Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Р. Хименез, Отображения трансфера для троек многообразий,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 3, 420–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:54:05

УДК 513.83+515.1

ОТОБРАЖЕНИЯ ТРАНСФЕРА ДЛЯ ТРОЕК МНОГООБРАЗИЙ

Ю. В. Муранов, Р. Хименез

Отображение трансфера тесно связано с задачей расщепления гомотопической эквивалентности вдоль подмногообразия и с задачей перестройки пары многообразий. В данной работе описаны соотношения между различными отображениями трансфера для тройки вложенных многообразий.

Библиография: 25 названий.

Введение. Пусть $Y^{n-q} \subset X^n$ — подмногообразие коразмерности q с нормальным расслоением ξ в n -мерном многообразии X . Обозначим через ∂U_ξ границу трубчатой окрестности U_ξ подмногообразия Y в X . Для расслоения $(U_\xi, \partial U_\xi) \xrightarrow{p} Y$ определены отображения трансфера групп Уолла (см. [1]–[4])

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_\xi : L_{n-q}(\pi_1(Y)) &\rightarrow L_n(\pi_1(\partial U_\xi) \rightarrow \pi_1(U_\xi)), \\ \mathrm{tr}'_\xi : L_{n-q}(\pi_1(Y)) &\rightarrow L_n(\pi_1(\partial U_\xi)). \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только $L_*^s = L_*$ -группы, задающие препятствия к перестройке до простой гомотопической эквивалентности (см. [1], [2], [5]).

Отображения трансфера тесно связаны с группами препятствий к расщеплению и с группами препятствий к перестройкам пар многообразий [1, § 11, § 17E], [2, § 7] и дают много дополнительной информации о геометрических свойствах элементов групп препятствий к перестройкам (см. [6]–[12]). Для случая односторонних подмногообразий коразмерности 1 отображения трансфера дают запрещающие инварианты для реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий (см. [6]–[9]). Основным методом построения спектральной последовательности теории перестроек в работе [10] была реализация отображений трансфера и индуцирования на уровне спектров для пар Браудера–Ливси. В работах [13]–[16] реализация отображений трансфера на уровне спектров позволила получить новые точные последовательности для классических групп препятствий в задаче расщепления в коразмерностях 1 и 2.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00993, и фонда CONACyT, грант № 32738-E.

В данной работе описаны соотношения между различными отображениями трансфера, возникающими для тройки вложенных многообразий $Z \subset Y \subset X$, и исследованы связи этих отображений с классическими группами препятствий в теории перестроек.

Для тройки вложенных многообразий мы вводим относительные группы LNS_* естественного отображения

$$\mathrm{tr}^{\mathrm{rel}}: L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \rightarrow L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)),$$

являющегося относительным отображением трансфера в случае пар Браудера–Ливси (X, Y) и (Y, Z) . В предложениях 1 и 2 получены коммутативные диаграммы точных последовательностей, в которые входят группы LNS_* , различные отображения трансфера и классические группы препятствий к перестройкам и расщеплениям.

Отправляясь от L -группы подмногообразия $Z \subset X$ и используя естественные отображения трансфера и индуцирования, мы получаем отображение в относительную группу $L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X))$. С другой стороны, отображение в ту же группу получается, как композиция аналогичного отображения в группу $L_n(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y))$ и отображения относительного трансфера $\mathrm{tr}^{\mathrm{rel}}$. В теореме 1 доказано, что эти два отображения совпадают.

В случае тройки многообразий (X, Y, Z) , когда пары (X, Y) и (Y, Z) являются парами Браудера–Ливси, итерированные трансферы и группы LNS_* рассматривались в работе [12]. В следствии 1 получена диаграмма точных последовательностей, обобщающая аналогичную диаграмму из [12] на случай произвольной тройки вложенных многообразий. Другие результаты настоящей работы о группах LNS_* также применимы для случая пар Браудера–Ливси.

Одним из важнейших вопросов теории перестроек является вопрос о реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий. Подгруппа $C_*(\pi_1(X))$ группы $L_*(\pi_1(X))$, порожденная такими элементами, как правило значительно меньше рассматриваемой группы Уолла (см., например, [9]). В алгебраическую точную последовательность теории перестроек (см. [5], [2] и [1, § 10]) входит отображение

$$\mathbf{A}: H_n(K(\pi, 1); \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow L_n(\pi),$$

образ которого состоит из элементов $C_n(\pi)$ (см. [1, § 10]).

Пусть

$$\sigma^U: [X/\partial X; G/TOP] \rightarrow L_n^U(\pi_1(X))$$

обозначает отображение взятия препятствия к перестройкам в точной последовательности Новикова–Уолла–Сулливана для некоторой декорации U .

Для случая конечных групп $\pi = \pi_1(X)$ с тривиальной ориентацией наиболее полные результаты в вычислении группы $C_n(\pi)$ и отображения σ^U получены в работах [17]–[19].

В работах [18] и [19] рассматривается задача перестройки нормального отображения

$$\mathrm{id} \times \sigma: M \times K^{4k+2} \rightarrow M \times S^{4k+2}$$

до гомотопической эквивалентности, где M – замкнутое ориентированное многообразие размерности n , а $\sigma: K^{4k+2} \rightarrow S^{4k+2}$ – односвязная проблема Кервера. В этом случае получены явные формулы для вычисления препятствия, лежащего в

группе $L_{n+2}^h(\pi_1(M))$, и получен полный список возможных препятствий для задач перестройки указанного вида.

