\mathfrak{S}_\pi \not\subseteq \mathfrak{F}$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Значит, существует такое $t \in \mathbb{N}$, что $M \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^t$. Так как G/M — простая абелева s -группа, $s \in \pi$, то $G \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^{t+1}$. Но $(\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^{t+1} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ очевидно. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Класс $\mathfrak{S}_\pi$ при $1 < |\pi| < \infty$ является тотально локальным классом Фиттинга, но не является однопорожденным классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 9 $\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n$, где $\pi = \{p, q, \dots, r\}$. Так как $\mathfrak{N}_p, \mathfrak{N}_q, \dots, \mathfrak{N}_r$ — тотально локальные классы Фиттинга, тотально локальным является и класс Фиттинга $(\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n$ при любом натуральном n как произведение тотально локальных классов Фиттинга. В силу следствия 4 $\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n$ — тотально локальный класс Фиттинга.

Допустим, что $\mathfrak{S}_\pi$ — однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда существует такая $G \in \mathfrak{S}_\pi$, что $\mathfrak{S}_\pi = L^\infty R(G)$. Так как $\mathfrak{S}_\pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^n$, то $G \in (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Следовательно, $L^\infty R(G) \subseteq (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^t$, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq (\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cdots \mathfrak{N}_r)^t$, что невозможно. Поэтому $\mathfrak{S}_\pi$ не является однопорожденным тотально локальным классом Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является локальным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ является верным классом Фиттинга с направлением φ , $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(G)$. Покажем, что $F^p(G) = O^{Z_p, (Z_p)'}(G)$. Так как

$$G/F^p(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{(Z_p)'},$$

то $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \subseteq F^p(G)$. Поскольку

$$G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{(Z_p)'},$$

то

$$G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G)/O_p(G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G)) \in \mathfrak{S}_{(Z_p)'}. \quad (1)$$

Но каждый композиционный $(Z_p)'$ -фактор разрешимой группы является p' -фактором. Таким образом,

$$G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G)/O_p(G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G)) \in \mathfrak{S}_{p'}$$

и, значит,

$$G/O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}.$$

Тогда $F^p(G) \subseteq O^{Z_p, (Z_p)'}(G)$ и $F^p(G) = O^{Z_p, (Z_p)'}(G)$.

Из $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$ следует, что $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \subseteq G^{\varphi(p)} \subseteq F^p(G)$. Тогда $F^p(G) = G^{\varphi(p)}$.

Пусть $\mathfrak{F} = LR(f) = (G \in \mathfrak{S} : F^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G))$. Это, в силу $F^p(G) = G^{\varphi(p)}$ для всех $p \in \pi(G)$, справедливо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{S} : G^{\varphi(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)) = \mathbb{P}R(f, \varphi)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $\mathfrak{H}$ – такой тотально верный класс Фиттинга с направлением φ , $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$, все собственные тотально верные подклассы Фиттинга с направлением φ которого являются однопорожденными. Тогда $\pi = \pi(\mathfrak{H})$ конечно и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала покажем, что $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $T \in \mathfrak{N}_\pi$. Тогда $T \in \mathfrak{N}$, $\pi(T) \subseteq \pi$ и, если f – минимальный тотально верный спутник $\mathfrak{H}$, то по лемме 3 $f(p) \neq \emptyset$ для любого $p \in \pi(T)$. Так как $T \in \mathfrak{N}$, то $T \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$, $p \in \pi(T)$. Значит, $F^p(T) = 1$. Из $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$ следует, что $O^{Z_p, (Z_p)'}(T) \subseteq T^{\varphi(p)} \subseteq F^p(T)$, $p \in \pi(T)$. Тогда $O^{Z_p, (Z_p)'}(T) = T^{\varphi(p)} = F^p(T) = 1$ и $T^{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \pi(T)$. Поэтому $T \in \mathbb{P}R(f, \varphi) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что π является бесконечным и пусть $\tau = \pi \setminus \{p\}$, где $p \in \pi$. Тогда $\mathfrak{N}_\tau \subset \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, с учетом леммы 11 $\mathfrak{N}_\tau$ – собственный тотально верный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{H}$ и, следовательно, является однопорожденным. Но так как π – бесконечное множество простых чисел, то и τ бесконечно по определению. Получаем противоречие. Таким образом, $\pi = \pi(\mathfrak{H})$ конечно.

