Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шапошников, Оценка Морри соболевских норм решений эллиптических уравнений, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 450–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:07:31

УДК 517.956

ОЦЕНКА МОРРИ СОБОЛЕВСКИХ НОРМ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Шапошников

Дано полное доказательство оценки Морри $W^{1,p}$ -нормы решения эллиптического уравнения второго порядка на области через L_1 -норму решения. Исследована зависимость константы в этой оценке от коэффициентов уравнения.

Библиография: 7 названий.

Цель этой работы – полное доказательство важного результата Морри, приведенного в его книге [1, с. 156] лишь с указанием идеи обоснования и дающего оценку $W^{1,p}$ -нормы решения эллиптического уравнения второго порядка на области через нормы коэффициентов уравнения и L_1 -норму самого решения на этой же области. Кроме того, исследована зависимость константы в этой оценке от коэффициентов уравнения. Точная формулировка приводится ниже в теореме и следствии (см. также заключительное замечание). В этой оценке утверждается, что если функция u из пространства Соболева $W^{1,q}(G)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\partial_{x_i}(a^{ij}\partial_{x_j}u + b^i u) - c^i \partial_{x_i}u - du = f - \partial_{x_i}e^i$$

в слабом смысле (т.е. в форме интегрального тождества, см. ниже), где используется обычное правило суммирования по повторяющимся индексам и предполагается, что матричнозначное отображение $(a^{ij})_{i,j \leq n}$ непрерывно, равномерно ограничено и равномерно невырожденно, а векторнозначные отображения (b^i) , (e^i) , (c^i) и скалярные функции d и f интегрируемы в нужной степени, то имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^{1,q}(G)} \leq C(\|e\|_{L_q(G)} + \|f\|_{L_p(G)} + \|u\|_{L_1(G)}).$$

Этот результат нашел интересные применения при исследовании слабых эллиптических уравнений для мер, предпринятом в [2], [3]. Поэтому важно иметь полное его доказательство. Основная особенность этой оценки по сравнению с аналогичными оценками, имеющимися в обширной литературе, посвященной этой тематике (см., например, [4]–[7]), заключается в том, что оценивается $W^{1,q}(G)$ -норма u через $L_1(G)$ -норму u на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00748, и фонда DFG, грант № 436 RUS 113/343/0(R).

той же области. Значительно проще оценить $W^{1,q}(G')$ -норму u на области G' , компактно принадлежащей области G , через $L_1(G)$ -норму на большей области G . Дополнительно мы исследуем зависимость константы оценки от коэффициентов уравнения. Идея доказательства была указана Морри в нескольких строках, однако, как будет видно из приводимых ниже рассуждений, осуществление его плана требует кропотливой работы и ряда вспомогательных утверждений. При этом удастся получить несколько более сильный окончательный результат.

Напомним некоторые определения. Будем следовать обозначениям книги [1]. Пусть $W^{1,q}(G)$ – пространство Соболева функций, принадлежащих $L_q(G)$ вместе со слабыми производными первого порядка. Через $B(x, r)$ обозначим открытый шар радиуса r с центром в точке x . Мы используем обозначения $\|f\|_{q,r}^0$, $\|f\|_{q,D}^0$, $\|f\|_{q,r}^1$ и $\|f\|_{q,D}^1$ для норм функций в пространствах $L_q(B(0, r))$, $L_q(D)$, $W^{1,q}(B(0, r))$ и $W^{1,q}(D)$ соответственно, где D – область в $\mathbb{R}^n$. Стандартные символы $C(D)$ и $C^1(D)$ обозначают классы непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций на D . Через $C_0(D)$ и $C_0^1(D)$ обозначаются подклассы функций с компактными носителями. Пусть $u_{x_i} := \partial_{x_i} u$ – частная производная (возможно, в соболевском смысле) по переменной x_i . Положим

$$G(0, r) = B(0, r) \cap \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}.$$

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^1 . Предположим, что функция $u \in W^{1,q}(G)$, где $q > 1$, удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_G v_{x_i} (a^{ij} u_{x_j} + b^i u + e^i) + v(c^i u_{x_i} + du + f) dx = 0 \quad (1)$$

для всех $v \in C_0^1(G)$, где коэффициенты a^{ij} таковы, что для некоторых положительных констант m, M выполнено неравенство

$$m|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq M|\xi|^2 \quad \text{для всех } x \in \overline{G}, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Предполагается, что функции b^i, c^i, e^i, d и f локально интегрируемы, поэтому тождество (1) имеет смысл; дополнительные условия сформулированы ниже. Тождество (1) является определением уравнения

$$\partial_{x_i} (a^{ij} \partial_{x_j} u + b^i u) - c^i \partial_{x_i} u - du = f - \partial_{x_i} e^i$$

в слабом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что для коэффициентов a, b, c и d выполняются H_q^1 -условия в области Γ , если $a^{ij} \in C(\Gamma)$ и

- (а) если $n/(n-1) < q < n$, то $b^i, c^i \in L_n(\Gamma)$, $d \in L_{n/2}(\Gamma)$;
- (б) если $q = n \geq 2$, то

$$\int_{\Gamma \cap B(x,r)} (|b|^n + |c|^n + |d|^{n/2}) dx \leq L_1^n r^{n\mu_1}$$

для некоторого $\mu_1 > 0$ и всех $B(x, r)$;

- (с) если $q > n$, то $b^i \in L_q(\Gamma)$, $c^i \in L_n(\Gamma)$, $d \in L_p(\Gamma)$, $p = nq/(n+q)$.

Положим

$$Q_r(e)(y) = \sum_{i=1}^n \int_{B(0,r)} K_{x_i}(x-y) e^i(x) dx, \quad P_r(f)(y) = \int_{B(0,r)} K(x-y) f(x) dx,$$

где $K(y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$K(y) = \begin{cases} \frac{-1}{n(n-2)\alpha(n)|y|^{n-2}}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln |y|, & n = 2. \end{cases}$$

Установим некоторые вспомогательные свойства функций $Q_r(e)$ и $P_r(f)$.

