Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О диффеоморфизмах Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 369–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:24:51

УДК 517.9+513.83

О ДИФФЕОМОРФИЗМАХ МОРСА–СМЕЙЛА С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ НА ЗАМКНУТЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев

В статье рассматриваются диффеоморфизмы Морса–Смейла с четырьмя периодическими точками, которые исчерпывают все множество периодических точек. Для $n = 3$ доказывается градиентноподобность, и выделяется класс диффеоморфизмов, необходимо имеющих незамкнутую гетероклиническую кривую. Для $n \geq 4$ в классе диффеоморфизмов с одним седлом коразмерности один строится полный инвариант сопряженности.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Известно, что простейшими со многих точек зрения (нулевая энтропия, конечное множество неблуждающих точек и т.д.) структурно устойчивыми диффеоморфизмами являются диффеоморфизмы Морса–Смейла. Самым простым из них является сохраняющий ориентацию диффеоморфизм замкнутого многообразия с двумя неподвижными точками, одна из которых есть тривиальный репеллер (источник), а другая – тривиальный аттрактор (сток), и других периодических точек нет¹. В этом случае многообразие является сферой, и динамика такого диффеоморфизма проста: все орбиты, отличные от неподвижных точек, движутся от источника к стоку. Любые такие диффеоморфизмы на сфере фиксированной размерности топологически сопряжены.

Элементарные соображения показывают, что на замкнутых ориентируемых двумерных многообразиях не существует диффеоморфизмов Морса–Смейла ровно с тремя периодическими точками. Можно показать, что на ориентируемых замкнутых трехмерных многообразиях также не существует диффеоморфизмов Морса–Смейла, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических точек (см. лемму 2.1). Поэтому естественно рассмотреть (с точки зрения проблемы топологической сопряженности, а также с точки зрения связи между динамическими свойствами и топологией несущего многообразия) диффеоморфизмы Морса–Смейла замкнутого ориентируемого n -мерного многообразия M^n , неблуждающие множества которых состоят в точности из четырех периодических точек.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-000-98.

¹Заметим, что на любом замкнутом многообразии диффеоморфизм Морса–Смейла имеет, по крайней мере, одну источниковую и одну стоковую периодические точки [1].

Для размерности $n = 2$ такие диффеоморфизмы существуют только на двумерной сфере и их топологическая классификация следует из работ [2], [3]. Поэтому в настоящей статье мы рассматриваем ориентируемые многообразия M^n размерности $n \geq 3$. Вначале для $n = 3$ мы доказываем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Любой диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ Морса–Смейла, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех периодических точек, является градиентноподобным.*

Перейдя к некоторой итерации диффеоморфизма Морса–Смейла, можно добиться того, чтобы его неблуждающее множество состояло только из неподвижных точек. Аналогичным образом получается диффеоморфизм, ограничение которого на инвариантное многообразие любой его неподвижной точки сохраняет ориентацию (данного инвариантного многообразия). Класс таких диффеоморфизмов Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками обозначим через $MS(M^n, 4)$. Так как любой диффеоморфизм из $MS(M^n, 4)$ содержит, по крайней мере, один источник и один сток, и не может иметь два источника и два стока одновременно, то множество $MS(M^3, 4)$ можно представить в виде объединения двух подклассов $MS_1(M^3, 4)$, $MS_2(M^3, 4)$, соответствующих следующим наборам неподвижных точек:

- 1) источник, сток и два седла;
- 2) источник, два стока и седло, либо сток, два источника и седло.

Ниже для определенности мы будем считать, что f из подкласса $MS_2(M^3, 4)$ содержит источник, два стока и седло (в противном случае можно перейти к обратному f^{-1}).

Диффеоморфизмы из $MS_2(M^3, 4)$ (на рис. 1(a) указан пример фазового портрета такого диффеоморфизма) могут существовать только на трехмерной сфере $S^3 = M^3$. Диффеоморфизмы из $MS_1(M^3, 4)$ существуют также на линзах, поскольку линзы можно получить склеиванием двух полноторий. Мы показываем, что седла произвольного $f \in MS_1(M^3, 4)$ имеют разные индексы Морса (лемма 2.2). Остается открытым вопрос, имеются ли замкнутые ориентируемые многообразия, отличные от сферы, $S^2 \times S^1$ и линз, допускающие диффеоморфизмы из $MS_1(M^3, 4)$.

Несмотря на градиентноподобность и “малое” количество неподвижных точек, диффеоморфизмы из $MS(M^3, 4)$ могут демонстрировать достаточно сложное вложение инвариантных многообразий седловых периодических точек, что приводит к существованию счетного множества классов топологической сопряженности даже в классе $MS_2(S^3, 4)$. Этот класс $MS_2(S^3, 4)$ рассматривался в [4]–[6]. В этих работах была обнаружена возможность дикого вложения в S^3 одномерных и двумерных сепаратрис седловых неподвижных точек диффеоморфизмов из класса $MS_2(S^3, 4)$, и получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов, которая свелась к классификации узлов в $S^2 \times S^1$. Чтобы понять возникновение дикого вложения сепаратрис седловой неподвижной точки диффеоморфизма $f \in MS_2(S^3, 4)$, обозначим через ω_1, ω_2 стоковые точки и через $W^{u+}(\sigma)$ сепаратрису седловой точки σ , идущую в стоковую точку ω_2 (см. рис. 1(a)). Теперь представим объединение $\alpha \cup W^s(\sigma) \cup W^{u+}(\sigma) \cup \omega_2$ как бесконечную “кривую”, половина которой немного раздута (эта половина соответствует $\alpha \cup W^s(\sigma)$), где $W^s(\sigma)$ – устойчивое многообразие седловой неподвижной точки σ . Затем вложим эту “кривую” вместе с некоторой окрестностью в S^3 как кривую с двумя концами дикости, например, как хорошо известную дику дугу Артина–Фокса [7] (см. рис. 1(b)). Построение соответствующих примеров на трехмерной сфере имеются в [4], [5].

Рис. 1. Диффеоморфизм Морса–Смейла из класса $MS_2(M^3, 4)$.

Так как подкласс $MS_2(M^3, 4)$ расклассифицирован в работах [5], [6], мы более подробно рассматриваем подкласс $MS_1(M^3, 4)$, когда многообразие M^3 накрывается сферой S^3 , и доказываем, что в этом случае блуждающее множество любого диффеоморфизма из $MS_1(M^3, 4)$ содержит хотя бы одну незамкнутую гетероклиническую кривую.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f – диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия, для которого 3-мерная сфера S^3 является универсальным накрытием, и пусть неблуждающее множество f состоит из двух седловых и двух узловых периодических точек. Тогда существует, по крайней мере, одна гетероклиническая незамкнутая кривая, граница которой состоит из седловых точек. Каждая такая гетероклиническая кривая инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f .

Более того, если пересечение двумерных инвариантных многообразий седловых точек не исчерпывается такими гетероклиническими кривыми, то оставшаяся часть пересечения содержит счетное семейство замкнутых гетероклинических кривых, которые представляют собой объединение орбит некоторого конечного набора замкнутых гетероклинических кривых.

