Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридчук, О. Г. Китаева, Инвариантные многообразия уравнения ХOFFфа,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 3, 444–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:26:29

УДК 517.95

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ХОФФА

Г. А. Свиридчук, О. Г. Китаева

Уравнение Хоффа $(\lambda + \Delta)u_t = -\alpha u - \beta u^3$ моделирует выпучивание двутавровой балки, параметры $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Установлено существование конечномерного локального инвариантного многообразия в окрестности точки нуль.

Библиография: 9 названий.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda + \Delta)u_t = -\alpha u - \beta u^3, \quad (0.1)$$

которое в случае $n = 1$ моделирует динамику выпучивания двутавровой балки. Искомая функция $u = u(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ имеет физический смысл отклонения балки от вертикали, параметры $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ характеризуют нагрузку (λ) и свойства материала (α, β). Задача Коши–Дирихле

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.2)$$

для уравнения (0.1) впервые исследовалась в [2]. Здесь была отмечена принципиальная неразрешимость задачи (0.1), (0.2) при произвольных начальных данных. В [3] начато изучение множества допустимых начальных значений, понимаемого как фазовое пространство уравнения (0.1). В [4] показано, что фазовым пространством уравнения Хоффа является простое банахово C^∞ -многообразие, моделируемое подпространством, дополненным к ядру $\ker(\lambda + L)$.

Нашей целью является изучение поведения решений задачи (0.1), (0.2) в окрестности стационарной точки в терминах (локально) инвариантных многообразий [5]. Для этого мы редуцируем задачу (0.1), (0.2) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \quad (0.3)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа [6]

$$L\dot{u} = Mu + F(u). \quad (0.4)$$

Здесь операторы $L, M, F: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$; $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства. Затем мы убедимся, что фазовое пространство уравнения (0.4) содержит только квазистационарные траектории [3]. Наконец мы установим существование локально инвариантного многообразия конечной коразмерности задачи (0.1), (0.2).

Условимся о следующем. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении “спектральных” вопросов вводится их естественная комплексация; все контуры ориентированы движением “против часовой стрелки” и ограничивают области, лежащие “слева” при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены соответственно “единичный” и “нулевой” операторы, области определения которых ($\text{dom } \mathbb{I}$ и $\text{dom } \mathbb{O}$) ясны из контекста.

1. Постановка задачи. Для редукции задачи (0.1), (0.2) к задаче (0.3), (0.4) положим $\mathfrak{U} = L_4$, $\mathfrak{F} = W_2^{-1}$ (здесь и далее все функциональные пространства определены на области Ω). Операторы L, M и F определены формулами

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_{\Omega} (\lambda uv - u_{x_k} v_{x_k}) dx \quad \forall u, v \in \dot{W}_2^1, \\ \langle Mu, v \rangle &= -\alpha \int_{\Omega} uv dx, \quad \langle F(u), v \rangle = -\beta \int_{\Omega} u^3 v dx \quad \forall u, v \in L_4, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в L_2 . Поскольку при $n \leq 4$ вложение $W_2^1 \hookrightarrow L_4$ плотно и непрерывно, в этом случае оператор $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен, замкнут и плотно определен). Кроме того, в силу непрерывности вложений $L_4 \hookrightarrow (L_4)^* \cong L_4^* \hookrightarrow W_2^{-1}$ оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейен и непрерывен). Поэтому пользуясь методами [7] можно получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $n \leq 4$; тогда при любых $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор M (L, τ) -ограничен, причем ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты оператора M .

Действительно, пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения однородной задачи Дирихле в области Ω для оператора Лапласа Δ , занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Тогда L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = -\frac{\alpha}{\lambda + \lambda_k}, \quad \lambda_k \neq -\lambda \right\} \quad (1.1)$$

и поэтому, очевидно, ограничен. Далее, пусть $\{\varphi_k\}$ – ортонормированное (в смысле L_2) семейство собственных функций, соответствующее $\{\lambda_k\}$. Тогда $\ker L = \text{span}\{\varphi_l : \lambda_l = -\lambda\}$, откуда если $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$, то

$$\psi = \sum_{\lambda_l = -\lambda} a_l \varphi_l, \quad \sum_{\lambda_l = -\lambda} |a_l| > 0, \quad M\psi = -\alpha \sum_{\lambda_l = -\lambda} A_l \varphi_l \text{ im } L.$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $n \leq 4$; тогда оператор $F \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем $F(0) = 0$ и $F'_0 = \mathbb{O}$.