Пусть $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{S}_\pi$. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{S}_\pi}$, причем G/M – простая неабелева группа. По лемме 11 в [12] $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) = O^{Z_p, (Z_p)'}(M)$ для любого $p \in \pi(G)$. Из лемм 10 и 11 следует, что $\mathfrak{S}_\pi$ является тотально специальным классом Фиттинга. Пусть $p \in \pi(M)$. Поскольку $M \in \mathfrak{S}_\pi$, то $O^{Z_p, (Z_p)'}(M) \in s(p)$, где s – минимальный тотально специальный спутник $\mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \in s(p)$. Пусть $p \notin \pi(M)$. Тогда M является p' -группой и $M \in \mathfrak{S}_{(Z_p)'} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{(Z_p)'}$. Следовательно, $O^{Z_p, (Z_p)'}(M) = 1$ и, значит, $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) = 1 \in s(p)$. Тогда по определению $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $\mathfrak{H}$ – разрешимый тотально локальный класс Фиттинга, h – его максимальный внутренний спутник, $\pi = \pi(\mathfrak{H})$. Тогда если $h(p) = \mathfrak{H}$ для любого $p \in \pi$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 4.1 в [7] $\mathfrak{H}$ обладает единственным максимальным внутренним спутником h и $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \pi$. Из условия $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{H}}$. Так как G разрешима, то $G/M \cong Z_p$ для некоторого $p \in \pi$. Значит, $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Пусть $\mathfrak{H}$ – тотально локальный класс Фиттинга из $\mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \{p, q\}$, h – такой внутренний тотально локальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{H}$, что $h(p)$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{H}$ также однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $h(p)$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга, то $h(p) = L^\infty R(A)$, где A – некоторая разрешимая группа. Пусть $k = l(A)$. Тогда $h(p) \subseteq \mathfrak{N}_\pi^k$. Пусть G – такая группа из $\mathfrak{H}$, что $|\pi(G)| = 2$. Тогда $F^p(G) \in h(p) \subseteq \mathfrak{N}_\pi^k$. Значит, $G \in h(p)\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \subseteq \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}$. Следовательно,

$$G \in \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p (\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi) = \mathfrak{N}_\pi^k \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{N}_\pi^{k+2}.$$

Тогда получаем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\pi^{k+2}$. Значит, по лемме 7 $\mathfrak{H}$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $\mathfrak{H}$ – такой разрешимый неоднопорожденный тотально локальный класс Фиттинга, что $|\pi(\mathfrak{H})| = n$, $n \geq 3$. Тогда в $\mathfrak{H}$ содержится, по крайней мере, один собственный неоднопорожденный тотально локальный подкласс Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{H})$. Допустим, что в $\mathfrak{H}$ все собственные тотально локальные подклассы Фиттинга однопорождены.

Возьмем произвольное множество $\tau \subset \pi$, $|\tau| = n - 1$. Тогда по лемме 10 $\mathfrak{S}_\tau$ является неоднопорожденным тотально локальным классом Фиттинга. По допущению $\mathfrak{S}_\tau \not\subseteq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}_\pi$. Рассмотрим $\mathfrak{S}_\tau \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{S}_\tau \cap \mathfrak{H}$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга, т.е. $\mathfrak{S}_\tau \cap \mathfrak{H} = L^\infty R(A)$. Пусть $k = l(A)$. Тогда $A \in \mathfrak{N}_\tau^k$ и $\mathfrak{S}_\tau \cap \mathfrak{H} = L^\infty R(A) \subseteq \mathfrak{N}_\tau^k$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Если $|\pi(G)| < n$, то $G \in \mathfrak{S}_\tau \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\tau^k$ для некоторого τ . Пусть $|\pi(G)| = n$. Так как $\mathfrak{S}_\pi \neq \mathfrak{H}$, по лемме 13 существует $p \in \pi$ такое, что $h(p) \subset \mathfrak{H}$, где h – максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{H}$. Тогда $h(p)$ однопорожденный, т.е. $h(p) = L^\infty R(B)$. Пусть $b = l(B)$. Тогда $h(p) = L^\infty R(B) \subseteq \mathfrak{N}_\pi^b$. Так как $G \in \mathfrak{H} = LR(h)$, то $F^p(G) \in h(p) \subseteq \mathfrak{N}_\pi^b$. Следовательно,