На рис. 2 приводится фазовый портрет диффеоморфизма из $MS_1(S^3, 4)$, показывающий как можно реализовать все возможности, описанные в теореме 2. Более того, объединение $\alpha \cup W^s(\sigma_1) \cup W^u(\sigma_2) \cup \omega$ сепаратрис седел и узловых точек можно вложить вместе с некоторой окрестностью в S^3 как кривую с двумя концами дикости (например, как дикуую дугу Артина–Фокса [7]; см. рис. 1(b)) аналогично конструкции в [5]. В результате мы получим градиентноподобный диффеоморфизм Морса–Смейла более сложный, чем в [5], поскольку полный инвариант сопряженности такого диффеоморфизма, помимо “узловой” информации (достаточной для диффеоморфизмов из $MS_2(4)$), должен содержать информацию о структуре множества гетероклинических кривых.

Для размерностей $n \geq 4$ мы основное внимание уделяем подклассу диффеоморфизмов $MS_{n-1}(M^n, 4) \subset MS(M^n, 4)$, неблуждающее множество которых состоит из трех узлов и одного седла коразмерности один. Очевидно, любой диффеоморфизм из $MS_{n-1}(M^n, 4)$ является градиентноподобным. Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ ($n \geq 4$) – диффеоморфизм Морса–Смейла,

Рис. 2. Пример фазового портрета диффеоморфизма из $MS_1(4)$.

неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из трех узловых периодических точек и одного седла σ коразмерности один. Тогда

- 1) многообразие M^n есть n -мерная сфера S^n ;
- 2) неустойчивое многообразие коразмерности один седла σ и один из узлов образуют цилиндрически вложенную $(n-1)$ -мерную сферу, которая ограничивает в S^n n -мерный шар, содержащий ровно один узел;
- 3) одномерные сепаратрисы седла содержат в своем замыкании различные узлы.

Следующая теорема решает проблему топологической классификации диффеоморфизмов из $MS_{n-1}(M^n, 4)$.

ТЕОРЕМА 4. Два диффеоморфизма $f, g \in MS_{n-1}(M^n, 4)$ сопряжены тогда и только тогда, когда их седла σ_f, σ_g имеют одинаковый индекс Морса (либо 1, либо $n-1$).

Эта теорема контрастирует с ситуацией в трехмерном случае, где для фиксированного индекса Морса седла существует счетное множество попарно несопряженных градиентноподобных диффеоморфизмов Морса–Смейла [5]. Простота “многомерного” случая обусловлена леммой 3.1, в которой показывается, что одномерные сепаратрисы седел в силу “многомерности” тривиально заузлены.

Напомним некоторые понятия и факты, касающиеся диффеоморфизмов Морса–Смейла. Хорошим источником являются книга [8], а также обзорные статьи [1], [9] и [10].

Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Для $x \in NW(f)$ обозначим через $W^s(x)$ (соответственно $W^u(x)$) устойчивое (соответственно неустойчивое) многообразие этой точки. Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса–Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа точек, и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек $x, y \in NW(f)$. Диффеоморфизм f Морса–Смейла называется *градиентноподобным*,

если для любых периодических точек $p, q \in NW(f)$ из $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ следует, что $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$.

Точка $x \in M$ трансверсального пересечения инвариантных многообразий $W^s(p)$, $W^u(q)$, где $p, q \in NW(f)$, называется *гетероклинической*, если $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$. Диффеоморфизм Морса–Смейла является градиентноподобным диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда он не имеет гетероклинических точек.

Если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ и $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$, то компоненту связности пересечения $W^u(p) \cap W^s(q)$ назовем *гетероклиническим подмногообразием*. Если размерность многообразия равна 3, то любое гетероклиническое подмногообразие является либо простой замкнутой кривой (гомеоморфной окружности), либо незамкнутой кривой без самопересечений (гомеоморфной открытому интервалу). Мы будем называть такие кривые *гетероклиническими*.

Пусть p – периодическая точка диффеоморфизма Морса–Смейла f . *Индексом Морса* точки p называется топологическая размерность неустойчивого многообразия $W^u(p)$, $u(p) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W^u(p)$. *Индексом Кронекера–Пуанкаре* точки p называется число $\text{ind}(p, f) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{u(p)}$.

Нам понадобятся некоторые понятия из теории узлов и из теории топологических вложений полиэдров и симплексов в многообразие. Напомним, что множество $P \subset M^n$, гомеоморфное стандартному полиэдру евклидова пространства, называется *дику вложенным*, если не существует гомеоморфного отображения M^n на себя, при котором P переходит в прямолинейный полиэдр. В противном случае, P называется *ручным* в M^n [11].

2. Диффеоморфизмы $MS(M^3, 4)$. В этом разделе мы рассматриваем диффеоморфизмы Морса–Смейла замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий M^3 . Сначала покажем, что такие диффеоморфизмы не могут иметь ровно трех периодических точек. Для конечного множества A обозначим через $|A|$ его мощность.

ЛЕММА 2.1. Пусть $f: M^3 \rightarrow M^3$ – диффеоморфизм Морса–Смейла. Тогда $|NW(f)| \neq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если такой диффеоморфизм f существует, то его неблуждающее множество содержит в точности одно седло, один сток и один источник. Следовательно, f не имеет гетероклинических кривых. В силу [12] для диффеоморфизма Морса–Смейла, не имеющего гетероклинических кривых, существует целое неотрицательное число m такое, что имеет место формула $l - k = 2 - 2m$, где l – число всех стоковых и источниковых периодических точек, и k – число всех седловых периодических точек. Поэтому для f должно выполняться равенство $1 = 2 - 2m$, которое невозможно ни при каком целом m .

Опишем набор неподвижных точек для диффеоморфизмов из класса $MS_1(M^3, 4)$.

ЛЕММА 2.2. Если $f \in MS_1(M^3, 4)$, то f имеет следующий набор неподвижных точек: источник α , сток ω и две седловые точки σ_1, σ_2 с индексами Морса $u(\alpha) = 3$, $u(\omega) = 0$, $u(\sigma_1) = 1$, $u(\sigma_2) = 2$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что седла σ_1, σ_2 имеют разный индекс Морса. Предположим противное. Тогда f не имеет гетероклинических кривых. В работе [12] доказано, что в этом случае M^3 есть связная сумма m экземпляров $S^2 \times S^1$. Так

как $f \in MS_1(M^3, 4)$, то $m = 1$ и $M^3 = S^2 \times S^1$. Применим теперь формулу Лефшеца

$$L(f) = \sum_{p \in \text{Fix } f} \text{ind}(p, f),$$

где $L(f)$ – число Лефшеца, которое вычисляется по формуле

$$L(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Sp } f_{i*},$$

$\text{Sp } f_{i*}$ – след линейного отображения $f_{i*}: H_i(M^3, \mathbb{R}) \rightarrow H_i(M^3, \mathbb{R})$ i -мерной группы гомологий $H_i(M^3, \mathbb{R})$, индуцированного f . Для $M^3 = S^2 \times S^1$ и сохраняющего ориентацию f имеем $L(f) = 0$, поскольку

$$H_1(M^3, \mathbb{R}) = H_2(M^3, \mathbb{R}) = \mathbb{Z}, \quad \text{Sp } f_{1*} = \text{Sp } f_{2*} = 1.$$

С другой стороны в силу предположения о равенстве индексов Морса у седел сумма индексов неподвижных точек не может равняться нулю. Полученное противоречие доказывает лемму.