Действительно, пусть $u \in \mathfrak{U}$; тогда производная Фреше F'_u оператора F в точке u имеет вид

$$\langle F'_u v, w \rangle = -3\alpha \int_{\Omega} u^2 vw dx \quad \forall v, w \in L_4.$$

Отсюда в силу непрерывности вложения $L_{3/4} \hookrightarrow W_2^{-1}$ следует утверждение теоремы.

Редукция задачи (0.1), (0.2) к задаче (0.3), (0.4) закончена.

2. Фазовое пространство. Итак, рассмотрим уравнение (0.4), где операторы $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $F \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L, σ) -ограничен. В силу этого существуют проекторы [7]

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(\mu L - M)^{-1} d\mu,$$

где контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$ ограничивает круг, содержащий L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M . Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P$ ($\ker Q$), $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \operatorname{im} P$ ($\operatorname{im} Q$) и через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора L (M) на $\operatorname{dom} L \cap \mathfrak{U}^k(\mathfrak{U}^k)$, $r = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 2.1 [7]. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда операторы $L_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$, причем существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Подействуем проекторами $\mathbb{I} - Q$ и Q на уравнение (0.4). В силу теоремы 2.1 получим эквивалентную ему систему уравнений

$$G\ddot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)F(u), \quad (2.1)$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QF(u), \quad (2.2)$$

где операторы $G = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, векторы $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$. Поскольку ∞ — устранимая особая точка L -резольвенты оператора M , оператор $G = \mathbb{O}$ [7]. Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + F(u)) = 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Множество называется **$\mathfrak{B}$ фазовым пространством уравнения (0.4)**, если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (0.4) лежит в $\mathfrak{B}$, т.е. $u(t) \in \mathfrak{B}$ при всех $t \in (-T, T)$;
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение задачи (0.3), (0.4).

(Напомним [6], что вектор-функция $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{U})$ называется решением уравнения (0.4), если она при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ему. Решение $u = u(t)$ уравнения (0.4) называется решением задачи (0.3), (0.4), если оно удовлетворяет условию (0.3)).

В силу (2.1) множество $\mathfrak{M}$ удовлетворяет требованию (i) определения 2.1 и потому является кандидатом на роль фазового пространства уравнения (0.4). Присмотримся к нему повнимательней. Пусть точка $u \in \mathfrak{M}$; тогда множество $\mathfrak{M}$ назовем C^∞ -многообразием в точке u_0 , если существуют окрестности $O_u \subset \mathfrak{M}$, $O_{u_0^1} \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 , $u_1 = Pu$ соответственно и C^∞ -диффеоморфизм $\delta: O_{u_1} \rightarrow O_u$ такой, что δ^{-1} есть сужение оператора P на O_u . Немного отходя от стандарта [8], будем называть пару (δ, O_u) картой множества $\mathfrak{M}$ в точке u . Множество $\mathfrak{M}$ назовем C^∞ -многообразием, моделируемым подпространством $\mathfrak{U}_1$, если в каждой его точке существует карта. Связанное C^∞ -многообразие называется простым, если существует его атлас, содержащий единственную карту.

ТЕОРЕМА 2.2 [4]. (i) Пусть $-\lambda \notin \{\lambda_k\}$ и $n \leq 4$. Тогда фазовое пространство уравнения (0.1) совпадает с пространством $\mathfrak{U}$.

(ii) Пусть $-\lambda \in \{\lambda_k\}$ и $n \leq 4$. Тогда фазовым пространством уравнения (0.1) является простое банахово C^∞ -многообразие

$$\mathfrak{M} = \left\{ u \in \mathfrak{U} : \int_{\Omega} (\alpha + \beta u^2) u \varphi_l dx = 0, \quad \lambda_l = -\lambda \right\},$$

моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0, \lambda_l = -\lambda\}$.