ЛЕММА 1. Для функций $P_r(f)$ и $Q_r(e)$ имеют место следующие оценки.

(а) L_q -оценки $P_r(f)$:

если $n = 2, q = 2$, то

$$\|P_r(f)\|_{2,r}^0 \leq C(\mu) L(2r)^{\mu+1} \left(1 + \ln\left(\frac{1}{2r}\right)\right),$$

как только

$$\int_{B(0,r) \cap B(x,\rho)} |f(y)| dy \leq L\rho^\mu \quad \text{для некоторого } \mu > 0 \text{ и всех } B(x,\rho), \quad 0 < r < \frac{1}{2};$$

если $n = 2, q > 2$, то

$$\|P_r(f)\|_{q,r}^0 \leq C(n,q) r^{3/2} \|f\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } f \in L_q(B(0,r)), \quad 0 < r < \frac{1}{2};$$

если $n \geq 2, 1 \leq q < n$, то

$$\|P_r(f)\|_{nq/(n-q),r}^0 \leq C(n,q) r^{2/3} \|f\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } f \in L_q(B(0,r)) \text{ и } 0 < r < \frac{1}{2};$$

если $n > 2, q \geq 1$, то

$$\|P_r(f)\|_{q,r}^0 \leq C(n,q) r^2 \|f\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } f \in L_q(B(0,r)).$$

(б) L_q -оценки $\nabla P_r(f)$:

если $n = 2, q = 2$, то

$$\|\nabla P_r(f)\|_{2,r}^0 \leq C(\mu) L(2r)^\mu,$$

как только

$$\int_{B(0,r) \cap B(x,\rho)} |f(y)| dy \leq L\rho^\mu \quad \text{для некоторого } \mu > 0 \text{ и всех } B(x,\rho);$$

если $n \geq 2, q \geq 1$, то

$$\|\nabla P_r(f)\|_{q,r}^0 \leq C(n,q) r \|f\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } f \in L_q(B(0,r));$$

если $n \geq 2, 1 < q < n$, то

$$\|\nabla P_r(f)\|_{nq/(n-q),r}^0 \leq C(n,q,A) \|f\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } f \in L_q(B(0,r)) \text{ и } 0 < r < A.$$

(с) L_q -оценки $Q_r(e)$ и $\nabla Q_r(e)$:

если $n \geq 2$, $q \geq 1$, то

$$\|Q_r(e)\|_{q,r}^0 \leq C(n, q)r\|e\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } e \in L_q(B(0, r));$$

если $n \geq 2$, $q > 1$, то

$$\|\nabla Q_r(e)\|_{q,r}^0 \leq C(n, q)\|e\|_{q,r}^0 \quad \text{для всех } e \in L_q(B(0, r)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Второе, третье и четвертое неравенства в (а), второе неравенство в (б) и первое неравенство в (с) следуют из такого утверждения [4, с. 157]: если $1 \leq q \leq \infty$, $f(x) \in L_p(\Omega)$, $0 \leq \delta = 1/p - 1/q < \lambda$ и

$$V_\lambda(f) = \int_{\Omega} |x - y|^{n(\lambda-1)} f(y) dy,$$

то

$$\|V_\lambda(f)\|_{L_q(\Omega)} \leq \left(\frac{1-\delta}{\lambda-\delta}\right)^{(1-\delta)} \alpha(n)^{(1-\lambda)} |\Omega|^{\lambda-\delta} \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Заметим, что если $n > 2$, то

$$|K(x - y)| \leq C(n)|x - y|^{2-n};$$

если $n \geq 2$, то

$$|K_{x_i}(x - y)| \leq C(n)|x - y|^{1-n}.$$

Заметим также, что при $n = 2$, $|x - y| \leq 1$

$$|K(x - y)| \leq C(\alpha)|x - y|^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Положим в сформулированном выше утверждении $\Omega = B(0, r)$. Полагая $\lambda = 2/n$, $\delta = 0$, получим четвертое неравенство из (а). Полагая $\lambda = 3/4$, $\alpha = 1/2$, $\delta = 0$, получим второе неравенство из (а). Если $n > 2$, положим $\lambda = 2/n$, $\delta = 1/n$ и получим третье неравенство из (а). Если $n = 2$, положим $\lambda = 5/6$, $\delta = 1/3$ и получим третье неравенство из (а). Полагая $\lambda = 1/n$, $\delta = 0$, приходим ко второму неравенству из (б) и первому неравенству из (с).

2. Докажем первое неравенство из (а). Продолжим функцию f нулем вне $B(0, r)$ и положим

$$\varphi(\rho) = \int_{B(x, \rho)} |f(y)| dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r)} |\ln |x - y|| |f(y)| dy &= \int_0^{2r} |\ln \rho| \varphi'(\rho) d\rho \leq \ln\left(\frac{1}{2r}\right) \varphi(2r) + \int_0^{2r} \rho^{-1} \varphi(\rho) d\rho \\ &\leq L(2r)^\mu \ln\left(\frac{1}{2r}\right) + \mu^{-1} L(2r)^\mu. \end{aligned}$$

Возводя обе части неравенства в квадрат и интегрируя по шару $B(0, r)$, получаем искомую оценку.