Везде далее в этом разделе для диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^3 \rightarrow M^3$ из класса $MS(M^3, 4)$ будем использовать следующие обозначения его неподвижных точек:

1) если $f \in MS_1(M^3, 4)$, то f имеет источник α , сток ω и два седла σ_1, σ_2 с индексами Кронекера–Пуанкаре (соответственно Морса) $\text{ind}(\alpha, f) = -1$ ($u(\alpha) = 3$), $\text{ind}(\omega, f) = 1$ ($u(\omega) = 0$), $\text{ind}(\sigma_1, f) = -1$ ($u(\sigma_1) = 1$), $\text{ind}(\sigma_2, f) = 1$ ($u(\sigma_2) = 2$);

2) если $f \in MS_2(M^3, 4)$, то f имеет источник α , два стока ω_1, ω_2 и седло σ с индексами Кронекера–Пуанкаре (соответственно Морса) $\text{ind}(\alpha, f) = -1$ ($u(\alpha) = 3$), $\text{ind}(\omega_1, f) = 1$ ($u(\omega_1) = 0$), $\text{ind}(\omega_2, f) = 1$ ($u(\omega_2) = 0$), $\text{ind}(\sigma, f) = -1$ ($u(\sigma) = 1$).

ЛЕММА 2.3. Если $f \in MS_1(M^3, 4)$, то имеют место следующие включения:

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega), \quad W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку f не может иметь гомоклинических точек, то $W^s(\sigma_i) \cap W^u(\sigma_i) = \emptyset$ ($i = 1, 2$). Так как f – структурно устойчивый диффеоморфизм, то $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) = \emptyset$, иначе бы в точках пересечения не выполнялось сильное условие трансверсальности. Отсюда вытекают требуемые включения, так как M^3 разбивается на попарно не пересекающиеся инвариантные многообразия, устойчивые или неустойчивые соответственно.

Следующая лемма доказана в [5]. Мы приводим ее для ссылок, оставляя читателю доказательство в качестве упражнения.

ЛЕММА 2.4. Если $f \in MS_2(M^3, 4)$, то $W^s(\sigma) - \sigma \subset W^u(\alpha)$.

Покажем теперь, что диффеоморфизм $f: M^3 \rightarrow M^3$ Морса–Смейла с четырьмя неподвижными точками не имеет гетероклинических точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как инвариантные множества периодических точек не меняются при переходе к итерации диффеоморфизма, не уменьшая общности, можно считать, что f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, ограничение которого на инвариантные многообразия неподвижных точек также сохраняет ориентацию, т.е. $f \in MS(M^3, 4)$. Возможны два случая: $f \in MS_1(M^3, 4)$ и $f \in MS_2(M^3, 4)$. В случае $f \in MS_1(M^3, 4)$ достаточно рассмотреть пересечения инвариантных многообразий седловых точек σ_1, σ_2 с индексами Морса $u(\sigma_1) = 1$, $u(\sigma_2) = 2$ соответственно. В силу леммы 2.3 $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ и $W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha)$. Следовательно, $W^u(\sigma_1)$ не пересекает $W^s(\sigma_2)$. Если же $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$, то выполняется неравенство $2 = \dim W^s(\sigma_1) > \dim W^u(\sigma_2) = 1$, что означает градиентноподобность.

В случае $f \in MS_2(M^3, 4)$ требуемый результат вытекает из леммы 2.4, поскольку f имеет ровно одну седловую точку.

Далее в этом разделе мы в основном рассматриваем диффеоморфизмы из класса $MS_1(M^3, 4)$, используя предыдущие обозначения для набора неподвижных точек.

ЛЕММА 2.5. Пусть $f \in MS_1(M^3, 4)$. Тогда множества

$$C_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1) \quad \text{и} \quad C_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\} \cup W^s(\sigma_2)$$

являются вложениями окружностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму только для C_ω , поскольку для C_α доказательство аналогичное.

Существует C^1 -иммерсия $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow W^u(\sigma_1)$, где $\varphi(0) = \sigma_1$, являющаяся взаимно однозначным отображением на свой образ. Покажем, что иммерсия φ может быть продолжена до гомеоморфизма

$$\varphi: S^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow W^u(\sigma_1) \cup \{\sigma_1\},$$

если положить $\varphi(\pm\infty) = \omega$. В силу леммы 2.3 $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$. Тогда требуемое утверждение следует из того, что ω -предельное множество любой точки из множества $W^u(\sigma_1) - \sigma_1$ есть точка ω (см. рис. 3). Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Рис. 3. Кривые C_α и C_ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как инвариантные множества периодических точек не меняются при переходе к итерации диффеоморфизма, не уменьшая общности, можно считать, что $f \in MS_1(M^3, 4)$. Сначала докажем, что $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ содержит хотя бы одну незамкнутую гетероклиническую кривую с концевыми точками σ_1, σ_2 . В устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ возьмем фундаментальную область F^s диффеоморфизма $f|_{W^s(\sigma_1) - \sigma_1}$. Так как точка σ_1 гиперболическая, можем считать F^s замкнутым кольцом, ограниченным гладкими кривыми C_1 и C_2 , которые окружают точку σ_1 в $W^s(\sigma_1)$. Возьмем в F^s простую замкнутую кривую C , гомотопную C_1 и C_2 . Для удобства разобьем дальнейшее доказательство на утверждения, которые мы будем обозначать как шаги.

ШАГ 2.1. Для любой замкнутой кривой C , гомотопной кривым C_1 и C_2 , пересечение $C \cap W^u(\sigma_2)$ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.1. Предположим, что $C \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$. Тогда $C \subset W^u(\alpha)$, поскольку $M^3 - \omega$ есть объединение только трех попарно непересекающихся неустойчивых многообразий $W^u(\alpha)$, $W^u(\sigma_2)$ и $W^u(\sigma_1)$. В силу компактности $C_\omega = \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1)$ существует такая окрестность $U(\alpha)$ источника α , что $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$. Из включения $C \subset W^u(\alpha)$ и компактности C следует существование целого отрицательного числа n_0 такого, что $f^{n_0}(C) \subset U(\alpha)$.

Рассмотрим универсальное накрытие $q: S^3 \rightarrow M^3$ и накрывающий диффеоморфизм $\tilde{f}: S^3 \rightarrow S^3$. Пусть $\tilde{C}_\omega$ — компонента множества $q^{-1}(C_\omega)$. Из конечности накрытия q вытекает, что $\tilde{C}_\omega$ является простой замкнутой кривой, содержащей хотя бы одно седло $\tilde{\sigma}_1 \in q^{-1}(\sigma_1)$. В силу $u(\sigma_1) = 1$ $W^s(\sigma_1)$ есть образ $\mathbb{R}^2$ при инъективной иммерсии. Так как кривая $C \subset W^s(\sigma_1) - \sigma_1$ негомотопна нулю в $W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, она ограничивает в $W^s(\sigma_1)$ диск D , содержащий точку σ_1 . Поскольку f не имеет гомоклинических точек, диск D пересекается с C_ω ровно в одной точке σ_1 . Поэтому на $W^s(\tilde{\sigma}_1)$ лежит простая замкнутая кривая $\tilde{C} \subset q^{-1}(C)$, которая ограничивает на $W^s(\tilde{\sigma}_1)$ диск, пересекающийся с семейством замкнутых кривых из множества $q^{-1}(C_\omega)$ ровно в одной точке $\tilde{\sigma}_1$. Следовательно, $\tilde{C}$ и $q^{-1}(C_\omega)$ образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$ (в зависимости от ориентаций кривых). Тогда $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{C})$ и $\tilde{f}^{n_0}(q^{-1}(C_\omega))$ также образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$. Из $f(C_\omega) = C_\omega$ вытекает равенство $\tilde{f}^{n_0}(q^{-1}(C_\omega)) = q^{-1}(C_\omega)$. Поэтому $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{C})$ и $q^{-1}(C_\omega)$ образуют нетривиальное зацепление.