Вот другие результаты вычисления σ^U . Для некоторых случаев декорации U это отображение полностью описано в работе [17]. Пусть ρ – силовская 2-подгруппа группы π и (см. [17])

$$\tilde{Y} = \text{Im}\{SK_1(\mathbb{Z}\rho) \rightarrow SK_1(\mathbb{Z}\pi)\} \subseteq Wh(\mathbb{Z}\pi) = K_1(\mathbb{Z}\pi)/\{\pm\pi^{ab}\}.$$

Отметим, что имеются естественные отображения L -групп

$$L_*(\pi) \rightarrow L_*^{\tilde{Y}}(\pi) \rightarrow L'_*(\pi) \rightarrow L_*^h(\pi),$$

где декорация “штрих” обозначает $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$.

Пусть $(X, \partial X)$ – компактное n -мерное многообразие с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(X)$. Имеет место изоморфизм между множеством классов бордантности $\text{rel } \partial X$ нормальных степени 1 отображений

$$(M, \partial M) \rightarrow (X, \partial X)$$

и множеством гомотопических классов отображений $[X/\partial X, G/TOP]$ (см. [1], [2] и [17]). Для $f: X/\partial X \rightarrow G/TOP$ рассмотрим j -мерную компоненту гомологического класса

$$ARF_j(f) = \{(V_X^2 \cup f^*(k)) \cap [X, \partial X]\}_{(j)} \in H_j(X; \mathbb{Z}/2),$$

где V_X обозначает полный класс Ву нормального расслоения Спивака ν_X , а универсальный класс

$$k = \{k_{4i+2}\} \in H^{4i+2}(G/TOP; \mathbb{Z}/2)$$

определен в работе [20]. Пусть отображение $c: X \rightarrow K(\pi_1(X), 1)$ классифицирует универсальное накрытие над X и

$$s_r: H_{2r+2}(X; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_4(X; \mathbb{Z}/2), \quad r \geq 1,$$

– отображения, которые двойственны итерированным отображениям возведения в квадрат в когомологиях. Отметим, что отображение c индуцирует отображение групп гомологий

$$c_*: H_j(X; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_j(\pi; \mathbb{Z}/2).$$

В работе [17] для любого $j \geq 0$ и для любой инвариантной относительно инволюции подгруппы $U \subseteq Wh(\mathbb{Z}\pi)$ построены универсальные гомоморфизмы

$$k_j^U: H_j(\pi; \mathbb{Z}/2) \rightarrow L_{j+2}^U(\pi)_{(2)}.$$

Для нормального степени 1 отображения, соответствующего f , и декорации U с

$$\tilde{Y} \subseteq U \subseteq Wh(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])$$

в [17, теорема A] получены явные формулы для вычисления $\sigma^U(f) \in L_n^U(\pi_1(X))$.

Согласно [17] препятствие $\sigma^U(f)$, лежащее в $L_n^U(\pi)$, равно

- a) $\text{Index}(f) + k_2^U\{c_*(ARF_2(f))\};$
- b) $k_3^U\{c_*(ARF_3(f))\};$
- c) $ARF(f) + k_4^U\{c_*(\sum_{r \geq 0} s_r(ARF_{2r+2}(f)))\};$
- d) $k_1^U\{c_*(ARF_1(f))\}$

для $n = 0, 1, 2, 3$ соответственно.

Вычисление отображений k_j^U является трудной задачей и в этом направлении получены только отдельные результаты (см., например, [17]).

При наличии в группе $\pi = \pi_1(X)$ подгруппы ρ индекса 2 определено отображение скрученного трансфера

$$i^!t^{-1}: L_*(\pi_1(X)) \rightarrow LN_{*-2}(\rho \rightarrow \pi),$$

где i обозначает вложение $\rho \rightarrow \pi$ и $t \in \pi \setminus i(\rho)$ (см. [2]). Отображение $i^!t^{-1}$ задает инвариант, запрещающий реализацию элементов группы $L_*(\pi_1(X))$ нормальными отображениями замкнутых многообразий [6]. Этот инвариант называется *инвариантом Браудера–Ливси*.

Обозначим через $C_*^p(\pi_1(X))$ образ подгруппы $C_*(\pi_1(X)) \subset L_*(\pi_1(X))$ в проективной L -группе Новикова–Уолла $L_*^p(\pi_1(X))$ при естественном отображении (см. [1], [2] и [8])

$$L_*(\pi_1(X)) \rightarrow L_*^p(\pi_1(X)).$$

В работе [8] построены запрещающие инварианты A и B , дающие полное описание подгрупп $C_*^p(\pi_1(X)) \subset L_*^p(\pi_1(X))$ для случая конечных 2-групп. Инвариант A является инвариантом Браудера–Ливси в проективной L -теории, а инвариант B является вторым инвариантом Браудера–Ливси в проективной L -теории (см. [9] и [21]).

Итерированные инварианты Браудера–Ливси, запрещающие реализацию замкнутыми многообразиями, были определены в работах [21] и [9]. Отметим, что в некоторых группах $L_*(\pi)$ имеются элементы, которые лежат в $L_*(\pi) \setminus C_*(\pi)$ и имеют тривиальные итерированные инварианты Браудера–Ливси (см. [21] и [9]). Это так называемые элементы второго типа [21]. В настоящее время свойства этих элементов не изучены. Интересные результаты в этом направлении получены в работе [22], где выдвинута гипотеза о связи элементов 2-типа в смысле Харпиладзе с задачей вычисления фундаментальной группы пространства псевдоизотопий.

