Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. П. Норматов, У. А. Розиков, Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 434–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:49:20

УДК 512.544.23+517.98+519.21

ОПИСАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СВОЙСТВ ГРУППОВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕРЕВА КЭЛИ

Э. П. Норматов, У. А. Розиков

Введено естественное обобщение понятия гармонических функций на дереве Кэли. Используя некоторые свойства группового представления дерева Кэли, описано множество периодических (относительно нормальных делителей конечного индекса) гармонических функций.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов. Одним из частных случаев дерева является *дерево Кэли*, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер (дерево Кэли порядка $k \geq 1$).

Известно, что дерево Кэли представляется как группа G_k , являющаяся свободным произведением $k + 1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$ [1], [2]. С помощью группового представления дерева Кэли в работах [3]–[5] изучены модели статистической механики, и для них описаны множества периодических гиббсовских мер, а в работах [6], [7] изучены траектории случайного блуждания в случайной среде на дереве Кэли.

В [2] доказано, что только дерево Кэли представляется как группа свободного произведения конечного числа циклических групп второго порядка. Для остальных деревьев (не имеющих группового представления) приведены их представления в виде некоторого множества конечных последовательностей, построенных по некоторым рекуррентным соотношениям.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению свойств группового представления дерева Кэли. В основном изучаются те свойства группового представления, которые необходимы для описания гармонических функций на дереве Кэли.

Во втором разделе работы приводятся необходимые определения и постановка задачи. В разделе 3 доказываются некоторые свойства группового представления дерева Кэли, и в разделе 4 эти свойства применяются для описания гармонических функций.

2. Определения и постановка задачи. 2.1. *Дерево Кэли.* Пусть $\Gamma^k = (V, L)$ – дерево Кэли порядка $k \geq 1$, где V и L – множества вершин и ребер дерева Γ^k , соответственно.

Если $x, y \in V$ являются концевыми точками некоторого ребра $l \in L$, то x, y называются *ближайшими соседями*, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли вводится по формуле

$$d(x, y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V, \\ \text{где } \langle x_0, x_1 \rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d \rangle \text{ — ближайшие соседи}\}.$$

Последовательность $\pi = \{x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V\}$, реализующая указанный минимум, называется *путем* из x в y .

Пусть G_k — групповое представление дерева Кэли, т.е. G_k является свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, \dots, a_{k+1}$ такими, что $a_i^2 = e$, $i = 1, \dots, k+1$, где $e \in G_k$ — единичный элемент.

Обозначим через $S(x)$ множество “прямых потомков” точки $x \in G_k$, т.е. $S(x) = \{y \in G_k : y \text{ и } x \text{ — ближайшие соседи, } x \text{ лежит на (единственном) пути от } e \text{ к } y\}$.

Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$.

2.2. Гармонические функции. Пусть дана пара (G, S) , где G — граф и S — некоторое подмножество вершин $V(G)$ графа G .

Функция $h: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической* с границей S на G , если

$$h_x = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in S_1(x)} h_y, \quad (1)$$

где $x \in V(G) \setminus S$ и $d(x) \geq 1$ (см. [8]).

Гармонические функции играют важную роль в теории вероятностей, статистической механики и теории электрических сетей.

В настоящей работе мы дадим более общее определение гармонических функций на дереве Кэли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A(x) \subseteq S_1(x)$ и $f: \mathbb{R}^{m+1} \times \Gamma^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) — некоторая известная функция. Функцию $h: x \in G_k \rightarrow h_x \in \mathbb{R}^m$ назовем *гармонической*, если h_x удовлетворяет функциональному уравнению следующего вида:

$$h_x = \sum_{y \in A(x)} f(h_y, x, \theta), \quad (2)$$

где θ — параметр.