С другой стороны, $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{C}) \subset q^{-1}(U(\alpha))$. Не уменьшая общности, можно считать, что множество $q^{-1}(U(\alpha))$ представляет собой конечное объединение попарно непересекающихся компонент, гомеоморфных $U(\alpha)$, и каждая компонента гомеоморфна трехмерному шару. Следовательно, на замкнутую кривую $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{C})$ можно натянуть поверхность S , полностью лежащую в одной из этих компонент и, следовательно, в $q^{-1}(U(\alpha))$. Так как $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$, отсюда получаем, что S не пересекается с $q^{-1}(C_\omega)$. Следовательно, коэффициент зацепления $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{C})$ и $q^{-1}(C_\omega)$ равен нулю. Мы получили противоречие.

Таким образом, $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$. Так как $W^s(\sigma_1)$ и $W^u(\sigma_2)$ пересекаются трансверсально, то пересечение $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ состоит из кривых. В силу произвольности кривой C , пересечение $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ содержит, по крайней мере, одну дугу d с концевыми точками a_1, a_2 , лежащими на разных граничных компонентах C_1 и C_2 кольца F^s . Для определенности положим $a_i \in C_i$ ($i = 1, 2$). Обозначим через D кривую из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащую дугу d (рис. 4).

Рис. 4. Дуга d в фундаментальном кольце F^s .

ШАГ 2.2. Для компактного (в топологии многообразия $W^s(\sigma_1)$) подмножества $F \subset W^s(\sigma_1)$ и любой точки $m_0 \in \text{int } F$ существует окрестность $U(m_0)$, которая гомеоморфна диску и которая пересекается не более чем с одной кривой из пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$, при этом, если $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l , то пересечение $U(m_0) \cap l$ состоит из одной компоненты, гомеоморфной простой дуге, которая делит $U(m_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.2. Предположим, что любая окрестность $U(m_0)$, гомеоморфная диску, пересекается более чем с одной кривой из $F \cap W^u(\sigma_2)$. Тогда существует последовательность точек $m_k \in F \cap W^u(\sigma_2)$, сходящаяся к точке $m_0 \in \text{int } F$, такая, что m_k лежат на попарно различных компонентах пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$. Отсюда и из трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что точки m_k изолированы в топологии неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Поэтому $m_0 \notin W^u(\sigma_2)$, иначе неустойчивое многообразие $W^u(\sigma_2)$ было бы самопредельным и существовали бы гомоклинические точки. Так как $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$, то либо $m_0 \in W^u(\alpha)$, либо $m_0 \in W^u(\sigma_1)$. Включение $m_0 \in W^u(\alpha)$ невозможно, поскольку неустойчивое многообразие $W^u(\alpha)$ открыто и не может содержать точек накопления неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Включение $m_0 \in W^u(\sigma_1)$ также невозможно, поскольку в силу $m_0 \in \text{int } F^s \subset W^u(\sigma_1)$, оно влечет наличие гомоклинических точек.

Теперь предположим, что $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l , но пересечение $U(m_0) \cap l$ содержит компоненту, гомеоморфную простой дуге, которая не делит $U(m_0)$. Из вышеприведенного рассуждения и трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что предельное множество кривой l в $U(m_0)$ состоит ровно из одной точки. Снова равенство $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$ приводит к противоречию, так как предельная точка не может принадлежать ни $W^u(\alpha)$, ни $W^u(\sigma_1)$. Полученное противоречие завершает доказательство шага 2.2.

ШАГ 2.3. Семейство дуг из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s , конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.3. Предположим противное. Тогда имеется точка $m_0 \in \text{int } F^s$, которая является топологическим пределом попарно различных кривых из $F^s \cap W^u(\sigma_2)$. Это противоречит шагу 2.2.

Обозначим через $d = d_1, \dots, d_k$ занумерованные в циклическом порядке дуги из пере-

сечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных компонентах кольца F^s . Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ — кривые из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащие дуги $d = d_1, \dots, d_k$ соответственно. Отметим, что некоторые из кривых $\mathcal{D}_i$ могут совпадать.

Шаг 2.4. Среди кривых $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ существует, по крайней мере, одна незамкнутая.

Доказательство шага 2.4. Предположим противное. Согласно шагу 2.2 топологический предел кривых из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ содержится в граничных компонентах кольца F^s . Отсюда и из замкнутости кривых $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$ следует, что существует замкнутая кривая, непересекающаяся с кривыми из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ и содержащая на устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ внутри себя точку σ_1 (мы можем “обойти” дуги $d_1, \dots, d_k$ вдоль “полукривых” замкнутых кривых $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_k$, при этом мы также можем “обойти” замкнутые кривые из $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, поскольку последние гомотопны нулю в F^s). Это противоречит шагу 2.1.

Будем для определенности считать, что кривая $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ незамкнута.

Шаг 2.5. Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ пересекает все кольца вида $f^i(F^s)$, по крайней мере, одного из объединений $\bigcup_{i \geq 0} f^i(F^s)$ или $\bigcup_{i \leq 0} f^i(F^s)$.

Доказательство шага 2.5. Достаточно доказать утверждение для кривой $\mathcal{D}$. Предположим противное. Тогда $\mathcal{D}$ лежит строго внутри конечного объединения $\bigcup_{i=i_1}^{i=i_2} f^i(F^s)$. Из незамкнутости $\mathcal{D}$ вытекает, что внутри этого объединения имеется точка m_0 такая, что либо любая ее окрестность $U(m_0)$ содержит счетное множество компонент пересечения $U(m_0) \cap \mathcal{D}$, либо m_0 является единственной предельной точкой одной из полукривых кривой $\mathcal{D}$. Это противоречит шагу 2.2.

Шаг 2.6. Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f .

Доказательство шага 2.6. Достаточно доказать утверждение для $\mathcal{D}$. Будем для определенности считать, что $\mathcal{D}$ пересекает все кольца из объединения $\bigcup_{i \geq 0} f^i(F^s)$. Предположим, что $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i для любого $i \geq 0$. Согласно шагу 2.5 для любого $i \geq 0$ существует дуга A_i кривой $\mathcal{D}$, лежащая в кольце $f^i(F^s)$ и имеющая концевые точки на разных граничных компонентах $f^i(C_1)$ и $f^i(C_2)$ этого кольца. Так как $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i , дуги $f^{-1}(A_i)$ образуют семейство попарно непересекающихся дуг в кольце F^s , концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s . Это противоречит шагу 2.3.

Шаг 2.7. Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ является кривой без самопересечений с концевыми точками σ_1, σ_2 .

Доказательство шага 2.7. Достаточно рассмотреть кривую $\mathcal{D}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathcal{D}$ инвариантна относительно f . Дуга $d \subset \mathcal{D}$ пересекает фундаментальное кольцо F^s в разных окружностях, ограничивающих F^s . Так как $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(F^s) = W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, то утверждение вытекает из шага 2.6.

Шаг 2.8. Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ после добавления концевых точек σ_1 и σ_2 превращается в непрерывный путь, соединяющий точки σ_1, σ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2.8 достаточно провести для $\mathcal{D}$. В силу шага 2.2 в F^s кривая $\mathcal{D}$ не имеет точек накопления. Следовательно, она не имеет точек накопления в любом кольце $f^i(F^s)$. Так как в сколь угодно малой окрестности точки σ_1 лежат все кольца $f^i(F^s)$, начиная с некоторого момента, $\mathcal{D}$ доопределяется в непрерывный путь в точке σ_1 . Аналогично доказывается возможность непрерывного доопределения в σ_2 .