Методы, развитые в работах [7]–[10] и [21], заведомо неприменимы для решения вопроса о реализуемости замкнутыми многообразиями элементов группы $L_*(\pi_1(X))$, лежащих в образе естественного отображения $L_*(1) \rightarrow L_*(\pi_1(X))$. Важность этих методов состоит в том, что они применимы для любых групп и декораций (включая бесконечные группы и случай нетривиальной ориентации) и в некоторых случаях позволяют получить законченные результаты (см. [9]).

В работе [13] были введены группы $LT_{n-q-q'}(X, Y, Z)$ препятствий к перестройкам троек многообразий. В теореме 2 настоящей работы доказано, что группы LT_* дают естественные запрещающие инварианты (аналогичные первым двум инвариантам Браудера–Ливси) для реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий, а в предложении 3 получена коммутативная диаграмма, в которую входят группы LNS_* и LT_* . Необходимо отметить особую роль первых двух инвариантов Браудера–Ливси для приложений к группам Новикова–Уолла L_*^p (см. [8, § 6]). В то же время, как показано в [9], для групп L_*^h информации о значении этих инвариантов недостаточно.

1. Отображения трансфера для троек многообразий. Рассмотрим тройку $Z \subset Y \subset X$ замкнутых многообразий. В наших рассуждениях мы будем пользоваться гладкой терминологией. Результаты применимы также к кусочно-линейным [1, § 11] и

топологическим многообразиям (см. [2, с. 562–563], если мы будем рассматривать локально-плоские подмногообразия с заданной структурой нормального расслоения трубчатой окрестности.

Пусть n – размерность X , q – коразмерность Y в X и q' – коразмерность Z в Y . Определены трубчатые окрестности U_ξ подмногообразия Y в X , U_η подмногообразия Z в Y и U_ν подмногообразия Z в X и соответствующие нормальные расслоения ξ , η и ν . Пусть

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U_\xi) & \rightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_\xi) & \rightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix} \quad (1)$$

– квадрат фундаментальных групп с ориентацией, ассоциированный с парой многообразий (X, Y) (см. [1], [2]). Обозначим аналогичные квадраты для пар (Y, Z) , (X, Z) и $(X \setminus Z, Y \setminus Z)$ через Ψ , Φ и F_Z соответственно.

Композиции отображений трансфера tr_ξ и tr'_ξ с отображениями групп Уолла, индуцированными вложением пар $(U_\xi, \partial U_\xi) \rightarrow (X, X \setminus Y)$, дают естественные отображения p и τ (см. [1, § 11, § 17E] и [2, § 7]), входящие в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) & \longrightarrow & LS_{n-q-1}(F) & \longrightarrow \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ & & LP_{n-q}(F) & & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{\tau} & L_{n-1}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow \end{array}, \quad (2)$$

где группы LS_* являются группами препятствий к расщеплению, а группы LP_* являются группами препятствий к перестройкам пары многообразий.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z)) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow p' & & \downarrow p & & \downarrow \text{tr}^{\text{rel}} & \\ \cdots \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X \setminus Z)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (3)$$

в которой мы отождествляем $X \setminus Y$ с $(X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$ и используем изоморфизм (см. [1, с. 36]) $L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) \cong L_n(S)$, где

$$S = \begin{pmatrix} \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix}.$$

Строки в (3) являются относительными точными последовательностями вложений $Y \setminus Z \rightarrow Y$ и $X \setminus Y \rightarrow X \setminus Z$, а левое вертикальное отображение p' определяется для пары $(Y \setminus Z) \subset (X \setminus Z)$ аналогично отображению p из диаграммы (2).

Аналогично отображению τ из диаграммы (2) для пары $(Y \setminus Z) \subset (X \setminus Z)$ определено отображение τ' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{m+1}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(Y \setminus Z)) & \xrightarrow{\tau'} & L_{n-1}(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & & LP_m(F_Z) & & & L_m(\pi_1(Y)) & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Y)) & \longrightarrow & LP_m(F) & \longrightarrow & L_m(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \longrightarrow
 \end{array},$$

где $m = n - q$. *Диаграмма реализуется на уровне спектров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение пар $(X \setminus Z, Y \setminus Z) \rightarrow (X, Y)$ индуцирует реализуемую на уровне спектров коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 LP_{n-q}(F_Z) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z)) & \xrightarrow{\tau'} & L_{n-1}(\pi_1(X \setminus Y)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\
 LP_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{\tau} & L_{n-1}(\pi_1(X \setminus Y))
 \end{array},$$

где в верхней строке мы воспользовались отождествлением $(X \setminus Y) = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$. Отсюда следует, что на уровне спектров кослой горизонтальных отображений левого квадрата естественно гомотопически эквивалентны. Следовательно, и кослой вертикальных отображений естественно гомотопически эквивалентны. Рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей завершает доказательство.

Так как отображения трансфера и индуцирования реализуются на уровне спектров (см. [23], [1], [2] и [5]), то левый квадрат диаграммы (3) реализуется на уровне спектров. Следовательно, отображение кослоев горизонтальных отображений спектров (см. [24])

$$\mathbf{tr}: \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \longrightarrow \mathbb{L}(S)$$

является реализацией отображения $\mathbf{tr}^{\text{rel}}$ из (3) на уровне спектров.