Заметим, что функциональное уравнение (1) является частным случаем уравнения (2). Кроме того, во многих задачах современной математики возникают функциональные уравнения (2) (аргумент функции пробегает G_k); так, например,

- для изучения модели Изинга на дереве Кэли (см., например, [3]) уравнение (2) имеет вид

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} \operatorname{arctanh}(\theta h_y), \quad (3)$$

где $h_x \in \mathbb{R}$, $x \in G_k$, θ — параметр;

- для изучения модели Поттса уравнение (2) имеет вид (см., например, [9])

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y; \theta, q), \quad (4)$$

где $F: \mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ ($q \geq 1$) – известная функция, $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$, θ – параметр;
– для изучения случайных блужданий на дереве Кэли уравнение (2) имеет вид (см. [10])

$$h_x = \sum_{y \in S_1(x)} P_y(x) h_y, \quad (5)$$

где $P_y(x) \in [0, 1]$, $x \in G_k$, $y \in S_1(x)$.

Заметим, что если функция f в уравнении (2) нелинейна, то задача отыскания всех решений для (2) совсем не проста. Более того, теория функциональных уравнений с неизвестной функцией, определенных на деревьях, неразвита.

С другой стороны, теория функциональных уравнений мало развита даже в случае, когда неизвестная функция определена на $\mathbb{R}$; известны только решения специальных видов функциональных уравнений (см., например, [11]–[13]).

Таким образом, естественно сначала найти периодические (простые) решения уравнения (2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $H \subset G_k$ – подгруппа группы G_k . Совокупность величин $\{h_x, x \in G_k\}$ называется H -периодической, если $h_x = h_{yx}$ для любых $x \in G_k$ и $y \in H$.

Если H – нормальный делитель конечного индекса, то описание H -периодических решений уравнения (2) сводится к решению системы уравнений с конечным числом неизвестных. Следовательно, возникают следующие задачи.

ЗАДАЧА 1. Существуют ли подгруппы группы G_k (в частном случае, нормальные делители) любого конечного индекса?

Пусть $H \subset G_k$ – нормальный делитель индекса $r \geq 1$. На множестве G_k определим следующее отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $xy^{-1} \in H$, $x, y \in G_k$.

Обозначим: $G_k \setminus H = \{H_0 = H, H_1, \dots, H_{r-1}\}$, $p_i(x) = |S(x) \cap H_i|$, $i = 0, \dots, r-1$, $P(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_{r-1}(x))$.

ЗАДАЧА 2. При каких условиях на H вектор $P(x)$ будет H -периодическим, т.е. $P(yx) = P(x)$, $x \in G_k$, $y \in H$?

ЗАДАЧА 3. Пусть $k_0, k_1, \dots, k_{r-1} \in N_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ – заданные числа и $\sum_{i=0}^{r-1} k_i = k+1$. Существует ли нормальный делитель H индекса r с $q_i(x) = k_i$, где $q_i(x) = |S_1(x) \cap H_i|$, $i = 0, \dots, r-1$, $x \in G_k$?

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что все величины $p_i(x)$, $q_i(x)$ (следовательно, $P(x)$ и $Q(x)$) зависят от H . В дальнейшем мы подразумеваем эту зависимость, хотя в обозначениях величин эта зависимость не указана.

ЗАДАЧА 4. Найти условия на f и H , при которых уравнение (2) имеет H -периодическое решение.

Задачи 1–3 решаются в разделе 3, а задача 4 – в разделе 4.

3. О свойствах группового представления G_k . 3.1. *О значениях индекса нормальных делителей.* В данном подпункте дается исчерпывающий ответ на задачу 1. В работах [3], [5] построены классы нормальных делителей конечного индекса (в основном, индекса 2^m) группы G_k , изучены структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса.

В работе [14] доказано, что для G_k существует нормальный делитель любого четного индекса. Таким образом, остается проверить существование нормального делителя нечетного индекса. На этот вопрос отвечает следующая простая

ТЕОРЕМА 1. *В группе G_k не существует нормального делителя нечетного ($\neq 1$) индекса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факторгруппа относительно любого нормального делителя H содержит подгруппу порядка 2, так как $a_i^2 = e$. В силу теоремы Лагранжа не существует нормального делителя нечетного индекса.

3.2. О разбиении $S(x)$ на смежные классы. Здесь мы ответим на вопрос 2) пункта 3. Как было сказано выше, в работе [3] были изучены структуры разбиения множества $S_1(x)$ и доказана следующая

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Пусть $Q(x) = (q_0(x), q_1(x), \dots, q_{r-1}(x))$. Для любого $x \in G_k$ существует перестановка π_x координат вектора $Q(e)$ такая, что*

$$\pi_x Q(e) = Q(x),$$

где $q_i(x)$ определены в задаче 3.