Осталось доказать, что пересечение $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ содержит либо нулевое, либо счетное семейство замкнутых кривых, которые в последнем случае разбиваются в конечное число орбит замкнутых кривых. Действительно, согласно шагу 2.2 внутри фундаментального кольца F^s и в окрестностях граничных кривых кольца F^s нет точек накопления замкнутых кривых из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$. Отсюда вытекает, что F^s пересекает только конечное число замкнутых кривых. Это завершает доказательство теоремы.

Отметим, что кроме S^3 условию теоремы 2 о накрытии трехмерной сферой удовлетворяют трехмерные сферические пространственные формы, включая линзы (кроме многообразия $S^2 \times S^1$, которое традиционно не включается в список линз). Заметим также, что данное условие существенно: легко построить диффеоморфизм из класса $MS_1(S^2 \times S^1, 4)$ без гетероклинических кривых.

3. Диффеоморфизмы $MS(M^n, 4)$ с седлом коразмерности один. Напомним, что $MS_{n-1}(M^n, 4) \subset MS(M^n, 4)$ означает подкласс диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых состоит из трех узлов и одного седла коразмерности один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку утверждение теоремы достаточно доказать для любой итерации f , не уменьшая общности, можно считать, что $f: M^n \rightarrow M^n$ принадлежит $MS(M^n, 4)$, т.е. все периодические точки f неподвижные, и f – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, ограничение которого на инвариантные многообразия неподвижных точек также сохраняет ориентацию. Тогда $f \in MS_{n-1}(M^n, 4)$. Для определенности будем считать, что седло σ имеет $(n-1)$ -мерную устойчивую сепаратрису $W^s(\sigma)$ и две одномерные неустойчивые сепаратрисы $W_1^u(\sigma)$, $W_2^u(\sigma)$.

Так как диффеоморфизмы Морса–Смейла не имеют гомоклинических точек, $W^s(\sigma)$ может пересекаться только с неустойчивыми многообразиями источников. Пересечение $W^s(\sigma)$ с неустойчивым многообразием любого источника открыто в топологии $W^s(\sigma)$. Отсюда и из связности множества $W^s(\sigma) - \sigma$ вытекает, что $W^s(\sigma) - \sigma$ лежит в неустойчивом многообразии ровно одного источника, скажем α . Следовательно, $W^s(\sigma) \cup \alpha \stackrel{\text{def}}{=} S_\sigma^{n-1}$ является вложенной в M^n $(n-1)$ -мерной сферой с единственно возможной точкой дикости α . Однако при $n \geq 4$ согласно [3] S_σ^{n-1} не может иметь изолированную точку дикости. Следовательно, S_σ^{n-1} цилиндрически вложена в M^n . Поэтому найдется замкнутая окрестность K сферы S_σ^{n-1} , гомеоморфная замкнутому шаровому слою, такая, что K не будет содержать остальные два узла β_1 , β_2 . Покажем, что обе точки β_i являются стоками.

Предположим противное. Пусть, например, β_1 – сток, а β_2 – источник. Возьмем в малой окрестности β_2 гладкую $(n-1)$ -мерную сферу S_1 , ограничивающую замкнутый n -мерный шар a_1 , который содержит точку β_2 . Ясно, что все точки из a_1 , кроме β_2 , под действием f будут стремиться к β_1 . Поэтому найдется такое $k > 0$, что $f^k(S_1)$ будет принадлежать малой окрестности U точки β_1 . Сфера $f^k(S_1)$ будет ограничивать в U замкнутый шар a_2 , отличный от шара $f^k(a_1)$. Следовательно, множество $f^k(a_1) \cup a_2$ будет покрывать все многообразие M^n , не пересекаясь с точкой α , что невозможно.

Теперь в малой окрестности точки β_i возьмем $(n-1)$ -мерную гладкую сферу Q_i , ограничивающую n -мерный шар b_i , который содержит β_i и не имеет общих точек с K . Так как обе точки β_i являются стоками, найдется такое число $k < 0$, что $f^k(Q_i) \subset K$. Если предположить, что $f^k(Q_i)$ ограничивает в K замкнутый шар, скажем c_i , то множество $f^k(Q_i) \cup c_i$ совпадало бы с M^n , что невозможно, поскольку не содержит S_σ^{n-1} . Следовательно, $f^k(Q_i)$ не ограничивает в K замкнутых шаров, а сферы $f^k(Q_i)$, S_σ^{n-1} ограничивают в K замкнутый n -мерный шаровой слой K_i . Тогда $d_i = f^k(b_i) \cup K_i$ будет n -мерным замкнутым шаром. Поэтому $M^n = d_1 \cup d_2$ и, следовательно, M^n является n -мерной сферой S^n .

Так как $M^n = S^n$, то S_σ^{n-1} разбивает S^n на два n -мерных шара B_1^n, B_2^n . Ясно, что сепаратрисы $W_1^u(\sigma), W_2^u(\sigma)$ лежат в разных шарах B_1^n, B_2^n . Для определенности положим $W_i^u(\sigma) \subset B_i^n$ ($i = 1, 2$). Отсюда вытекает, что в B_1^n и B_2^n лежат стоки ω_1 и ω_2 соответственно, к которым стремятся сепаратрисы $W_1^u(\sigma)$ и $W_2^u(\sigma)$. Это доказывает теорему.

Для исследования вопроса о сопряженности диффеоморфизмов $MS_{n-1}(S^n, 4) \subset MS(S^n, 4)$ решающей является следующая лемма о тривиальности вложения одномерных сепаратрис градиентноподобного диффеоморфизма многообразия M^n при $n \geq 4$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм Морса–Смейла замкнутого многообразия M^n , $n \geq 4$, и пусть s_0 — седловая периодическая точка диффеоморфизма f такая, что $\dim W^s(s_0) = n-1$ и $\dim W^u(s_0) = 1$. Предположим, что имеется сепаратриса $W_1^u(s_0) \subset W^u(s_0) - s_0$ точки s_0 и периодическая стоковая точка S_1 такие, что $\text{clos } W_1^u(s_0) = s_0 \cup W_1^u(s_0) \cup S_1$. Тогда

- 1) $\text{clos } W_1^u(s_0) = s_0 \cup W^u(s_0) \cup S_1$ является одномерным ручным полиэдром;
- 2) существует гладко вложенная $(n-1)$ -сфера $S^{n-1} \subset W^s(S_1)$, окружающая n -шар $B^n \subset W^s(S_1)$ с точкой S_1 внутри, такая, что $W_1^u(s_0)$ пересекается с S^{n-1} ровно в одной точке, и $f^p(S^{n-1}) \subset \text{int } B^n$, где p — период точки S_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, объединение

$$S_1 \cup W_1^u(s_0) \cup s_0 \stackrel{\text{def}}{=} P_1(s_0)$$

является компактной дугой, гомеоморфной отрезку $[0, 1]$, т.е. одномерным вложенным полиэдром. Покажем, что этот полиэдр ручной. Действительно, так как сепаратриса $W_1^u(s_0)$ является гладко вложенной кривой и, следовательно, не имеет точек дикости, одномерный полиэдр $P(s_0)$ может иметь не более одной точки дикости, S_1 . Но в силу [14] одномерный полиэдр в пространстве размерности $n \geq 4$ либо имеет совершенное (в частности, бесконечное) множество точек дикости, либо является ручным. Следовательно, одномерный полиэдр $P(s_0)$ ручной.