Определим Ω -спектр $\mathbb{L}NS = \mathbb{L}NS(X, Y, Z)$ как гомотопический кослой отображения

$$\Sigma^{-q'-1} \mathbb{L}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \longrightarrow \Sigma^{-q-q'-1} \mathbb{L}(S),$$

которое получается применением итераций функтора надстройки Σ к отображению $\mathbf{tr}$. Обозначим через $LNS_n = LNS_n(X, Y, Z)$ гомотопические группы $\pi_n(\mathbb{L}NS)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место коммутативные диаграммы*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \cdots \longrightarrow & LS_{n-q}(F_Z) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z)) & \xrightarrow{p'} & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(W)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{p} & L_n(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \cdots \longrightarrow & LNS_k & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \xrightarrow{\mathbf{tr}^{\text{rel}}} & L_n(\pi_1(W) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & LS_{n-q}(F_Z) & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LNS_k & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longrightarrow & LP_{n-q}(F_Z) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \longrightarrow \cdots, \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{tr}^{\text{rel}} & \\
\cdots \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Z)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

где $t = n - q$, $k = n - q - q'$, $W = X \setminus Z$. Строки и столбцы в этих диаграммах являются точными последовательностями. Диаграммы реализуются на уровне спектров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует аналогично предложению 1 из реализации коммутативных диаграмм (2) (см., например, [10]) и (3) на уровне спектров.

ТЕОРЕМА 1. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
L_{n-q-q'}(\pi_1(Z)) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \\
\downarrow & & \downarrow \text{tr}^{\text{rel}} \\
L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) & \xrightarrow{=} & L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X))
\end{array}, \quad (4)$$

в которой отображения задаются следующим образом. Верхнее горизонтальное отображение является композицией отображения трансфера

$$\text{tr}_\eta: L_{n-q-q'}(\pi_1(Z)) \rightarrow L_{n-q}(\pi_1(\partial U_\eta) \rightarrow \pi_1(U_\eta))$$

и отображения

$$L_{n-q}(\pi_1(\partial U_\eta) \rightarrow \pi_1(U_\eta)) \rightarrow L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)),$$

индуцированного вложением пар $(U_\eta, \partial U_\eta) \rightarrow (Y, Y \setminus Z)$. Левое вертикальное отображение является композицией трансфера

$$\text{tr}_\nu: L_{n-q-q'}(\pi_1(Z)) \rightarrow L_{n-1}(\pi_1(\partial U_\nu) \rightarrow \pi_1(U_\nu))$$

и отображения

$$L_{n-1}(\pi_1(\partial U_\nu) \rightarrow \pi_1(U_\nu)) \rightarrow L_{n-1}(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)),$$

индуцированного вложением пар $(U_\nu, \partial U_\nu) \rightarrow (X, X \setminus Z)$. Правое вертикальное отображение является относительным отображением трансфера tr^{rel} из (3). Диаграмма (4) реализуется на уровне спектров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Реализуем элемент $x \in L_{n-q-q'}(\pi_1(Z))$ нормальным отображением $f: (M, \partial M) \rightarrow (K, \partial K)$ многообразий размерности $n - q - q'$ (см. [1]) над многообразием Z . То есть задано отображение $g: K \rightarrow Z$, коммутирующее с гомоморфизмом ориентации, и ограничение на край $f|_{\partial M}: \partial M \rightarrow \partial K$ является простой гомотопической эквивалентностью. Пусть $(\mathcal{E}_\eta^1, \mathcal{S}_\eta^1) \rightarrow M$ обозначает индуцированное расслоение $(gf)^*(U_\eta, \partial U_\eta)$ над многообразием M . Аналогично, пусть $(\mathcal{E}_\eta^2, \mathcal{S}_\eta^2) \rightarrow K$ обозначает индуцированное расслоение $g^*(U_\eta, \partial U_\eta)$ над многообразием K . Обозначим через F естественный морфизм расслоений $(\mathcal{E}_\eta^1, \mathcal{S}_\eta^1) \rightarrow (\mathcal{E}_\eta^2, \mathcal{S}_\eta^2)$, накрывающий отображение f . Определен также морфизм расслоений $G: (\mathcal{E}_\eta^2, \mathcal{S}_\eta^2) \rightarrow (U_\eta, \partial U_\eta)$, накрывающий отображение g . Рассмотрим индуцированное F нормальное отображение триад

$$(\mathcal{E}_\eta^1; \mathcal{S}_\eta^1, \mathcal{E}_\eta^1|_{\partial M}) \rightarrow (\mathcal{E}_\eta^2; \mathcal{S}_\eta^2, \mathcal{E}_\eta^2|_{\partial K}),$$

которое мы также будем обозначать через F . Это отображение посредством G задает объект над $(U_\eta, \partial U_\eta)$, так как ограничение F на $(\mathcal{E}_\eta^1|_{\partial M}, \mathcal{S}_\eta^1|_{\partial M})$ является простой гомотопической эквивалентностью пар

$$(\mathcal{E}_\eta^1|_{\partial M}, \mathcal{S}_\eta^1|_{\partial M}) \rightarrow (\mathcal{E}_\eta^2|_{\partial K}, \mathcal{S}_\eta^2|_{\partial K}).$$