В этом пункте мы докажем теорему, аналогичную теореме 2 относительно $P(x)$ (см. задачу 1).

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} \Theta_{i,j}: P = (p_0, \dots, p_{r-1}) \in \mathbb{R}^r &\rightarrow \Theta_{i,j}(P) = (\Theta_{i,j}^{(0)}(P), \dots, \Theta_{i,j}^{(r-1)}(P)) \in \mathbb{R}^r, \\ \Theta_{i,j}(P) &= (p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + 1, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, p_j - 1, p_{j+1}, \dots, p_{r-1}). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $x \in G_k$ существуют $i, j \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ и перестановка π_x координат вектора $P(e)$ такая, что*

$$\pi_x(\Theta_{i,j}(P(e))) = P(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$S_1(x) = S(x) \cup \{x_\downarrow\}, \quad (6)$$

где $x_\downarrow \in S_1(x)$ — точка такая, что $d(e, x_\downarrow) < d(e, y)$ для любых $y \in S(x)$. По построению ясно, что класс принадлежности $x_\downarrow$ зависит от места нахождения слова x на дереве. Следовательно, вектор $P(x)$ зависит от $x_\downarrow$. Таким образом, в силу теоремы 2 из (6) имеем $\pi_x P(x) = P(y)$, если $x_\downarrow \sim y_\downarrow$ и $\pi_x \Theta_{i,j}(P(x)) = P(y)$ при некоторых i, j , если $x_\downarrow \not\sim y_\downarrow$. Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Для любых $x, y \in G_k$ имеет место $P(x) = P(y)$ тогда и только тогда, когда $H = G_k^{(2)} = \{\text{подгруппа, состоящая из слов четной длины}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $H = G_k^{(2)}$ легко проверить, что π_x и $\Theta_{i,j}$ есть тождественные отображения.

3.3. О решении задачи 3. Задача 3 оказывается достаточно сложной, поэтому ограничимся конкретным r , т.е. $r = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР. Пусть $r = 2^3$, $k = 3$, $k_0 = 2$, $k_1 = 2$, $k_j = 0$, $j = 2, \dots, 7$. Тогда не существует нормального делителя индекса 8 со свойствами $q_0(e) = 2$, $q_1(e) = 2$, $q_j(e) = 0$, $j = 2, \dots, 7$.

Действительно, пусть существует H_0 индекса 8; тогда существуют $A_1, A_2, A_3 \subseteq N_3$ такие, что $H_0 = H_{A_1} \cap H_{A_2} \cap H_{A_3}$ несократимый. Заметим, что

$$\begin{aligned} q_0(e) &= |N_3 \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)|, & q_1(e) &= |A_1 \setminus (A_2 \cap A_3)|, \\ q_2(e) &= |A_2 \setminus (A_1 \cap A_3)|, & q_3(e) &= |A_3 \setminus (A_1 \cap A_2)|, \\ q_4(e) &= |(A_1 \cap A_2) \setminus A_3|, & q_5(e) &= |(A_1 \cap A_3) \setminus A_2|, \\ q_6(e) &= |(A_2 \cap A_3) \setminus A_1|, & q_7(e) &= |(A_1 \cap A_2 \cap A_3)|. \end{aligned}$$

1) Пусть $q_0(e) = 2$; тогда $A_1 = \{i\}$, $A_2 = \{j\}$, $A_3 = \{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j \in N_3$. В этом случае $H_{A_1} \cap H_{A_2} \cap H_{A_3}$ сократимо, т.е.

$$H_{A_1} \cap H_{A_2} \cap H_{A_3} = H_{A_1} \cap H_{A_3},$$

т.е. H_0 – нормальный делитель индекса 4.

2) Пусть $q_1(e) = 2$; тогда $A_1 = N_3$, $A_2 = \{i\}$, $A_3 = \{i, j\}$, $i \neq j$, $i, j \in N_3$. В этом случае $q_4(e) = 1$, $q_5(e) = 1$, т.е. $q_0(e) \neq 2$.