Построим теперь $(n-1)$ -сферу, удовлетворяющую пункту 2). Для простоты предполагаем, что обе точки s_0, S_1 неподвижны относительно f (в противном случае перейдем к некоторой итерации f). Так как S_1 является гиперболической притягивающей точкой, существует гладко вложенная $(n-1)$ -сфера $S_1^{n-1} \subset W^s(S_1)$, окружающая n -шар $B_1^n \subset W^s(S_1)$ с точкой S_1 внутри, такая, что $f(S_1^{n-1}) \subset \text{int } B_1^n$. Пошевелив, если необходимо, сферу S_1^{n-1} , можно добиться того, чтобы S_1^{n-1} трансверсально пересекалась с $W_1^u(s_0)$.

Очевидно, $f(S_1^{n-1}) \subset W^s(S_1)$ и $f^{-1}(S_1^{n-1}) \subset W^s(S_1)$. Так как $W^s(S_1) \cong \mathbb{R}^n$, гладко вложенные $(n-1)$ -сферы $f(S_1^{n-1})$ и $f^{-1}(S_1^{n-1})$ ограничивают в $W^s(S_1)$ замкнутое множество $A_0 = \text{clos } f^{-1}(B_1^n) - \text{int } f(B_1^n)$, гомеоморфное шаровому слою $\Sigma^{n-1} \times [0; 1]$, где Σ^{n-1} – стандартная $(n-1)$ -сфера. Ниже, для краткости, шаровой слой мы иногда будем называть кольцом. Аналогично

$$A_1 = \text{clos } f^{-1}(B_1^n) - \text{int } B_1^n, \quad A_2 = \text{clos } B_1^n - \text{int } f(B_1^n)$$

также гомеоморфны кольцу $\Sigma^{n-1} \times [0; 1]$. Отметим, что каждое из колец A_1, A_2 является *фундаментальным*, т.е. итерации любого кольца образуют область притяжения стока S_1 (кроме точки S_1), и внутри каждого кольца нет различных точек одной орбиты. (Такое кольцо иногда называют *порождающим*.)

В силу инвариантности $W_1^u(s_0)$ относительно f все сферы $S_1^{n-1}, f(S_1^{n-1}), f^{-1}(S_1^{n-1})$ трансверсальны сепаратрисе $W_1^u(s_0)$. Ориентируем $W_1^u(s_0)$ от s_0 к S_1 . Связные компоненты пересечения $A_i \cap W_1^u(s_0)$ ($i = 0, 1, 2$) суть дуги с концевыми точками, содержащимися в одной из сфер $S_1^{n-1}, f(S_1^{n-1}), f^{-1}(S_1^{n-1})$. В силу трансверсальности пересечения, условия 1) и равенства $\text{clos } W_1^u(s_0) = s_0 \cup W_1^u(s_0) \cup S_1$ число дуг конечно. Если концевые точки любой дуги $A_i \cap W_1^u(s_0)$ лежат на разных сферах, то S_1^{n-1} удовлетворяет требованию теоремы, поскольку кольца A_1, A_2 порождающие и, следовательно, каждое из них $W_1^u(s_0)$ пересекает ровно по одной дуге. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что в кольцах A_1, A_2 дуги с концевыми точками на одной сфере существуют. Из геометрических соображений следует, что тогда имеются дуги с обоими концевыми точками на S_1^{n-1} , которые входят и выходят из каждого кольца A_1, A_2 .

Рассмотрим дуги $a_1, \dots, a_{k_1} \subset A_1 \cap W_1^u(s_0)$ и дуги $a_{k_1+1}, \dots, a_{k_2} \subset A_2 \cap W_1^u(s_0)$, все концевые точки которых принадлежат сфере S_1^{n-1} . Положим

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} a_i, \quad D_2 = \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} a_i.$$

Отметим, что в силу трансверсальности дуги, входящие в A_1 (равно как и в A_2), имеют различные концевые точки. Для каждого $1 \leq i \leq k_1$ соединим концевые точки дуги a_i путем $e_i \subset S_1^{n-1}$ без самопересечений так, что пересечение $e_i \cap W_1^u(s_0)$ состоит только из концевых точек e_i . Более того, так как $n \geq 4$, то, не уменьшая общности, можно считать, что e_i попарно не пересекаются (см. рис. 5). Тогда объединение $c_i = a_i \cup e_i$ является простой замкнутой кривой, $i = 1, \dots, k_1$. Так как $n \geq 4$, c_i ограничивает замкнутый полиэдральный диск без самопересечений [15], который мы обозначим через D_i , и, более того, мы можем считать, что D_i пересекает сепаратрису $W_1^u(s_0)$ только по дуге a_i . Снова в силу неравенства $n \geq 4$ и двумерности всех дисков $D_1, \dots, D_{k_1}$ можно их пошевелить, не меняя вблизи кривых c_i , так, чтобы они попарно не пересекались и каждый диск не пересекался с дугами из $D_2 \cup f^{-1}(D_2)$ [15].

Покажем, что можно заменить диск D_1 на полиэдральный диск без самопересечений с той же границей, который по-прежнему не будет пересекаться с остальными дисками $D_2, \dots, D_{k_1}$, с дугами из $D_2 \cup f^{-1}(D_2)$, и который вдобавок будет пересекаться с S_1^{n-1} только по кривой e_1 . Пошевелим D_1 так, чтобы D_1 находился в общем положении относительно сфер $S_1^{n-1}, f(S_1^{n-1})$ и $f^{-1}(S_1^{n-1})$ и не пересекался с $D_2, \dots, D_{k_1}, D_2 \cup f^{-1}(D_2)$. Тогда каждая компонента пересечения

$$\text{int } D_1 \cap (S_1^{n-1} \cup f(S_1^{n-1}) \cup f^{-1}(S_1^{n-1})) \quad (1)$$

Рис. 5. Дуги a_i и e_i .

является либо простой замкнутой кривой, либо открытой дугой (причем в последнем случае концевые точки, возможно совпадающие, принадлежат e_1). Пусть d – простая замкнутая кривая, являющаяся компонентой пересечения (1), которая не содержит внутри себя на диске D_1 других компонент из этого пересечения. Для определенности будем считать, что $d \subset S_1^{n-1}$ (в случае $d \subset f(S_1^{n-1})$ или $d \subset f^{-1}(S_1^{n-1})$ рассуждения полностью аналогичные). Очевидно, сфера S_1^{n-1} разбивает M^n на две компоненты, одна из которых является шаром B_1^n . Обозначим через $b_1 \subset D_1$ диск, ограниченный кривой d , и через K_1, K_2 – компоненты множества $M^n - S_1^{n-1}$ с $b_1 \subset \text{clos } K_1$. Возьмем точку $x_0 \in K_2$, достаточно близкую к S_1^{n-1} , так, чтобы конус k с основанием d и вершиной x_0 лежал в $\text{clos } K_1$. Так как $n \geq 4$, пошевелив k , если необходимо, можно добиться того, чтобы k не пересекался с $D_2, \dots, D_{k_1}, D_2 \cup f^{-1}(D_2)$. Заменим D_1 на диск $(D_1 - b_1) \cup k$. Этот диск продеформируем в K_2 так, чтобы у полученного диска D'_1 не возникло новых пересечений с $S_1^{n-1} \cup f(S_1^{n-1}) \cup f^{-1}(S_1^{n-1})$. Тогда D'_1 имеет на одну кривую меньше пересечений с $S_1^{n-1} \cup f(S_1^{n-1}) \cup f^{-1}(S_1^{n-1})$, чем D_1 . Полностью аналогично “убираются” открытые дуги из пересечений (1). В итоге мы получим требуемый диск (обозначим его снова через D_1), который не пересекается с остальными дисками $D_2, \dots, D_{k_1}, D_2 \cup f^{-1}(D_2)$, и который пересекается с S_1^{n-1} только по кривой e_1 , но не пересекается с $f(S_1^{n-1}) \cup f^{-1}(S_1^{n-1})$.