3. Докажем первое неравенство из (b). Имеем

$$\left(\int_{B(0, r)} |x - y|^{-1} |f(y)| dy \right)^2 \leq \int_{B(0, r)} |x - y|^{-2\sigma} |f(y)| dy \int_{B(0, r)} |x - y|^{2(\sigma-1)} |f(y)| dy,$$

где $\sigma \in (0, \mu/2)$. Для того чтобы оценить первый сомножитель, мы продолжим f нулем вне $B(0, r)$ и определим $\varphi(\rho)$ той же формулой, что и выше. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r)} |x - y|^{-2\sigma} |f(y)| dy &= \int_0^{2r} \rho^{-2\sigma} \varphi'(\rho) d\rho \\ &= (2r)^{-2\sigma} \varphi(2r) + 2\sigma \int_0^{2r} \rho^{-2\sigma-1} \varphi(\rho) d\rho \\ &\leq L(2r)^{(\mu-2\sigma)} + 2\sigma(\mu-2\sigma)^{-1} L(2r)^{\mu-2\sigma}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left(\int_{B(0, r)} \left(\int_{B(0, r)} |x - y|^{-1} |f(y)| dy \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{B(0, r)} \left(\int_{B(0, r)} |x - y|^{-2\sigma} |f(y)| dy \right) \left(\int_{B(0, r)} |x - y|^{2(\sigma-1)} |f(y)| dy \right) dx \right)^{1/2} \\ &\leq C(\mu, \sigma) L^{1/2} (2r)^{(\mu/2-\sigma)} \left(\int_{B(0, r)} \int_{B(0, r)} |x - y|^{2(\sigma-1)} |f(y)| dy dx \right)^{1/2} \\ &\leq C(\mu, \sigma) L(2r)^{\mu-\sigma} \left(\int_{B(0, r)} |x - y|^{2(\sigma-1)} dx \right)^{1/2} \leq C(\mu, \sigma) L(2r)^\mu. \end{aligned}$$

4. Докажем третье неравенство из (b). Положим функцию f нулем вне $B(0, r)$. Тогда $P_r(f)(x) = P_A(f)(x)$, $\|f\|_{q, r}^0 = \|f\|_{q, A}^0$. Используя уже полученные в пунктах 1–3 оценки, неравенство $\|\nabla^2 P_A(f)\|_{q, A}^0 \leq C(n, q) \|f\|_{q, A}^0$ (см. [4, с. 217]) и неравенство Соболева для $q < n$, имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla P_r(f)\|_{nq/(n-q), r}^0 &\leq \|\nabla P_A(f)\|_{nq/(n-q), A}^0 \leq C_1(B(0, A), q, n) \|\nabla P_A(f)\|_{q, A}^1 \\ &\leq C(B(0, A), q, n) \|f\|_{q, A}^0 = C(B(0, A), q, n) \|f\|_{q, r}^0. \end{aligned}$$

Таким образом, третье неравенство из (b) доказано.

Для доказательства второго неравенства из (c) пользуемся тем, что для $f \in L_q$ при $q > 1$ имеет место включение $P_A(f) \in W^{2, q}(B(0, A))$ и

$$\|\nabla^2 P_A(f)\|_{q, A}^0 \leq C(n, q) \|f\|_{q, A}^0,$$

что доказано в [4, с. 217]. Замечая, что

$$Q_r(e)(y) = \sum_{i=1}^n -\partial_{y_i} P_r(e^i)(y),$$

получаем требуемое неравенство.

ЛЕММА 2. Пусть коэффициенты интегрального тождества (1) удовлетворяют H_q^1 -условиям на $B(0, A)$, где $0 < A < 1/2$ и $q \geq n/(n-1)$, причем равенство имеет место только при $q = n = 2$. Существует $r \in (0, A)$ такое, что если $u \in W^{1,q}(B(0, r))$ удовлетворяет тождеству (1) на $B(0, r)$, $\text{supp } u \in B(0, r)$, $P_r(f) \in W^{1,q}(B(0, r))$, $e \in L_q(B(0, r))$, $\text{supp } f \in B(0, r)$, $\text{supp } e \in B(0, r)$, $a^{ij}(0) = \delta^{ij}$, то

$$\|u\|_{W^{1,q}(B(0,r))} \leq C(\|e\|_{L_q(B(0,r))} + \|P_r(f)\|_{W^{1,q}(B(0,r))}),$$

где $C = C(a, b, c, d, B(0, A), r, q, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть u удовлетворяет тождеству (1). Зафиксируем u . Тогда тождество (1) с $G = B(0, r)$ выполнено для всех $v \in C_0^1(B(0, r))$. Так как функции u, e, f имеют компактные носители в $B(0, r)$, то тождество (1) имеет место для всех $v \in C^1(B(0, r))$. Рассмотрим свертку ψ функций $\varphi \in C_0^1$ и K , т.е.

$$\psi(x) = \int_{B(0,r)} K(x-y)\varphi(y) dy.$$

Ясно, что $\psi - C^1$ -функция, более того,

$$\psi_{x_i}(x) = \int_{B(0,r)} K_{x_i}(x-y)\varphi(y) dy.$$

Подставляя ψ вместо v в (1), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} (K_{x_i}(x-y)\varphi(y)[a^{ij}(x)u_{x_j}(x) + b^i(x)u(x) + e^i(x)] \\ & + K(x-y)\varphi(y)[c^i(x)u_{x_i}(x) + d(x)u(x) + f(x)]) dy dx = 0. \end{aligned}$$

Из теоремы Фубини получаем

$$\int_{B(0,r)} \varphi(y) \int_{B(0,r)} (K_{x_i}(x-y)[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i] + K(x-y)[c^i u_{x_i} + du + f]) dx dy = 0.$$

Последнее равенство выполнено для всех $\varphi \in C_0^1(B(0, r))$; следовательно, для почти всех $y \in B(0, r)$ имеем

$$\int_{B(0,r)} (K_{x_i}(x-y)[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i] + K(x-y)[c^i u_{x_i} + du + f]) dx = 0. \quad (2)$$

Так как $u \in W_0^{1,q}(B(0, r))$, согласно [4, с. 158] имеет место следующее представление:

$$u(y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \frac{(y_i - x_i)u_{x_i}(x)}{|x - y|^n} dx.$$