Этот пример наводит на следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Пусть $k \geq 1$, $r = 2^m$ и $k_1, k_2, \dots, k_s \in N_k$, $s < m$, такие, что $\sum_{i=1}^s k_i = k + 1$, $\prod_{i=1}^s k_i \geq 2^s$. Тогда не существует нормального делителя H_0 индекса $r = 2^m$ с $q_i(e) = k_i$, $i = 1, \dots, s$, и $q_0(e) = q_j(e) = 0$, $j = s + 1, \dots, 2^m - 1$.

4. Описание периодических гармонических функций. 4.1. Случай $A(x) = S_1(x)$, $f(h, x, \theta) = \theta h + c$. В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$h_x = \sum_{y \in S_1(x)} (\theta h_y + c), \quad (7)$$

где $\theta, c \in \mathbb{R}$.

Для простоты опишем все H -периодические решения уравнения (7) для любого нормального делителя H индекса 2. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид (см. [5])

$$H_A = \left\{ x \in G_k : \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) \text{ четно} \right\}, \quad A \subseteq N_k, \quad A \neq \emptyset.$$

Тогда H_A -периодические функции имеют вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x \in H_A, \\ h_2, & \text{если } x \in G_k \setminus H_A, \end{cases} \quad (8)$$

где h_1, h_2 удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} h_1 = |A|(\theta h_2 + c) + (k + 1 - |A|)(\theta h_1 + c), \\ h_2 = |A|(\theta h_1 + c) + (k + 1 - |A|)(\theta h_2 + c). \end{cases} \quad (9)$$

Нетрудный анализ этой системы показывает, что верна следующая

ТЕОРЕМА 5. 1) Если $\theta \neq 1/(k+1)$, то существует постоянное решение $h_x = c(k+1)/(1-\theta(k+1))$, $x \in G_k$, уравнения (7).

2) Если $\theta = 1/(k+1)$, то при $c = 0$ произвольная постоянная функция $h_x = h \in \mathbb{R}$ является решением уравнения (7).

3) Если $|A| \neq (k+1)/2$, $\theta = 1/(k+1-2|A|)$ то уравнение (7) имеет бесконечно много H_A -периодических решений вида (8), где h_1, h_2 удовлетворяют уравнению

$$h_1 + h_2 = \frac{(2|A| - k - 1)(k + 1)c}{|A|}.$$

Более того, при $|A| = (k+1)/2$ все H_A -периодические решения совпадают с постоянными функциями, описанными в 1) и 2).

4.2. Случай $A(x) = S(x)$. В этом подразделе рассмотрим уравнение (2) с $A(x) = S(x)$ и $f(h_y, x, \theta) = f(h_y, \theta)$ для $\forall x \in G_k$.

В этом случае уравнение (2) имеет вид

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta). \quad (10)$$

Цель этого подраздела – описать множество всех H -периодических гармонических функций для любого нормального делителя конечного индекса $H \subseteq G_k$. Точнее, здесь мы определим некоторые условия на f и H , при которых существуют H -периодические решения уравнения (10).

Пусть H – нормальный делитель индекса r (в силу теоремы 1, r – четное число) группы G_k и $G_k/H = \{H_0 = H, H_1, \dots, H_{r-1}\}$ – факторгруппа. H -периодическая функция $h = \{h_x, x \in G_k\}$ имеет следующий вид: $\{h_x = h_i, \text{ если } x \in H_i, i = 0, \dots, r-1\}$.

В силу теоремы 3, величины $h_i, i = 0, \dots, r-1$, удовлетворяют системе уравнений

$$h_m = \sum_{s=1}^{N(e)} \Theta_{i,j}^{(i_s)}(P(e)) f(h_{\pi_m(i_s)}, \theta), \quad (11)$$

где $m = 0, \dots, r-1$, $N(e) = |\{s : p_s(e) \neq 0\}|$.