Полученный объект представляет элемент $\text{tr}_\eta(x) \in L_{n-q}(\pi_1(\partial U_\eta)) \rightarrow \pi_1(U_\eta)$ (см. [1, § 11]). Пусть $(V_\xi, \partial V_\xi) \rightarrow U_\eta$ обозначает ограничение расслоения $(U_\xi, \partial U_\xi) \rightarrow Y$ на трубчатую окрестность U_η подмногообразия $Z \subset Y$. Пусть $(\mathcal{E}_\xi^1, \mathcal{S}_\xi^1) \rightarrow \mathcal{E}_\eta^1$ обозначает индуцированное расслоение $(GF)^*(V_\xi, \partial V_\xi)$ над многообразием $\mathcal{E}_\eta^1$. Аналогично, пусть $(\mathcal{E}_\xi^2, \mathcal{S}_\xi^2) \rightarrow \mathcal{E}_\eta^2$ обозначает индуцированное расслоение $G^*(V_\xi, \partial V_\xi)$ над многообразием $\mathcal{E}_\eta^2$. Обозначим через $\mathcal{F}$ естественный морфизм расслоений $(\mathcal{E}_\xi^1, \mathcal{S}_\xi^1) \rightarrow (\mathcal{E}_\xi^2, \mathcal{S}_\xi^2)$, накрывающий отображение F . Определен также морфизм расслоений $\mathcal{G}: (\mathcal{E}_\xi^2, \mathcal{S}_\xi^2) \rightarrow (V_\xi, \partial V_\xi)$, накрывающий отображение G . Рассмотрим индуцированное $\mathcal{F}$ нормальное отображение n -ад ($n = 4$)

$$(\mathcal{E}_\xi^1; \mathcal{S}_\xi^1, \mathcal{E}_\xi^1|_{\mathcal{S}_\eta^1}, \mathcal{E}_\xi^1|_{\partial M}) \rightarrow (\mathcal{E}_\xi^2; \mathcal{S}_\xi^2, \mathcal{E}_\xi^2|_{\mathcal{S}_\eta^2}, \mathcal{E}_\xi^2|_{\partial K}),$$

которое мы также будем обозначать через $\mathcal{F}$. Ограничение $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}_\xi^1|_{\partial M}$ задает простую гомотопическую эквивалентность триад

$$(\mathcal{E}_\xi^1|_{\partial M}; \mathcal{S}_\xi^1|_{\partial M}, \mathcal{E}_\xi^1|_{\mathcal{S}_\eta^1|_{\partial M}}) \rightarrow (\mathcal{E}_\xi^2|_{\partial K}; \mathcal{S}_\xi^2|_{\partial K}, \mathcal{E}_\xi^2|_{\mathcal{S}_\eta^2|_{\partial K}})$$

и посредством отображения $\mathcal{G}$ задает объект над триадой $(V_\xi; \partial V_\xi, V_\xi|_{\partial U_\eta})$. По определению [1, § 11] полученный объект представляет элемент

$$\text{tr}_\xi(\text{tr}_\eta(x)) \in L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial V_\xi|_{\partial U_\eta}) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi|_{\partial U_\eta}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial V_\xi) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi) \end{array} \right),$$

где tr_ξ — отображение трансфера. Пространство V_ξ расслоения ξ является пространством расслоения над Z , которое естественно отождествляется с пространством U_ν расслоения ν . Тогда граница ∂U_ν задается объединением $V_\xi|_{\partial U_\eta} \cup \partial V_\xi$. Пусть $(\mathcal{E}_\nu^1, \mathcal{S}_\nu^1) \rightarrow M$

обозначает индуцированное расслоение $(gf)^*(U_\nu, \partial U_\nu)$ над многообразием M . Аналогично, пусть $(\mathcal{E}_\nu^2, \mathcal{S}_\nu^2) \rightarrow K$ обозначает индуцированное расслоение $g^*(U_\nu, \partial U_\nu)$ над многообразием K . Отождествление пространств V_ξ и U_ν позволяет отождествить пространства соответствующих индуцированных расслоений. Следовательно, отображение $\mathcal{F}$ задает отображение пар $(\mathcal{E}_\nu^1, \mathcal{S}_\nu^1) \rightarrow (\mathcal{E}_\nu^2, \mathcal{S}_\nu^2)$. Ограничение отображения $\mathcal{F}$ на $\mathcal{E}_\nu^1|_{\partial M}$ является простой гомотопической эквивалентностью, так как $\mathcal{E}_\nu^1|_{\partial M}$ отождествляется с $\mathcal{E}_\xi^1|_{\partial M}$. Пространство $\mathcal{S}_\nu^1|_{\partial M}$ задается объединением двух пространств $\mathcal{E}_\xi^1|_{\mathcal{S}_\eta^1|_{\partial M}} \cup \mathcal{S}_\xi^1|_{\mathcal{E}_\eta^1|_{\partial M}}$, пересекающихся по общей границе $\mathcal{S}_\xi^1|_{\mathcal{S}_\eta^1|_{\partial M}}$. Ограничение $\mathcal{F}$ на каждое из этих пространств и на их пересечение является простой гомотопической эквивалентностью. Но тогда согласно [25, теорема 23.1] ограничение отображения $\mathcal{F}$ на $\mathcal{S}_\nu^1|_{\partial M}$ также будет простой гомотопической эквивалентностью. Таким образом, отображение $\mathcal{F}$ задает нормальное отображение триад

$$(\mathcal{E}_\nu^1, \mathcal{S}_\nu^1, \mathcal{E}_\nu^1|_{\partial M}) \rightarrow (\mathcal{E}_\nu^2, \mathcal{S}_\nu^2, \mathcal{E}_\nu^2|_{\partial K}),$$