$$\begin{aligned} G &\in h(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{N}_\pi^b\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{N}_\pi^b\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{N}_\pi^b\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi \\ &= \mathfrak{N}_\pi^b\mathfrak{N}_p(\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_\pi) \subseteq \mathfrak{N}_\pi^{b+1}\mathfrak{S}_\omega, \end{aligned}$$

где $\omega = \pi \setminus \{p\}$. Значит,

$$G \in \mathfrak{N}_\pi^{b+1}\mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\pi^{b+1}\mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{N}_\pi^{b+1}\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\pi^{b+1}(\mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{H}).$$

Так как $|\omega| = n - 1$, по доказанному выше $\mathfrak{S}_\omega \cap \mathfrak{H} = L^\infty R(D) \subseteq \mathfrak{N}_\omega^d$, $d = l(D)$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}_\pi^{b+1}\mathfrak{N}_\omega^d \subseteq \mathfrak{N}_\pi^{b+d+1} = \mathfrak{N}_\pi^t$, где $t = b + d + 1$.

Пусть $m = \max\{k, t\}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}_\pi^m$. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\pi^m$. Тогда по лемме 7 $\mathfrak{H}$ – однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{H}$ – неоднопорожденный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ , $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$. Тогда и только тогда все собственные тотально веерные подклассы Фиттинга с направлением φ из $\mathfrak{H}$ однопорождены, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$ – класс Фиттинга всех конечных разрешимых π -групп, где $|\pi| = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\mathfrak{H}$ – такой тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ , $\rho_1 \leq \varphi \leq \rho_2$, все собственные тотально веерные подклассы Фиттинга с направлением φ которого являются однопорожденными, $\pi = \pi(\mathfrak{H})$. Тогда по лемме 12 π конечно и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Ввиду леммы 11 $\mathfrak{H}$ и все его тотально веерные подклассы Фиттинга с направлением φ являются тотально локальными классами Фиттинга. Тогда по лемме 15 $|\pi| \leq 2$. Если $\pi = 1$, то $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p$ – однопорожденный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ . Значит, $|\pi| = 2$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}_\pi$. Тогда по лемме 13 существует такое простое число $p \in \pi$, что $h(p) \subset \mathfrak{H}$, h – максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{H}$. Так как $h(p)$ – тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ , по условию $h(p)$ является однопорожденным. По лемме 14 $\mathfrak{H}$ также является однопорожденным тотально веерным классом Фиттинга с направлением φ . Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ – произвольный собственный тотально веерный подкласс Фиттинга с направлением φ из $\mathfrak{S}_\pi$, $|\pi| = 2$. В силу леммы 11 $\mathfrak{F}$ и все его тотально веерные подклассы Фиттинга с направлением φ являются тотально локальными классами Фиттинга. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не является однопорожженным. Тогда $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$ и в силу леммы 14 $f^\infty(p)$ – неоднопорожженный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ для любого $p \in \pi$, где f^∞ – минимальный тотально веерный спутник $\mathfrak{F}$. Понятно, что и $\pi(f^\infty(p)) = \pi$. Зафиксируем $p \in \pi$ и возьмем $q \in \pi$: $q \neq p$. Тогда значение на q минимального $\mathbb{P}R_\varphi^\infty$ -спутника $f^\infty p$ класса Фиттинга $f^\infty(p)$ – неоднопорожженный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ и $\pi(f^\infty p(q)) = \pi$. Продолжая этот процесс, через n шагов получим, что $f^\infty pqpq \cdots p(q)$ – неоднопорожженный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ и $\pi(f^\infty pqpq \cdots p(q)) = \pi$, а значит, последовательность $p, q, p, q, \dots, p, q$ длины $2n$ является подходящей для $\mathfrak{F}$.