Пусть $G_k^{(2)}$ – подгруппа группы G_k , состоящая из слов четной длины. Очевидно, что $G_k^{(2)}$ является подгруппой индекса 2.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция f удовлетворяет следующему условию:

$$f(h_1, \theta) = f(h_2, \theta) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad h_1 = h_2. \quad (12)$$

Тогда для любого нормального делителя конечного индекса H всякая H -периодическая гармоническая функция совпадает либо с постоянной, либо с $G_k^{(2)}$ -периодической функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (11) получим

$$f(h_{\pi(i_1)}; \theta) = f(h_{\pi(i_2)}; \theta) = \cdots = f(h_{\pi(i_{N(e)})}; \theta).$$

Отсюда в силу условий теоремы имеем

$$h_{\pi_m(i_1)} = h_{\pi_m(i_2)} = \cdots = h_{\pi_m(i_{N(e)})}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_x = h_y = h_1, & \quad \text{если } x, y \in S_1(z), \quad z \in G_k^{(2)}, \\ h_x = h_y = h_2, & \quad \text{если } x, y \in S_1(z), \quad z \in G_k \setminus G_k^{(2)}. \end{aligned}$$

То есть если $h_1 = h_2$, то h_x будет постоянной функцией, если же $h_1 \neq h_2$, то гармоническая функция является $G_k^{(2)}$ -периодической. Теорема доказана.

Возникает вопрос: при каком условии на H всякая H -периодическая гармоническая функция является постоянной?

Пусть $I(H) = H \cap \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ — множество образующих группы G_k , принадлежащих H .

ТЕОРЕМА 7. При условии (12), если $I(H) \neq \emptyset$, то всякая H -периодическая гармоническая функция совпадает с постоянной функцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $x \in H$, для того, чтобы $xa_i \in H$, необходимо и достаточно, чтобы $a_i \in H$. Так как $I(H) \neq \emptyset$, существует $a_i \in H$. Следовательно, H содержит подмножество $Ha_i = \{xa_i : x \in H\}$. В силу теоремы 6 имеем $h_x = h_1$ и $h_{xa_i} = h_2$, но так как x и xa_i принадлежат классу H , получим $h_x = h_{xa_i} = h_1 = h_2$. Теорема доказана.

В силу теорем 6 и 7 задача описания H -периодических гармонических функций при $I(H) \neq \emptyset$ сводится к описанию неподвижных точек отображения $kf(h, \theta)$, т.е.

$$h = kf(h, \theta), \quad (13)$$

и при $I(H) = \emptyset$ сводится к описанию решений системы

$$\begin{cases} h_1 = kf(h_2, \theta), \\ h_2 = kf(h_1, \theta). \end{cases} \quad (14)$$

Заметим, что решение системы (14) эквивалентно описанию периодических (с периодом 2) точек отображения $kf(h, \theta)$, т.е.

$$h = kf(kf(h, \theta); \theta). \quad (15)$$

В общем случае, т.е. без некоторых условий на функцию f , трудно что-либо сказать о решении уравнений (13) и (15). Можно, конечно, исходя из теории одномерных динамических систем найти условия на функцию f , при которых уравнения (13) и (15) имеют различные решения (см. [15]–[17]).

Но, как подсказывают уравнения (3)–(5) данной работы, естественными условиями на f являются следующие. Пусть $f(\cdot, \theta): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и

- (i) $f(-h, \theta) = -f(h, \theta)$;
- (ii) $\lim_{h \rightarrow \infty} f(h, \theta) = K < +\infty$;
- (iii) f'_h существует и $f'_h(0, \theta) = c(\theta)$, $f'_h(h, \theta) \leq |c(\theta)|$;
- (iv) $f''_{hh}(x, \theta)$ существует и $f''_{hh}(x, \theta) < 0$, $x > 0$.

Из свойств (i)–(iv) легко следует следующая

ТЕОРЕМА 8. При условиях (i)–(iv) на функцию f имеем:

- 1) уравнение (13) имеет единственное решение $h = 0$, если $|c(\theta)| < 1/k$, и три решения $h = 0, \pm h_*$, $h_* > 0$, если $|c(\theta)| \geq 1/k$.
- 2) система (14) имеет единственное решение $(0, 0)$, если $|c(\theta)| < 1/k$, три решения $(0, 0)$, $(-h_*, -h_*)$, (h_*, h_*) , если $c(\theta) \geq 1/k$, и три решения $(0, 0)$, $(-h_*, h_*)$, $(h_*, -h_*)$, если $c(\theta) \leq -1/k$.

Таким образом, в силу теорем 6–8 можно дать полное описание H -периодических гармонических функций, удовлетворяющих уравнению (10).