Используя K , получаем для u формулу

$$u(y) = \int_{B(0,r)} -K_{x_i}(x-y)\delta^{ij}u_{x_i}(x) dx. \quad (3)$$

Складывая (2) и (3), приходим к соотношению

$$u(y) = \int_{B(0,r)} K_{x_i}(x-y)[(a^{ij} - \delta^{ij})u_{x_j} + b^i u + e^i] dy + \int_{B(0,r)} K(x-y)[c^i u_{x_i} + du + f] dx. \quad (4)$$

Применяя функции $Q_r(e)$ и $P_r(f)$, тождество (4) преобразуем к виду

$$u(x) = Q_r((a - \delta)\nabla u + bu + e) + P_r(c\nabla u + du + f). \quad (5)$$

2.A. Пусть $n/(n-1) < q < n$; тогда $p = nq/(n+q) > 1$ и $p = nq/(n+q) < n$. Из леммы 1 и (5) получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,r}^0 &\leq \|Q_r((a - \delta)\nabla u + bu + e)\|_{q,r}^0 + \|P_r(c\nabla u + du)\|_{np/(n-p),r}^0 + \|P_r(f)\|_{q,r}^0 \\ &\leq C(n, q, A)r^{2/3} \left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| \|\nabla u\|_{q,r}^0 + \|bu\|_{q,r}^0 \right. \\ &\quad \left. + \|e\|_{q,r}^0 + \|c\nabla u\|_{p,r}^0 + \|du\|_{p,r}^0 \right) + \|P_r(f)\|_{q,r}^0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{q,r}^0 &\leq \|\nabla Q_r((a - \delta)\nabla u + bu + e)\|_{q,r}^0 + \|\nabla P_r(c\nabla u + du)\|_{np/(n-p),r}^0 + \|\nabla P_r(f)\|_{q,r}^0 \\ &\leq C(n, q, A) \left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| \|\nabla u\|_{q,r}^0 + \|bu\|_{q,r}^0 \right. \\ &\quad \left. + \|e\|_{q,r}^0 + \|c\nabla u\|_{p,r}^0 + \|du\|_{p,r}^0 \right) + \|\nabla P_r(f)\|_{q,r}^0. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим по отдельности слагаемые в правых частях этих неравенств.

(а) Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, получаем

$$\begin{aligned} \|bu\|_{q,r}^0 &= \left(\int_{B(0,r)} |b(x)|^q |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{B(0,r)} |b(x)|^n dx \right)^{1/n} \left(\int_{B(0,r)} |u(x)|^{nq/(n-q)} dx \right)^{(n-q)/(nq)} \\ &\leq C(n, q) \|b\|_{n,r}^0 \|u\|_{q,r}^1. \end{aligned}$$

(б) Из неравенства Гёльдера с показателями $(n+q)/q$ и $(n+q)/n$ имеем

$$\begin{aligned} \|c\nabla u\|_{p,r}^0 &= \left(\int_{B(0,r)} |c(x)|^{(nq)/(n+q)} |\nabla u(x)|^{(nq)/(n+q)} dx \right)^{(n+q)/(nq)} \\ &\leq \left(\int_{B(0,r)} |c(x)|^n dx \right)^{1/n} \left(\int_{B(0,r)} |\nabla u(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \|c\|_{n,r}^0 \|u\|_{q,r}^1. \end{aligned}$$

(с) Согласно неравенству Гёльдера с показателями $(n+q)/(n-q)$ и $(n+q)/(2q)$ и теореме вложения, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|du\|_{p,r}^0 &= \left(\int_{B(0,r)} |d(x)|^{(nq)/(n+q)} |u(x)|^{(nq)/(n+q)} dx \right)^{(n+q)/(nq)} \\ &\leq \left(\int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} dx \right)^{2/n} \left(\int_{B(0,r)} |u(x)|^{(nq)/(n-q)} dx \right)^{(n-q)/(nq)} \\ &\leq C(n, q) \|d\|_{n/2,r}^0 \|u\|_{q,r}^1. \end{aligned}$$

Применяя полученные оценки и складывая (6) и (7), приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,r}^1 &\leq C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + \|b\|_{n,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 + \|d\|_{n/2,r}^0 \right) \|u\|_{q,r}^1 \right. \\ &\quad \left. + \|e\|_{q,r}^0 \right] + \|P_r(f)\|_{q,r}^1, \\ \|u\|_{q,r}^1 &\left(1 - C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + \|b\|_{n,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 + \|d\|_{n/2,r}^0 \right] \right) \\ &\leq C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) (\|e\|_{q,r}^0 + \|P_r(f)\|_{q,r}^1). \end{aligned}$$

Используя непрерывность a и абсолютную непрерывность интеграла Лебега, выбираем $r \in (0, A)$ таким, что

$$C_1(r) = 1 - C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + \|b\|_{n,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 + \|d\|_{n/2,r}^0 \right] > 0.$$

Тогда

$$\|u\|_{q,r}^1 \leq \frac{C(n, q, A)(r^{2/3} + 1)}{C_1(r)} (\|e\|_{q,r}^0 + \|P_r(f)\|_{q,r}^1).$$

2.В. Пусть $q > n$. В этом случае неравенства (6) и (7) выполнены. Следовательно, как и выше, достаточно оценить слагаемые в правых частях этих неравенств.