Поскольку дуга a_1 входит в кольцо A_1 , и во время преобразований граница D_1 не менялась, то полученный диск D_1 лежит в A_1 .

Осуществив аналогичную процедуру с остальными дисками, получим попарно непесекающиеся диски $D_1, \dots, D_{k_1}$ (обозначим их теми же буквами), каждый из которых не пересекается с $D_2 \cup f^{-1}(D_2)$, и при этом D_i пересекается с S_1^{n-1} только по кривой e_i , $1 \leq i \leq k_1$. Более того, D_i пересекает сепаратрису $W_1^u(s_0)$ только по дуге a_i . По построению каждый D_i лежит в A_1 и является ручным полиэдром без самопересечений.

В силу компактности дисков $D_1, \dots, D_{k_1}$ существуют попарно не пересекающиеся окрестности $U(D_1), \dots, U(D_{k_1})$ этих дисков соответственно, каждая из которых является гладко вложенным открытым n -шаром с гладкой границей $\Sigma_i = \partial U(D_i)$, гомеоморфной $(n-1)$ -сфере. Уменьшив, если необходимо, каждую окрестность, будем считать, что

$$U(D_i) \cap (f^{-1}(S_1^{n-1}) \cup f(S_1^{n-1})) = \emptyset, \quad U(D_i) \cap f^{-1}(D_2) = \emptyset, \quad 1 \leq i \leq k_1.$$

Более того, так как D_i является ручным полиэдром без самопересечений, можно также считать, что пересечение $U(D_i) \cap S_1^{n-1}$ состоит из $(n-1)$ -шара $B_i^{n-1} \subset S_1^{n-1}$, который содержит e_i и делит $U(D_i)$ на два открытых n -шара, $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$. Не уменьшая общности, можно считать, что сфера $\Sigma_i = \partial U(D_i)$ пересекает S_1^{n-1} трансверсально. Тогда Σ_i разбивается границей $S_i^{n-2} = \partial B_i^{n-1}$ на два замкнутых $(n-1)$ -шара $D_{1,i}^{n-1} \subset \Sigma_i \cap A_1$ и $D_{2,i}^{n-1} \subset \Sigma_i \cap A_2$. Положим

$$S_*^{n-1} = \left(S_1^{n-1} - \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i^{n-1} \right) \bigcup_{i=1}^{k_1} D_{1,i}^{n-1}.$$

В силу свойств окрестностей $U(D_i)$, S_*^{n-1} является цилиндрически вложенной $(n-1)$ -сферой со следующими свойствами:

- 1) $S_*^{n-1} \subset A_1$, $S_*^{n-1} \cap f^{-1}(S_1^{n-1}) = \emptyset$;
- 2) $S_*^{n-1} \cap (D_1 \cup f^{-1}(D_2)) = \emptyset$.

Так как кольцо A_1 является порождающим, в силу свойства 1)

$$S_*^{n-1} \cap f^{-1}(S_*^{n-1}) = \emptyset, \quad S_*^{n-1} \cap f(S_*^{n-1}) = \emptyset.$$

В силу трансверсальности пересечения сфер Σ_i, S_1^{n-1} и трансверсальности пересечения $W^u(s_0) \cap S_1^{n-1}$ можно сгладить S_*^{n-1} вблизи $\Sigma_i \cap S_1^{n-1}$ так, чтобы полученная гладко вложенная сфера S^{n-1} удовлетворяла следующим условиям:

- а) $S^{n-1} \subset A_1$, $S^{n-1} \cap f^{-1}(S^{n-1}) = \emptyset$;
- б) $S^{n-1} \cap (D_1 \cup f^{-1}(D_2)) = \emptyset$;
- в) пересечение $W^u(s_0) \cap S^{n-1}$ трансверсально.

По построению все окрестности $U(D_i)$ лежат в $W^s(S_1)$. Поэтому $S^{n-1}, f(S^{n-1}), f^{-1}(S^{n-1}) \subset W^s(S_1)$. В силу свойства а) $(n-1)$ -мерные сферы $S^{n-1}, f^{-1}(S^{n-1})$ ограничивают замкнутое n -мерное кольцо $A^n \subset W^s(S_1)$, поскольку $W^s(S_1) \cong \mathbb{R}^n$. Следовательно, A^n является порождающим, т.е.

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(A^n) = W^s(S_1) - S_1, \quad \text{int } f^i(A^n) \cap \text{int } f^l(A^n) = \emptyset, \quad \text{если } i \neq l.$$

Отсюда и из свойства б) вытекает, что нет дуг сепаратрисы $W^s(S_1)$, которые входят в кольцо A^n через одну из сфер S^{n-1} или $f^{-1}(S^{n-1})$ и возвращаются, не выходя из A^n , на ту же сферу. Это влечет, что A^n пересекается с $W^s(S_1)$ ровно по одной дуге, концевые точки которой лежат на разных компонентах границы ∂A^n .

По построению $(n-1)$ -сфера $S^{n-1} \subset M^n$ окружает n -шар B^n с точкой S_1 . Это завершает доказательство леммы.

Теперь докажем теорему 4, которая показывает, что индекс Морса (который принимает только два значения: либо 1, либо $n-1$) седла является полным инвариантом сопряженности диффеоморфизмов из класса $MS_{n-1}(S^n, 4)$. Обозначим через σ_f седло коразмерности один диффеоморфизма $f \in MS_{n-1}(S^n, 4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Очевидно, если $f, g \in MS_{n-1}(S^n, 4)$ сопряжены, то седла σ_f, σ_g имеют одинаковый индекс Морса. Докажем обратное утверждение. Для

определенности будем считать, что индекс Морса седла σ_f, σ_g равен 1 (в противном случае перейдем к обратным диффеоморфизмам). Тогда седло σ_f имеет $(n-1)$ -мерное устойчивое многообразие $W^s(\sigma_f)$ и две одномерные неустойчивые сепаратрисы $W_1^u(\sigma_f), W_2^u(\sigma_f)$. Согласно теореме 3 сепаратрисы $W_1^u(\sigma_f), W_2^u(\sigma_f)$ содержат в своем замыкании различные стоки $\omega_{1,f}$ и $\omega_{2,f}$ соответственно. В силу леммы 3.1 существует гладко вложенная $(n-1)$ -сфера $S_{i,f} \subset W^s(\omega_{i,f})$, окружающая n -шар $B_{i,f} \subset W^s(\omega_{i,f})$ с точкой $\omega_{i,f}$ внутри, такая, что $W_i^u(\sigma_f)$ пересекается с $S_{i,f}$ ровно в одной точке $a_{i,f}$, и $f(S_{i,f}) \subset \text{int } B_{i,f}$, $i = 1, 2$. Тогда $W_i^u(\sigma_f)$ пересекается с $f(S_{i,f})$ также ровно в одной точке $b_{i,f} = f(a_{i,f})$. Так как сферы $S_{i,f}, f(S_{i,f}) \subset \text{int } B_{i,f}$ гладко вложены, они ограничивают замкнутый шаровой слой, который мы обозначим через $A_{i,f}$. Не уменьшая общности, можно считать, что сепаратриса $W_i^u(\sigma_f)$ пересекает $S_{i,f}$ трансверсально. Поэтому $W_i^u(\sigma_f)$ пересекает сферу $f(S_{i,f})$ также трансверсально. Следовательно, существует замкнутое множество $U(b_{1,f}, b_{2,f})$, содержащее дугу $[b_{1,f}, b_{2,f}]^u \subset W^u(\sigma_f)$, со следующими свойствами (внутренность $U(b_{1,f}, b_{2,f})$ можно рассматривать как трубчатую окрестность чуть уменьшенной дуги $[b_{1,f}, b_{2,f}]^u$, см. рис. 6):