ТЕОРЕМА 9. При выполнении условий теорем 6–8

- 1) если $c(\theta) \geq 1/k$, то для любого нормального делителя конечного индекса H всякие H -периодические функции совпадают с одной из следующих постоянных функций: $h_x \equiv 0$, $h_x \equiv \pm h_*$, $h_* > 0$;
- 2) если $c(\theta) \leq -1/k$, то существуют только три H -периодические (непостоянные) гармонические функции, которые совпадают с $G_k^{(2)}$ -периодическими функциями

$$h_x^{(0)} = 0, \quad h_x^{(+)} = \begin{cases} h_*, & x \in G_k^{(2)}, \\ -h_*, & x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases} \quad h_x^{(-)} = -h_x^{(+)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подразделы 4.1 и 4.2 показывают различие уравнения (2) при $A(x) = S(x)$ и $S_1(x)$. Точнее, в первом случае (теорема 5) существуют всякие периодические (с периодом 2), а во втором случае (теорема 9) существуют только $G_k^{(2)}$ -периодические функции. Для остальных нормальных делителей индекса два, т.е. H_A , $A \subset N_k$, H_A -периодические решения уравнения (10) совпадают с постоянными функциями.

Благодарность. У. А. Розиков благодарит Institute des Hautes Études Scientifiques (IHES), Bures-sur Yvette (Франция), за финансовую поддержку пребывания в институте в сентябре–декабре 2003 г., а также International Center for Theoretical Physics (ICTP), Trieste (Италия), и Issac Newton Institute, Cambridge (Великобритания), за неоднократные поддержки поездок в эти институты в 2004 г.

Авторы выражают глубокую признательность профессорам Т. Като, А. Прасад, Л. Рамеро и М. Сапиру за полезную дискуссию по работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ганиходжаев Н. Н. Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. АН РУз. 1994. №4. С. 3–5.
- [2] Розиков У. А. Представимость деревьев и их некоторые приложения // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №4. С. 516–527.
- [3] Розиков У. А. Структура разбиений дерева Кэли и их применения для описания периодических распределений Гиббса // ТМФ. 1997. Т. 112. №1. С. 170–175.
- [4] Розиков У. А. Построение несчетного числа гиббсовских мер неоднородной модели Изинга // ТМФ. 1999. Т. 118. №1. С. 95–104.
- [5] Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. Описание непериодических крайних гиббсовских мер некоторых моделей на дереве Кэли // ТМФ. 1997. Т. 111. №1. С. 109–117.
- [6] Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А. Групповые представления леса Кэли и его некоторые применения // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. №1. С. 17–27.

- [7] Розиков У. А. Случайные блуждания в случайных средах на метрических группах // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №1. С. 129–135.
- [8] Bollobás B. Modern Graph Theory. Graduate Texts in Math. V. 184. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [9] Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A. On disordered phase in the ferromagnetic Potts model on the Bethe lattice // Osaka J. Math. 2000. V. 37. №2. P. 373–383.
- [10] Розиков У. А. Случайные блуждания в случайных средах на дереве Кэли // Укр. матем. ж. 2001. Т. 53. №10. С. 1391–1401.
- [11] Aczel J. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York–London: Academic Press, 1966.
- [12] Kuczma M. Functional Equations in a Single Variable // Monographie Matematyczne. V. 46. Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1968.
- [13] Kuczma M., Choczewski B., Ger R. Iterative Functional Equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [14] Шоюсупов Ш. А. О значениях индекса нормальных делителей группового представления дерева Кэли. Магистерская диссертация. Ташкент: НУУз, 2003.
- [15] Sinai Ya. G. Topics in Ergodic Theory. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.
- [16] Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. матем. ж. 1964. Т. 16. №1. С. 61–71.
- [17] Шарковский А. Н. Об одной классификации неподвижных точек // Укр. матем. ж. 1965. Т. 17. №5. С. 80–95.

(Э.П. Норматов) Национальный университет Узбекистана
им. М. Улукбека, г. Ташкент

Поступило
11.11.2004

(У.А. Розиков) Институт математики им. В. И. Романовского, г. Ташкент
E-mail: erkinormatov@yandex.ru, rozikovu@yandex.ru, rozikovu@mail.ru