(а) По теореме вложения Соболева в случае $q > n$ имеем

$$\|bu\|_{q,r}^0 \leq C(n, q)r^{(q-n)/q} \|b\|_{q,r}^0 \|u\|_{q,r}^1.$$

(b) Аналогично получаем

$$\|du\|_{p,r}^0 \leq C(n, q)r^{(q-n)/q} \|d\|_{p,r}^0 \|u\|_{q,r}^1.$$

(с) Как в пункте 2.А.(b), получаем оценку

$$\|c\nabla u\|_{p,r}^0 \leq \|c\|_{n,r}^0 \|u\|_{q,r}^1.$$

Применяя оценки (а), (b), (с) и складывая (6) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,r}^1 &\leq C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + r^{(q-n)/q} \|b\|_{q,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^{(q-n)/q} \|d\|_{p,r}^0 \right) \|u\|_{q,r}^1 + \|e\|_{q,r}^0 \right] + \|P_r(f)\|_{q,r}^1, \\ \|u\|_{q,r}^1 &\left(1 - C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + r^{(q-n)/q} \|b\|_{q,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^{(q-n)/q} \|d\|_{p,r}^0 \right] \right) \leq C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) (\|e\|_{q,r}^0 + \|P_r(f)\|_{q,r}^1). \end{aligned}$$

Как в пункте 2.А, с соответствующей константой $C_1(r)$, получаем требуемую оценку.

2.С. Пусть $q = n > 2$. Неравенства (6) и (7) выполнены. Как и выше, оценим слагаемые в правых частях этих неравенств.

(а) Чтобы оценить $\|bu\|_{n,r}^0$, рассмотрим $(\|bu\|_{n,r}^0)^n$. Воспользуемся хорошо известным неравенством

$$|u(x)| \leq C(n) \int_{B(0,r)} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy,$$

которое немедленно следует из (3). Тогда

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^n dx &= \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^{n-1} |u(x)| dx \\ &\leq C(n) \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^{n-1} \int_{B(0,r)} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy dx \\ &= C(n) \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^{n-1} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy dx \\ &= C(n) \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} (|b(x)|^{n-1} |u(x)|^{n-1} |x-y|^{(1-\sigma)(1-n)}) \\ &\quad \times (|\nabla u(y)| |b(x)| |x-y|^{\sigma(1-n)}) dy dx. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гёльдера правая часть оценивается через

$$\begin{aligned} C(n) &\left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^n |x-y|^{-n(1-\sigma)} dy dx \right)^{(n-1)/n} \\ &\times \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |\nabla u(y)|^n |x-y|^{n\sigma(1-n)} dy dx \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

Оценим каждый сомножитель по отдельности. Для первого сомножителя имеем

$$\begin{aligned} &\left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^n |x-y|^{-n(1-\sigma)} dy dx \right)^{(n-1)/n} \\ &\leq \left(\int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^n \left(\int_{B(0,r)} |x-y|^{-n(1-\sigma)} dy \right) dx \right)^{(n-1)/n} \\ &\leq C(\sigma, n) r^{(n-1)\sigma} \left(\int_{B(0,r)} |b(x)|^n |u(x)|^n dx \right)^{(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить второй сомножитель, получим оценку следующего интеграла. Пусть

$$\varphi(\rho) = \int_{B(y,\rho)} |b(x)|^n dx$$

и пусть b продолжено нулем вне $B(0, r)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |x-y|^{n\sigma(1-n)} dx &= \int_0^{2r} \rho^{n\sigma(1-n)} \varphi'(\rho) d\rho \\ &= (2r)^{n\sigma(1-n)} \varphi(2r) + n(n-1)\sigma \int_0^{2r} \rho^{n(1-n)\sigma-1} \varphi(\rho) d\rho \\ &\leq L_1^n(2r)^{n(\mu_1-(n-1)\sigma)} (1 + (n-1)\sigma(\mu_1 - (n-1)\sigma)^{-1}) \\ &\leq C(n, \mu_1, \sigma) L_1^n(2r)^{n(\mu_1-(n-1)\sigma)}, \end{aligned}$$

где $0 < \sigma < \mu_1/(n-1)$. Тогда второй сомножитель оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |b(x)|^n |\nabla u(y)|^n |x-y|^{n\sigma(1-n)} dy dx \right)^{1/n} \\ & \leq C(n, \mu_1, \sigma) L_1(2r)^{\mu_1 - (n-1)\sigma} \|u\|_{n,r}^1. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\|bu\|_{n,r}^0 \leq C(n, \mu_1) L_1(2r)^{\mu_1} \|u\|_{n,r}^1.$$

(b) Оценка $\|c\nabla u\|_{n/2,r}^0 \leq \|c\|_{n,r}^0 \|u\|_{n,r}^1$ получается в точности, как в пункте 2.А.

(c) Оценим норму $\|du\|_{n/2,r}^0$. Используя те же неравенства, что и в пункте (а), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{n/2} dx = \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{(n-2)/2} |u(x)| dx \\ & \leq C(n) \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{(n-2)/2} \int_{B(0,r)} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy dx \\ & = C(n) \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{(n-2)/2} |x-y|^{1-n} |\nabla u(y)| dy dx \\ & = C(n) \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} (|d(x)|^{(n-2)/2} |u(x)|^{(n-2)/2} |x-y|^{(1-n)(1-\sigma)}) \\ & \quad \times (|d(x)|^{1/2} |x-y|^{(1-n)\sigma+\delta}) (|\nabla u(y)| |d(x)|^{1/2} |x-y|^{-\delta}) dy dx \\ & \leq C(n) \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{n/2} |x-y|^{+n(1-n)(1-\sigma)/(n-2)} dy dx \right)^{(n-2)/n} \\ & \quad \times \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |x-y|^{n(1-n)\sigma+n\delta} dy dx \right)^{1/n} \\ & \quad \times \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |\nabla u(y)|^n |x-y|^{-n\delta} dy dx \right)^{1/n} \end{aligned}$$