(Более того, в [4] показано, что для любой точки $u^1 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственный вектор $u^0 \in \mathfrak{U}^0 (= \ker L)$ такой, что точка $u = u^0 + u^1 \in \mathfrak{M}$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Решения задачи (0.3), (0.4), для которых выполняется условие $G\dot{u}^0 = 0$, называются в [3] *квазистационарными траекториями*, проходящими через точку u^0 . Таким образом, фазовое пространство уравнения (0.1) содержит только квазистационарные траектории.

3. Локальные инвариантные многообразия. Вернемся к уравнению (0.4), где операторы $L \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $F \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем $F(0) = 0$. Если вдобавок оператор M (L, σ)-ограничен, ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты оператора M , и в точке O множество $\mathfrak{M}$ является гладким банаховым C^∞ -многообразием, то, как следует из [3], для любой точки $u_0 \in \mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{M}$ некоторой окрестности $\mathfrak{D}_0$ точки O и некоторого $T = T(u_0)$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{M})$ задачи (0.3), (0.4). Перефразируя это, можно сказать, что на $\mathfrak{D}_0$ задана локальная гладкая группа $\{U^t : t \in \mathfrak{I}_0\}$, где $\mathfrak{I}_0$ – интервал, содержащий нуль, вообще говоря, разный для разных точек из $\mathfrak{D}_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть на окрестности $\mathfrak{D}_0$ точки O фазового пространства $\mathfrak{B}$ уравнения (0.4) определена гладкая группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ такая, что $U^t(0) = 0$. Множество $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}$ называется *инвариантным относительно группы* $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$, если $U^t[O_0 \cap \mathfrak{G}] \subset \mathfrak{G}$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Множество $\mathfrak{G}$ называется *локально инвариантным относительно* $U^t : t \in \mathbb{R}$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $u \in \mathfrak{G}$ и любого T , удовлетворяющего условию $\|U^t u\|_u < \varepsilon$ при $t \in [-|T|, |T|]$, имеем $U^t u \in \mathfrak{G}$.

По традиции [5] изучение поведения решений гладкого автономного уравнения начинается с изучения его линейной части. Поэтому, полагая $F'_0 = \mathbb{O}$ в (0.4), рассмотрим линейное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \quad (3.1)$$

Поступая с (3.1) аналогично уравнению (0.4) в силу (2.1), (2.2) получим эквивалентную ему систему уравнений

$$u^0 = 0, \quad \dot{u}^1 = Su^1, \quad (3.2)$$

где оператор $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, причем его спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$ [7]. Определим множества $\sigma_-^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re} \mu < 0\}$, $\sigma_+^L(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \operatorname{Re} \mu > 0\}$ и предположим, что

$$\sigma^L(M) = \sigma_-^L(M) \cup \sigma_+^L(M). \quad (3.3)$$

Тогда [9] существуют относительно спектральные проекторы

$$P_{-(+)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{-(+)}} (\mu L - M)^{-1} L d\mu,$$

где контуры Γ_- и Γ_+ лежат в левой и правой полуплоскостях соответственно и ограничивают области, содержащие $\sigma_-^L(M)$ и $\sigma_+^L(M)$. Положим $\mathfrak{U}_{-(+)}^1 = \text{im } P_{-(+)}$ и через $S_{-(+)}^+$ обозначим сужение оператора S на $\mathfrak{U}_{-(+)}^1$.

ТЕОРЕМА 3.1 [9]. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты оператора M и выполнено (3.3). Тогда пространство $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}_-^1 \oplus \mathfrak{U}_+^1$, операторы $S_{-(+)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_{-(+)}^1)$, причем их спектры $\sigma(S_{-(+)}) = \sigma_{-(+)}^L(M)$.

Пусть

$$\sigma_-^L(M) \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

Тогда имеет смысл уравнение

$$\dot{U}_-^1 = S_- u_-^1. \quad (3.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполнены условия теоремы (3.1) и условие (3.4). Тогда уравнение (3.5) асимптотически устойчиво.