- 1) $U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap A_{i,f} \stackrel{\text{def}}{=} d_{i,f}$ является n -шаром, ограниченным $(n-1)$ -мерными шарами $U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap S_{i,f}$, $U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap f(S_{i,f})$ и шаровым кольцом $\partial U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap A_{i,f}$;
- 2) $f(U(b_{1,f}, b_{2,f})) \cap A_{i,f} \subset U(b_{1,f}, b_{2,f})$;
- 3) $U(\sigma_f) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f^j(U(b_{1,f}, b_{2,f})) \cup \omega_{1,f} \cup \omega_{2,f}$ содержит неустойчивое и устойчивое многообразия $W^u(\sigma_f), W^s(\sigma_f)$.

Аналогичные обозначения и объекты введем для диффеоморфизма g .

Рис. 6. Множество $U(b_{1,f}, b_{2,f})$.

Так как седла σ_f, σ_g имеют одинаковый индекс Морса, в силу теоремы Гробмана–Хартмана [8] диффеоморфизмы f и g сопряжены в окрестности седла σ_f, σ_g . Для достаточно “малого” $U(b_{1,f}, b_{2,f})$ можно считать, что f и g сопряжены в $U(b_{1,f}, b_{2,f})$. Отсюда вытекает, что существует гомеоморфизм $h_1: U(\sigma_f) \rightarrow U(\sigma_g)$ такой, что

$$h_1 \circ f|_{U(\sigma_f)} = g \circ h_1|_{U(\sigma_f)}.$$

Более того, в силу трансверсальности пересечений $W^u(\sigma_f) \cap S_{i,f}$, $W^u(\sigma_g) \cap S_{i,g}$ ($i = 1, 2$) и достаточной свободы построения сфер $S_{i,f}, S_{i,g}$ можно построить гомеоморфизм

h_1 таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$h_1(U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap S_{i,f}) = U(b_{1,g}, b_{2,g}) \cap S_{i,g}, \quad i = 1, 2.$$

Дополнения сфер $S_{i,f}$, $f(S_{i,f})$ к $(n-1)$ -мерным шарам $U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap S_{i,f}$, $U(b_{1,f}, b_{2,f}) \cap f(S_{i,f})$ соответственно являются $(n-1)$ -мерными шарами. Продолжим h_1 на $S_{i,f} \cup f(S_{i,f})$ до гомеоморфизма $S_{i,f} \cup f(S_{i,f}) \rightarrow S_{i,g} \cup f(S_{i,g})$, который обозначим той же буквой h_1 , таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$h_1 \circ f|_{S_{i,f}} = g \circ h_1|_{S_{i,g}}.$$

Согласно построению замыкание $\text{clos}(A_{i,f} - d_{i,f})$ является n -шаром, на границе которого задан h_1 . Продолжим h_1 на весь шар $\text{clos}(A_{i,f} - d_{i,f})$ произвольным образом до гомеоморфизма $\text{clos}(A_{i,f} - d_{i,f}) \rightarrow \text{clos}(A_{i,g} - d_{i,g})$, который мы обозначим через h_2 . Поскольку кольца $A_{i,f}$, $i = 1, 2$, являются порождающими для ограничения f на $W^s(\omega_{i,f})$, h_2 естественным образом продолжается до гомеоморфизма

$$h_2: W^s(\omega_{1,f}) \cup W^s(\omega_{2,f}) \rightarrow W^s(\omega_{1,g}) \cup W^s(\omega_{2,g})$$

такого, что

$$h_2(\omega_{i,f}) = \omega_{i,g}, \quad h_2 \circ f|_{W^s(\omega_{1,f}) \cup W^s(\omega_{2,f})} = g \circ h_2|_{W^s(\omega_{1,g}) \cup W^s(\omega_{2,g})}.$$

Так как h_1 и h_2 совпадают на границе шара $d_{i,f}$, они образуют гомеоморфизм h , который продолжается до гомеоморфизма всей сферы S^n , если положить $h(\alpha_f) = \alpha_g$. Нетрудно видеть, что для h выполняется равенство $g \circ h = h \circ f$, что доказывает теорему.

Авторы благодарят Д. В. Аносова и Х. Бонатти за плодотворные обсуждения. Авторы благодарят А. Ю. Жирова, прочитавшего внимательно рукопись и указавшего на ряд неточностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. № 1. P. 741–817.
- [2] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях I (II) // Методы КТДУ / ред. Е. А. Лентович-Андропова. Горький: ГГУ, 1985. С. 22–38; 1987. С. 24–32.

- [3] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференц. и интегральные уравнения / ред. Н. Ф. Отроков. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.
- [4] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.
- [5] Bonatti Ch., Grines V. Z. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // J. of Dyn. and Control Syst. 2000. V. 6. P. 579–602.
- [6] Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е. О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 2. С. 151–155.
- [7] Fox R. H., Artin E. Some wild cells and spheres in three-dimensional space // Ann. of Math. 1948. V. 49. P. 979–990.
- [8] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
- [9] Аносов Д. В. Исходные понятия. Элементарная теория // Современные проблемы математики. Динамические системы-1. Т. 1, 1985. С. 156–178, 178–204.
- [10] Арансон С. Х., Гринес В. З. Каскады на поверхностях // Современные проблемы математики. Динамические системы-9. Т. 66, 1991. С. 148–187.
- [11] Келдыш Л. В. Топологические вложения в евклидово пространство // Тр. МИАН. 1966.
- [12] Bonatti Ch., Grines V. Z., Medvedev V., Pecou E. Three-dimensional manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // Topology and applications. 2002. V. 117. P. 335–344.
- [13] Cantrell J. C. Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n // Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 716–718.
- [14] Cantrell J. C., Edwards C. H. Almost locally polyhedral curves in Euclidean n -space // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 107. № 3. P. 451–457.
- [15] Guenheimer V. Piecewise linear isotopy and embedding of elements and spheres I // Proc. London Math. Soc. 1953. V. 3. P. 29–53.

(В. З. Гринес) Нижегородская государственная
сельскохозяйственная академия;

Поступило
12.09.2001

(Е. В. Жужома) Нижегородский государственный
технический университет;

Исправленный вариант
22.05.2002

(В. С. Медведев) Институт прикладной математики и кибернетики
при Нижегородском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

E-mail:

grines@unn.ac.ru

zhuzhoma@mail.ru

medvedev@unn.ac.ru