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}, s_{2n}$ – такая последовательность простых чисел, что $s_i = p$ при нечетном i и $s_i = q$ при четном i . Согласно приведенным выше рассуждениям $f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n})$ – неоднопорожженный тотально веерный класс Фиттинга с направлением φ и $\pi(f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n})) = \pi$. Так как $f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n})$ – значение на s_{2n} минимального $\mathbb{P}R_\varphi^\infty$ -спутника класса Фиттинга $f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-2}(s_{2n-1})$, то

$$f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n}) \mathfrak{N}_{s_{2n}} \subseteq f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-2}(s_{2n-1}).$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-2}(s_{2n-1}) \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} &\subseteq f^\infty s_1 s_2 \cdots (s_{2n-2}), \quad \dots, \\ f^\infty s_1(s_2) \mathfrak{N}_{s_2} &\subseteq f^\infty(s_1), \quad f^\infty(s_1) \mathfrak{N}_{s_1} \subseteq \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n}) \mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} &\subseteq f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-2}(s_{2n-1}) \mathfrak{N}_{s_{2n-1}}, \\ f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n}) \mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} \mathfrak{N}_{s_{2n-2}} &\subseteq f^\infty s_1 s_2 \cdots (s_{2n-2}) \mathfrak{N}_{s_{2n-2}}, \\ &\dots, \\ f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n}) \mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} \cdots \mathfrak{N}_{s_3} \mathfrak{N}_{s_2} &\subseteq f^\infty s_1(s_2) \mathfrak{N}_{s_2}, \\ f^\infty s_1 s_2 \cdots s_{2n-1}(s_{2n}) \mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} \cdots \mathfrak{N}_{s_2} \mathfrak{N}_{s_1} &\subseteq f^\infty(s_1) \mathfrak{N}_{s_1} \subseteq \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Значит, $\mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} \cdots \mathfrak{N}_{s_2} \mathfrak{N}_{s_1} \subseteq \mathfrak{F}$ для любого натурального n . Но

$$\mathfrak{N}_{s_{2n}} \mathfrak{N}_{s_{2n-1}} \cdots \mathfrak{N}_{s_2} \mathfrak{N}_{s_1} = (\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p)^n$$

в силу определения последовательности $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}, s_{2n}$. Следовательно, $(\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p)^n \subseteq \mathfrak{F}$ для любого натурального n . Значит, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p)^n \subseteq \mathfrak{F}$. По лемме 9

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p)^n = \mathfrak{S}_\pi.$$

Следовательно, $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_\pi$. Противоречие. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mathfrak{H}$ – неоднопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда все собственные тотально локальные подклассы Фиттинга из $\mathfrak{H}$ однопорождены, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$ – класс Фиттинга всех конечных разрешимых π -групп, где $|\pi| = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $\mathfrak{H}$ – неоднопорожденный тотально специальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда все собственные тотально специальные подклассы Фиттинга из $\mathfrak{H}$ однопорождены, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}_\pi$ – класс Фиттинга всех конечных разрешимых π -групп, где $|\pi| = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие 5 анонсировано в тезисе [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
- [2] Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.
- [3] Воробьев Н. Н., Скиба А. Н. Дистрибутивность решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга // Препринт № 82. Гомель: ГГУ, 1999.
- [4] Скиба А. Н. О неоднопорожденных S -замкнутых локальных формациях // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.
- [5] Сафонов В. Г. Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 6. С. 727–736.
- [6] Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -верные формации и классы Фиттинга конечных групп // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 43–60.
- [7] Ведерников В. А. О новых типах ω -верных классов Фиттинга конечных групп // Укр. матем. ж. 2002. Т. 54. № 7. С. 897–906.
- [8] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.
- [9] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
- [10] Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т. 43. № 2. С. 161–168.
- [11] Сыромолотова О. В. О произведении кратно ω -локальных классов Фиттинга // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 2. С. 269–276.
- [12] Vedernikov V. A. Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. № 2. P. 217–233.
- [13] Сафонов В. Г. К теории тотально локальных классов Фиттинга // Межд. конф. “Теория кл. групп и др. алг. систем”, посв. 80-летию проф. В. Гашюца. Тез. докл. Гомель, 2000. С. 46–47.