Действительно, любое решение $u_-^1 = u_-^1(t)$ уравнения (3.5) имеет вид $u_-^1(t) = U_-^t u_{-0}^1$, где $u_{-0}^1 \in \mathfrak{U}_-^1$, а $\{U_-^t : t \in \mathbb{R}\}$ – группа разрешающих операторов, имеющих вид

$$U_-^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} (\mathbb{I} - S_-)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$$

В силу компактности множества $\sigma_-^L(M)$ существует $\sup\{\text{Re } \mu : \mu \in \sigma_-^L(M)\} = \alpha < 0$. Поэтому при любом $\varepsilon \in (\alpha, 0)$ имеет место оценка

$$\|U_-^t\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \leq \text{const } e^{\varepsilon t}.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть оператор M (L, σ) -ограничен, причем ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты оператора M . Пусть оператор $F \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем $F(0) = 0$ и $F'_0 = \mathbb{O}$. Пусть выполнены условия (3.3) и (3.4). Пусть в точке O фазовое пространство уравнения (0.4) является гладким банаховым C^∞ -многообразием. Тогда в некоторой окрестности точки O фазового пространства существует локальное инвариантное многообразие уравнения (0.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Редуцируем уравнение (0.4) к системе (2.1), (2.2). Поскольку $0 \in \mathfrak{M}$ и в точке 0 множество $\mathfrak{M}$ является гладким банаховым C^∞ -многообразием, в некоторой окрестности $\mathfrak{D}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точки 0 уравнение приобретет вид

$$\dot{u}^1 = S u^1 + G(u^1), \quad (3.6)$$

где оператор $G = L_1^{-1} Q F \delta \in C^\infty(O_0^1; \mathfrak{U}^1)$, причем $G(0) = 0$ и $G'_0 = \mathbb{O}$. В силу условия (3.3) уравнение (3.6) можно расщепить следующим образом:

$$\dot{u}_-^1 = S_- u_-^1 + G_-(u_-^1 + u_+^1), \quad \dot{u}_+^1 = S_+ u_+^1 + G_+(u_-^1 + u_+^1), \quad (3.7)$$

где операторы $G_{-(+)} = P_{-(+)} G$. По построению и в силу условия (3.4) система (3.7) удовлетворяет всем требованиям теоремы 6.1.2 [5]. Отсюда следует существование локального инвариантного многообразия $\mathfrak{G}^1 \subset \mathfrak{D}_0^1$ системы (3.7) вида $\mathfrak{G}^1 = \{(u_-^1, u_+^1) : u_+^1 = \sigma(u_-^1)\}$, касающегося подпространства $\mathfrak{U}_-^1$ в точке 0 . Очевидно, что $\mathfrak{G} = \delta[\mathfrak{G}^1]$ является локальным инвариантным многообразием уравнения (0.4).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $n \leq 4$; тогда при любых $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ существует локальное инвариантное многообразие для уравнения Хоффа, причем его размерность равна $\dim \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda_l > -\lambda\} < \infty$.

Действительно, в этом случае $\sigma^L(M)$ имеет вид (1.1). Отсюда

$$\sigma_-^L(M) = \left\{ -\frac{\alpha}{\lambda + \lambda_l} : \lambda_l > -\lambda \right\}.$$

Значит, $\dim \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda_l > -\lambda\} < \infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
- [2] Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 9. С. 1526–1526.
- [3] Свиридюк Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 192–202.
- [4] Свиридюк Г. А., Казак В. О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 292–297.
- [5] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [6] Свиридюк Г. А., Сукачева Е. Г. Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 5. С. 109–119.
- [7] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
- [8] Лент С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Волгоград: Платон, 1996.
- [9] Свиридюк Г. А., Келлер А. В. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 60–68.

(Г. А. Свиридюк) Челябинский государственный университет
 (О. Г. Китаева) Магнитогорский государственный университет
E-mail: ridyu@csu.ru, okitaeva@masu.ru

Поступило
 20.01.2003