Оценим каждый сомножитель. Для первого множителя получаем

$$\begin{aligned} & \left(\iint |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{n/2} |x-y|^{n(1-n)(1-\sigma)/(n-2)} dy dx \right)^{(n-2)/n} \\ & \leq C(\sigma, n) r^{(n-1)\sigma-1} \left(\int_{B(0,r)} |d(x)|^{n/2} |u(x)|^{n/2} dx \right)^{(n-2)/n}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второй сомножитель. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\iint |x-y|^{n(1-n)\sigma+n\delta} |d(x)|^{n/2} dy dx \right)^{1/n} \\ & \leq \left(\int \left(\int |x-y|^{n(1-n)\sigma+n\delta} dy \right) |d(x)|^{n/2} dx \right)^{1/n} \\ & \leq C(n, \mu_1, \sigma) L_1 r^{(1-n)\sigma+\delta+1} r^{\mu_1} = C(n, \mu_1, \sigma) L_1 r^{(1-n)\sigma+\delta+1+\mu_1}. \end{aligned}$$

Оценим третий сомножитель. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\iint |d(x)|^{n/2} |\nabla u(y)|^n |x-y|^{-n\delta} dy dx \right)^{1/n} \\ & \leq \left(\int |\nabla u(y)|^n \left(\int |d(x)|^{n/2} |x-y|^{-n\delta} dx \right) dy \right)^{1/n} \\ & \leq \|u\|_{n,r}^1 C(n, \mu_1, \delta) L_1 r^{\mu_1 - \delta}. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \delta < \mu_1$, $1/(n-1) < \sigma < (\delta+1)/(n-1)$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\|du\|_{n/2,r}^0 \leq C(n, \mu_1) L_1^2(r)^{2\mu_1} \|u\|_{n,r}^1.$$

Применяя полученные оценки и складывая (6) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{q,r}^1 & \leq C(n, q, A, \mu_1)(r^{2/3} + 1) \\ & \times \left[\left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + 2L_1 r^{\mu_1} + L_1^2 r^{2\mu_1} \right) \|u\|_{q,r}^1 + \|e\|_{q,r}^0 \right] + \|P_r(f)\|_{q,r}^1. \end{aligned}$$

Как в пункте 2.A, получаем требуемую оценку с соответствующей константой $C_1(r)$, где

$$C_1(r) = 1 - C(n, q, A, \mu_1)(r^{2/3} + 1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + 2L_1 r^{\mu_1} + L_1^2 r^{2\mu_1} \right].$$

2.D. Пусть $n = q = 2$, $p = 1$. Используя представление (5), получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,r}^1 & \leq \|Q_r((a-\delta)\nabla u + bu + e)\|_{2,r}^0 + \|P_r(c\nabla u + du)\|_{2,r}^0 + \|P_r(f)\|_{2,r}^0 \\ & + \|\nabla Q_r((a-\delta)\nabla u + bu + e)\|_{2,r}^0 + \|\nabla P_r(c\nabla u + du)\|_{2,r}^0 + \|\nabla P_r(f)\|_{2,r}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы применить оценки из леммы 1, покажем, что функции $c\nabla u$, du и bu удовлетворяют условиям, требуемым в упомянутой лемме.

Оценим $c\nabla u$. В силу предположений настоящей леммы получаем

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |c(x)| |\nabla u(x)| dx & \leq \left(\int_{B(0,r)} |c(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(0,r)} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq L_1 r^{\mu_1} \|u\|_{2,r}^1. \end{aligned}$$

Оценим du . Используя неравенство Коши, имеем

$$\int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)| dx \leq \left(\int_{B(0,r)} |d(x)| dx \right)^{1/2} \left(\int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим второй сомножитель. Так как

$$|u(x)| \leq C \int_{B(0,r)} |x-y|^{-1} |\nabla u(y)| dy,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)|^2 dx &\leq C \int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)| |\nabla u(y)| |x-y|^{-1} dy dx \\ &\leq C \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)|^2 |x-y|^{2(\sigma-1)} dy dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{B(0,r)} \int_{B(0,r)} |d(x)| |\nabla u(y)|^2 |x-y|^{-2\sigma} dy dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

что оценивается через

$$C(\mu_1, \sigma) L_1 r^{\mu_1} \|u\|_{2,r}^1 \left(\int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\int_{B(0,r)} |d(x)| |u(x)| dx \leq C(\mu_1) L_1^2 r^{2\mu_1} \|u\|_{2,r}^1.$$

Оценка $\|bu\|_{2,r}^0$ следует из оценки пункта 2.С.(а) для $n = 2$, т.е.

$$\|bu\|_{2,r}^0 \leq C(\mu_1) L_1 r^{\mu_1} \|u\|_{2,r}^1.$$

Применяя полученные оценки и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,r}^1 &\leq Cr \left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| \|u\|_{2,r}^1 + C(\mu_1) L_1 r^{\mu_1} \|u\|_{2,r}^1 + \|e\|_{2,r}^0 \right) \\ &\quad + C(\mu_1) L_1 (2r)^{\mu_1+1} (1 - \ln(2r)) (1 + L_1 (2r)^{\mu_1}) \|u\|_{2,r}^1 \\ &\quad + C \left(\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| \|u\|_{2,r}^1 + C(\mu_1) L_1 r^{\mu_1} \|u\|_{2,r}^1 + \|e\|_{2,r}^0 \right) \\ &\quad + C(\mu_1) L_1 (2r)^{\mu_1} (1 + L_1 (2r)^{\mu_1}) \|u\|_{2,r}^1 + \|P_r(f)\|_{2,r}^1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,r}^1 &\left(1 - C(r+1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + C(\mu_1) L_1 r^{\mu_1} \right] \right. \\ &\quad \left. - C(\mu_1) L_1 (2r)^{\mu_1} (1 + 2r - 2r \ln(2r)) (1 + L_1 (2r)^{\mu_1}) \right) \\ &\leq C(r+1) (\|e\|_{2,r}^0 + \|P_r(f)\|_{2,r}^1). \end{aligned}$$