которое является объектом над $(U_\nu, \partial U_\nu)$. По построению полученный объект представляет элемент $\text{tr}_\nu(x) \in L_n(\pi_1(\partial U_\nu) \rightarrow \pi_1(U_\nu))$. Естественные вложения $\partial V_\xi|_{\partial U_\eta} \rightarrow V_\xi|_{\partial U_\eta} \rightarrow \partial U_\nu$ и $\partial V_\xi \rightarrow \partial U_\nu$ индуцируют отображение

$$J: L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial V_\xi|_{\partial U_\eta}) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi|_{\partial U_\eta}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial V_\xi) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi) \end{array} \right) \rightarrow L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(\partial U_\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(U_\nu) \end{array} \right).$$

При этом элемент $J \text{tr}_\xi \text{tr}_\eta(x)$ задается отображением $\mathcal{F}$, рассматриваемым как объект над триадой $(U_\nu; \partial U_\nu, \partial U_\nu)$. Мы получили коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_{n-q-q'}(\pi_1(Z)) & \xrightarrow{\text{tr}_\eta} & L_{n-q}(\pi_1(\partial U_\eta) \rightarrow \pi_1(U_\eta)) \\ \downarrow \text{tr}_\nu & & \downarrow \text{tr}_\xi \\ L_n(\pi_1(\partial U_\nu) \rightarrow \pi_1(U_\nu)) & & L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial V_\xi|_{\partial U_\eta}) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi|_{\partial U_\eta}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial V_\xi) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi) \end{array} \right) \\ \downarrow = & & \downarrow J \\ L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(\partial U_\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(U_\nu) \end{array} \right) & \xRightarrow{\quad} & L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(\partial U_\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(U_\nu) \end{array} \right) \end{array}$$

Теперь для доказательства коммутативности диаграммы (4) достаточно воспользоваться коммутированием трансфера с естественными отображениями L -групп, индуцированными отображениями топологических пространств. Рассмотрим следующую ком-

мутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 L_{n-q}(\pi_1(\partial U_\eta \rightarrow \pi_1(U_\eta))) & \longrightarrow & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \\
 \downarrow \text{tr}_\xi & & \downarrow \text{tr}_\xi \\
 L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial V_\xi | \partial U_\eta) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi | \partial U_\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial V_\xi) & \rightarrow & \pi_1(V_\xi) \end{array} \right) & \longrightarrow & L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U_\xi | Y \setminus Z) & \rightarrow & \pi_1(U_\xi | Y \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial U_\xi) & \rightarrow & \pi_1(U_\xi) \end{array} \right) \\
 \downarrow J & & \downarrow \\
 L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(\partial U_\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial U_\nu) & \rightarrow & \pi_1(U_\nu) \end{array} \right) & & L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X) \end{array} \right) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(X \setminus Z) & \rightarrow & \pi_1(X \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \setminus Z) & \rightarrow & \pi_1(X) \end{array} \right) & \longleftarrow & L_n \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X \setminus Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \setminus Y) & \rightarrow & \pi_1(X) \end{array} \right)
 \end{array} .$$

Реализация диаграммы (4) на уровне спектров следует из реализации на уровне спектров отображений трансфера и индуцирования, участвующих в доказательстве.

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & LNS_k & \longrightarrow & LS_{k-1}(\Psi) & \longrightarrow & L_{k-1}(\pi_1(Z)) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & L_{n-q}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & & LS_{k-1}(\Phi) & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 \longrightarrow & L_k(\pi_1(Z)) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & LNS_{k-1} & \longrightarrow
 \end{array} , \quad (5)$$

в которой $k = n - q - q'$. Диаграмма (5) реализуется на уровне спектров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}(\pi_1(Z)) & \longrightarrow & \Sigma^q \mathbb{L}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'+1} \mathbb{L}S(\Psi) \\
 \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\
 \Sigma^{q+q'} \mathbb{L}(\pi_1(Z)) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Z) \rightarrow \pi_1(X)) & \longrightarrow & \Sigma^{q+q'+1} \mathbb{L}S(\Phi)
 \end{array} ,$$

в которой левый квадрат следует из коммутативной диаграммы (4), реализованной на уровне спектров. Правые спектры являются гомотопическими кослоями соответствующих горизонтальных отображений и, следовательно [11], определено правое вертикальное отображение. Правый квадрат является универсальным, и рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей завершает доказательство.

В частном случае пар Браудера–Ливси коммутативная диаграмма (5) была получена в работе [12].

Пусть $(f, b) \in [X, G/TOP] = H_n(X, L_\bullet)$ – топологическое нормальное отображение с $f: M \rightarrow X$ (см. [2, с. 36]). В работе [13] определены группы препятствий к перестройкам $LT_*(X, Y, Z)$ тройки вложенных многообразий и отображение

$$\Theta_*(f, b): [X, G/TOP] \rightarrow LT_k(X, Y, Z)$$

так, что нормальное отображение (f, b) нормально кобордантно s -триангуляции тройки многообразий (X, Y, Z) тогда и только тогда, когда $\Theta_*(f, b) = 0$ (для $k = n - q - q' \geq 5$). В случае пар Браудера–Ливси Ω -спектр $LT(X, Y, Z)$ совпадает с третьим членом фильтрации спектральной последовательности теории перестроек из работы [10] (см. [13]).

Отображение взятия препятствия к перестройке $\sigma: [X, G/TOP] \rightarrow L_n(\pi_1(X))$ разлагается в композицию отображений из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} [X, G/TOP] & \longrightarrow & LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) \\ & & \downarrow & \searrow r & \downarrow \\ & & LP_{n-q-q'}(\Phi) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) \end{array}, \quad (6)$$

в которой все отображения правого квадрата – естественные забывающие отображения. Заметим, что отсюда следует, что образ отображения σ лежит в образе забывающего отображения $r: LT_{n-q-q'}(X, Y, Z) \rightarrow L_n(\pi_1(X))$.

Пусть пары многообразий (X, Y) и (Y, Z) являются парами Браудера–Ливси. Обозначим через $C_n(\pi) \subset L_n(\pi)$ подгруппу, порожденную элементами, которые реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий. Имеется естественное отображение $\overline{L}_*(\pi) \rightarrow L_*^p(\pi)$ групп препятствий к перестройкам в проективные L -группы. Пусть $\overline{C}_n(\pi)$ обозначает образ подгруппы $C_n(\pi)$ при этом отображении. В работе [8] для описания $\overline{C}_n(\pi)$ построены два инварианта A и B , называемые первым и вторым инвариантами Браудера–Ливси. Общее определение итерированных инвариантов Браудера–Ливси дано Харшиладзе (см., например, [9]). При этом инвариант B определен на ядре отображения скрученного трансфера

$$A: L_n(\pi_1(X)) \rightarrow LS_{n-2}(F) = LN_{n-2}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)).$$

Если $A(x) \neq 0$ или $B(x) \neq 0$ для $x \in L_n(\pi_1(X))$, то из геометрической конструкции (см. [8], [9]) этих отображений следует, что элемент x не лежит в группе $C_n(\pi)$. Для конечных 2-групп этих инвариантов достаточно для описания элементов, не лежащих в группе $\overline{C}_n(\pi)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пары (X, Y) и (Y, Z) являются парами Браудера–Ливси. Тогда элемент $x \in L_n(\pi_1(X))$ тогда и только тогда лежит в образе отображения

$$r: LT_{n-2}(X, Y, Z) \rightarrow L_n(\pi_1(X)),$$

когда его первый и второй инварианты Браудера–Ливси тривиальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае $q = q' = 1$, $LS_*(F) = LN_*(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))$ и $LS_*(\Psi) = LN_*(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y))$. Группы LT_* входят в следующую коммутативную диаграмму точных последовательностей [13]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_n(C) & \longrightarrow & LP_{n-1}(F) & \xrightarrow{B'} & LS_{n-3}(\Psi) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow h & & \nearrow & \\
 & & LT_{n-2}(X, Y, Z) & & L_{n-1}(\pi_1(Y)) & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 \longrightarrow & LS_{n-2}(\Psi) & \longrightarrow & LP_{n-2}(\Psi) & \longrightarrow & L_{n-1}(C) & \longrightarrow
 \end{array}, \quad (7)$$

где $C = \pi_1(X \setminus Y)$. Рассмотрим точную последовательность

$$\cdots \rightarrow LS_{n-1}(F) \xrightarrow{q} LP_{n-1}(F) \xrightarrow{s} L_n(\pi_1(X)) \xrightarrow{A} LS_{n-2}(F) \rightarrow \cdots \quad (8)$$

из коммутативной диаграммы (2). Из точности (8) следует, что $A(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = s(y)$ для некоторого элемента $y \in LP_{n-1}(F)$. Обозначим через d композицию

$$LS_{n-1}(F) \rightarrow L_{n-1}(\pi_1(Y)) \rightarrow LS_{n-3}(\Psi),$$

в которой первое отображение входит в диаграмму (2), а второе отображение входит в диаграмму (7). Если $A(x) = 0$, то (см. [8]) второй инвариант Браудера–Ливси задается отображением

$$B: LP_{n-1}(F) \rightarrow LS_{n-3}(\Psi)/\{\text{Im } d\},$$

которое индуцировано отображением B' из коммутативной диаграммы (7).

Пусть $x = r(z)$, где $z \in LT_{n-2}(X, Y, Z)$. Из (6) следует разложение r в композицию

$$LT_{n-2}(F) \xrightarrow{h} LP_{n-1}(F) \xrightarrow{s} L_n(\pi_1(X)).$$

Отсюда получаем, что $x \in \text{Im } s$ и $A(x) = 0$. Пусть $y \in LP_{n-1}(F)$ — произвольный представитель факторгруппы $LP_{n-1}(F)/\{\text{Im } q\}$, для которого $s(y) = x$. Так как

$$r(z) = s(h(z)) = x,$$

то $s(y - h(z)) = 0$. Из точной последовательности (8) следует, что

$$y - h(z) = q(m), \quad m \in LS_{n-1}(F).$$

То есть $y = q(m) + h(z)$ и

$$B'(y) = B'q(m) + B'h(z) = B'q(m) = d(m), \quad (9)$$

так как $B'h = 0$. Последнее равенство в (9) следует из коммутативных диаграмм (2) и (7). Поскольку это выполняется для любого элемента y с $s(y) = x$, то по определению инварианта B

$$B(x) = 0 \in LS_{n-3}(\Psi)/\{\text{Im } d\}.$$

Предположим теперь, что для некоторого элемента $x \in L_n(\pi_1(X))$ первый и второй инварианты Браудера–Ливси тривиальны. Следовательно, существует $y \in LP_{n-1}(F)$, для которого $s(y) = x$ и $B'(y) \in \text{Im } d$. То есть

$$B'(y) = d(t) = B'q(t), \quad t \in LS_{n-1}(F), \quad B'(y - q(t)) = 0.$$

Из (7) следует, что $y - q(t) = h(z)$. Теперь

$$r(h) = sh(z) = s(y) - sq(t) = s(y) = x,$$

так как $r = sh$ и $sq = 0$. Мы получили, что $x \in \text{Im } r$.