Выбирая $r > 0$ так, что

$$\begin{aligned} 0 &< 1 - C(r+1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + C(\mu_1) L_1 r^{\mu_1} \right] \\ &\quad - C(\mu_1) L_1 (2r)^{\mu_1} (1 + 2r - 2r \ln(2r)) (1 + L_1 (2r)^{\mu_1}), \end{aligned}$$

получаем требуемую оценку. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Заменим в условиях леммы 2 шар $B(0, A)$ на полушар $G(0, A)$ и шар $B(0, r)$ на полушар $G(0, r)$. Пусть функции u, f, e равны нулю в окрестности сферической части поверхности полушара $G(0, r)$, но не обязательно на основании $\sigma_r = G(0, r) \cap \{x_n = 0\}$, и пусть $P_r(f)$ – ограничение на $G(0, r)$ функции $P_r(\bar{f})$, где $\bar{f}$ – нечетное относительно x_n продолжение функции f на $B(0, r)$. Тогда утверждение леммы 2 остается верным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} D(x, y) &= D(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= K(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}), \end{aligned}$$

где функция K определена перед леммой 1. Пусть $\varphi \in C_0^1(G(0, r))$. Тогда функция

$$\psi(x) = \int_{G(0, r)} (K(x - y) - D(x, y)) \varphi(y) dy$$

входит в класс $C^1(\bar{G}(0, r))$ и $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, если $x_n = 0$. Продолжим ψ нулем вне $G(0, r)$. Зафиксируем функцию u , удовлетворяющую (1). Тогда интегральное тождество (1) выполнено для всех $v \in C_0^1(G(0, r))$. Пусть $w \in C^1(\bar{G}(0, r))$, причем w равна нулю в окрестности сферической части поверхности полушара $G(0, r)$, а также равна нулю на основании σ_r этого полушара, но не обязательно в окрестности основания. Тогда можно заменить v на w в (1). Для доказательства этого утверждения продолжим w нулем вне $G(0, r)$ и рассмотрим функцию

$$w_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n) = w(x_1, x_2, \dots, x_n - \varepsilon).$$

Поскольку w_ε входит в класс $\text{Lip}_0(G(0, r))$ липшицевых функций с компактным носителем в $G(0, r)$, можно заменить v в (1) на w_ε . Устремляя ε к нулю, получаем, что тождество выполнено для w . Таким образом, можно заменить v в (1) на ψ . Пусть $v = \psi$ в интегральном тождестве. Применяя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{G(0, r)} \int_{G(0, r)} ((K_{x_i}(x - y) - D_{x_i}(x, y)) \varphi(y) [a^{ij}(x) u_{x_j}(x) + b^i(x) u(x) + e^i(x)] \\ &+ (K(x - y) - D(x, y)) \varphi(y) [c^i(x) u_{x_i}(x) + d(x) u(x) + f(x)]) dy dx = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\int_{G(0, r)} \varphi(y) \int_{G(0, r)} ((K_{x_i}(x - y) - D_{x_i}(x, y)) [a^{ij} u_{x_j} + b^i u + e^i] \\ &+ (K(x - y) - D(x, y)) [c^i u_{x_i} + d u + f]) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Так как последнее равенство имеет место для всех $\varphi \in C_0^1(G(0, r))$, получаем, что для почти всех $y \in G(0, r)$

$$\begin{aligned} &\int_{G(0, r)} ((K_{x_i}(x - y) - D_{x_i}(x, y)) [a^{ij} u_{x_j} + b^i u + e^i] \\ &+ (K(x - y) - D(x, y)) [c^i u_{x_i} + d u + f]) dx = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{G(0,r)} K_{x_i}(x-y)[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i] + K(x-y)[c^i u_{x_i} + du + f] dx \\ & - \int_{G(0,r)} (D_{x_i}(x,y)[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i] + D(x,y)[c^i u_{x_i} + du + f]) dx = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим второй интеграл и сделаем в нем замену переменных $z_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$, $z_n = -x_n$. Пусть

$$G^-(0, r) = B(0, r) \cap \{x_n \leq 0\}, \quad \vec{z}_{n-1} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}).$$

Тогда получаем

$$- \int_{G^-(0,r)} (D_{z_i}(\vec{z}_{n-1}, -z_n, y)[a^{ij}u_{z_j} + b^i u + e^i] + D(\vec{z}_{n-1}, -z_n, y)[c^i u_{z_i} + du + f]) dz.$$

Заметим, что $D(\vec{z}_{n-1}, -z_n, y) = K(z - y)$ и $D_{z_i}(\vec{z}_{n-1}, -z_n, y) = K_{z_i}(z - y)$, если $1 \leq i < n$, $D_{z_n}(\vec{z}_{n-1}, -z_n, y) = -K_{z_i}(z - y)$, если $i = n$.

Продолжим $[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i]$ и $[c^i u_{x_i} + du + f]$ на $G^-(0, r)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad [a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i](x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} [a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i](x_1, x_2, \dots, -x_n), \\ \text{если } x_n < 0 \text{ и } 1 \leq i < n, \\ -[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i](x_1, x_2, \dots, -x_n), \\ \text{если } x_n < 0 \text{ и } i = n; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad [c^i u_{x_i} + du + f](x_1, x_2, \dots, x_n) &= -[c^i u_{x_i} + du + f](x_1, x_2, \dots, -x_n), \\ &\text{если } x_n < 0. \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\int_{B(0,r)} (K_{x_i}(x-y)[a^{ij}u_{x_j} + b^i u + e^i] + K(x-y)[c^i u_{x_i} + du + f]) dx = 0. \quad (10)$$