В заключение отметим, что коммутативный квадрат групп из диаграммы (6) входит в коммутативную диаграмму, содержащую относительные группы LNS_* .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеет место коммутативная диаграмма точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & \longrightarrow & LS_{n-q}(F_Z) & \longrightarrow & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LNS_k \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & LT_k(X, Y, Z) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \longrightarrow & LS_{k-1}(\Psi) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & LP_k(\Phi) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) & \longrightarrow & LS_{k-1}(\Phi) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array},$$

в которой $k = n - q - q'$. Строки и столбцы диаграммы являются точными последовательностями. Диаграмма реализуется на уровне спектров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2 следует гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}S(F) & \longrightarrow & \Sigma^{q'} \mathbb{L}NS \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \end{array}.$$

Отображение спектров $L(\pi_1(Y \setminus Z) \rightarrow \pi_1(Y)) \rightarrow \Sigma^{q'+1} \mathbb{L}S(\Psi)$ дает гомотопически коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}S(F) & \longrightarrow & \Sigma^{q'} \mathbb{L}NS \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}P(F) & \longrightarrow & \Sigma^{q'+1} \mathbb{L}S(\Psi) \end{array}.$$

Рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей завершает доказательство.

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательное прочтение рукописи и полезные исправления и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wall C. T. C. *Surgery on Compact Manifolds* (2nd edition). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1999.
- [2] Ranicki A. A. *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery*. Math. Notes. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981.
- [3] Lük W., Ranicki A. A. Surgery obstructions of fibre bundles // *J. Pure Appl. Algebra*. 1992. V. 81. P. 139–189.
- [4] Lük W., Ranicki A. A. Surgery transfer // *Lecture Notes in Math.* 1988. V. 1361. P. 167–246.
- [5] Ranicki A. A. The total surgery obstruction // *Lecture Notes in Math.* 1979. V. 763. P. 275–316.
- [6] Browder W., Livesay G. R. Fixed point free involutions on homotopy spheres // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. V. 73. P. 242–245.
- [7] Cappell S. E., Shaneson J. L. Pseudo-free actions // *Lecture Notes in Math.* 1979. V. 763. P. 395–447.
- [8] Hambleton I. Projective surgery obstructions on closed manifolds // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 967. P. 101–131.
- [9] Харшиладзе А. Ф. Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами // *УМН*. 1987. Т. 42. С. 55–85.
- [10] Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф. Спектральная последовательность в теории перестроек // *Матем. сб.* 1992. Т. 183. С. 3–14.
- [11] Муранов Ю. В. Задача расщепления // *Тр. МИАН*. 1996. Т. 212. С. 123–146.
- [12] Hambleton I., Pedersen E. Topological equivalences of linear representations for cyclic groups // *Preprint*. Bonn: MPIM, 1997.
- [13] Муранов Ю. В., Реповш Д., Спаггиари Ф. Перестройка троек многообразий // *Матем. сб.* 2003. Т. 8. С. 139–160.
- [14] Ахметьев П. М., Муранов Ю. В. Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой // *Матем. заметки*. 1996. Т. 60. №2. С. 163–175.
- [15] Муранов Ю. В. Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1995. V. 59. №6. P. 107–132.
- [16] Малевич И., Муранов Ю. В., Реповш Д. Группы препятствий к расщеплению в коразмерности 2 // *Матем. заметки*. 2001. Т. 69. №1. С. 52–73.
- [17] Hambleton I., Milgram R. J., Taylor L., Williams B. Surgery with finite fundamental group // *Proc. London. Math. Soc.* 1988. V. 56. P. 349–379.
- [18] Milgram R. J. Surgery with finite fundamental group. I: The obstructions // *Pacific J. Math.* 1991. V. 151. №1. P. 65–115.
- [19] Milgram R. J. Surgery with finite fundamental group. II: The oozing conjecture // *Pacific J. Math.* 1991. V. 151. №1. P. 117–150.
- [20] Rourke C. P., Sullivan D. On the Kervaire obstruction // *Ann. of Math.* 1971. V. 94. P. 361–388.
- [21] Харшиладзе А. Ф. Итерированные инварианты Браудера–Ливси и узинг проблема // *Матем. заметки*. 1987. Т. 41. №4. С. 557–563.
- [22] Ахметьев П. М. K_2 для простейших целочисленных групповых колец и топологические приложения // *Матем. сб.* 2003. Т. 194. С. 23–30.
- [23] Hambleton I., Ranicki A., Taylor L. Round L -theory // *J. Pure Appl. Algebra*. 1987. V. 47. P. 131–154.
- [24] Switzer R. *Algebraic Topology—Homotopy and Homology*. Grund. Math. Wissen. V. 212. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1975.
- [25] Cohen M. M. *A Course in Simple Homotopy Theory*. New York: Springer-Verlag, 1973.

(Ю. В. Муранов) Витебский филиал Института современных знаний, Беларусь	Поступило
(Р. Хименез) Instituto de Mathematicas,	28.03.2003
UNAM Avenida Universidad S/N, Col. Lomas de Chamilpa Mexico	Исправленный вариант
E-mail: ymuranov@mail.ru, rolando@math.wisc.edu	16.05.2005