Продолжим функцию u на $G^-(0, r)$ четно: $u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1, x_2, \dots, -x_n)$, если $x_n < 0$. Функции a^{ij}, b^i, c^i, d продолжаем так, что условия (а) и (б) выполнены (тот факт, что продолженные a^{ij} непрерывны в нуле, немедленно следует из условия $a^{ij}(0) = \delta^{ij}$). Представление (3) верно для новой функции u . Складывая (10) и (3), получаем представление для u в форме (4) из леммы 2. Окончание доказательства полностью повторяет пункт 2 леммы 2. Лемма 3 доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть G – ограниченная область с границей класса C^1 и для коэффициентов интегрального тождества (1) выполнены H_q^1 -условия на $\Gamma \supset G$ с $q \geq n/(n-1)$, где равенство имеет место только, если $q = n = 2$. Предположим, что $e \in L_q(G)$, $f \in L_p(G)$, где $p = qn/(n+q) \geq 1$, и что функция f удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{\Gamma \cap B(x,r)} |f(y)| dy \leq Lr^\mu$$

для некоторого $\mu > 0$ и всех $B(x, r)$, если $p = 1$. Пусть $u \in W^{1,q}(G)$ удовлетворяет (1) на G . Тогда

$$\|u\|_{q,G}^1 \leq C(\|e\|_{q,G}^0 + \|f\|_{p,G}^0 + \|u\|_{1,G}^0).$$

Если $q = n = 2$, $p = 1$, то норму $\|f\|_{p,G}^0$ заменяем на L . Константа C зависит только от n, m, M, q, G и функций a, b, c, d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для каждой точки $x_0 \in \overline{G}$ существуют окрестности $U(x_0)$ и $W(x_0)$, $U(x_0) \subset W(x_0) \subset \Gamma$, и такое взаимно-однозначное отображение ψ_{x_0} , что $W(x_0)$ и $U(x_0)$ переходят в $B(0, A)$ и $B(0, r)$, $0 < r < A$, $A < 1/2$, соответственно, если x_0 является внутренней точкой, и в $G(0, A)$ и $G(0, r)$, если x_0 – граничная точка. Число r будет выбрано ниже в пункте 3. Более того, отображение ψ_{x_0} обладает следующими свойствами:

- (а) ψ_{x_0} и $\psi_{x_0}^{-1}$ являются отображениями класса C^1 ;
- (б) $\tilde{a}^{ij}(\psi_{x_0}(x_0)) = a^{km}(x_0) \frac{\partial \psi_{x_0,i}}{\partial x_m} \frac{\partial \psi_{x_0,j}}{\partial x_k} = \delta^{ij}$;
- (с) якобиан ψ_{x_0} равен некоторой константе $J(x_0)$ и $C_1 < |J(x_0)| < C_2$ для всех $x_0 \in \overline{G}$, где константы C_1, C_2 зависят только от m, M .

Существование окрестностей и такого отображения немедленно следует из условий: G – область с границей класса C^1 и

$$m|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq M|\xi|^2 \quad (11)$$

для всех $x \in \overline{G}$, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

2. Так как система окрестностей $\{U(x_0)\}_{x_0 \in \overline{G}}$ является покрытием $\overline{G}$ и $\overline{G}$ – компакт, можно выбрать конечное подпокрытие $\{U(x_k)\}_{1 \leq k \leq K}$. Существует разбиение единицы $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K$, где каждая функция ζ_k класса C^1 имеет компактный носитель в $U(x_k)$. Пусть $w_k = \zeta_k u$, где u удовлетворяет интегральному тождеству (1). Положим

$$\tilde{e}^i = \zeta_k e^i - a^{ij} \zeta_{k,x_j} u, \quad \tilde{f} = \zeta_k f - c^i \zeta_{k,x_i} u + \zeta_{k,x_i} (a^{ij} u_{x_j} + b^i u + e^i). \quad (12)$$

Тогда w_k удовлетворяет (1) с коэффициентами $\tilde{e}$ и $\tilde{f}$ вместо e и f соответственно. Заметим, что $w_k, \tilde{e}, \tilde{f}$ имеют компактные носители в $U(x_k)$.

3. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют последовательности $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in W^{1,q}(G)$, $\{e_m\}_{m=1}^\infty \in L_q(G)$, $\{f_m\}_{m=1}^\infty \in L_p(G)$ (или $\{L_m\}_{m=1}^\infty$, если $p = 1$) такие, что

$$1) \|u_m\|_{q,G}^1 = 1 \text{ для всех } m \in \mathbb{N};$$

- 2) $\{u_m\}$ слабо сходится в $W^{1,q}(G)$;
- 3) $\{u_m\} \rightarrow 0$ в $L_1(G)$;
- 4) $\{e_m\} \rightarrow 0$ в $L_q(G)$;
- 5) $\{f_m\} \rightarrow 0$ в $L_p(G)$, если $p > 1$, и $L_m \rightarrow 0$, если $p = 1$.

Тогда $u_m \rightarrow 0$ в $L_q(G)$, что следует из 2), 3) и теоремы о вложении пространств Соболева.

Итак, $u_m = \sum_{k=1}^K \zeta_k u_m = \sum_{k=1}^K w_{m,k}$. Тогда

$$\|u_m\|_{q,G}^1 \leq \sum_{k=1}^K C_k \|w_{m,k}\|_{q,U(x_k)}^1.$$

Функция $w_{m,k}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{U(x_k)} (v_{x_i} (a^{ij} w_{m,k,x_j} + b^i w_{m,k} + \tilde{e}_m^i) + v (c^i w_{m,k,x_i} + dw_{m,k} + \tilde{f}_m)) dx = 0,$$

где $\tilde{e}_m$ и $\tilde{f}_m$ определены выше в (12). Используя отображение ψ_{x_k} , введенное в пункте 1, получаем

$$\int_{B(0,r)} (v_{x_i} (a^{ij} w_{m,k,x_j} + b^i w_{m,k} + \tilde{e}_m^i) + v (c^i w_{m,k,x_i} + dw_{m,k} + \tilde{f}_m)) dx = 0, \quad (13)$$

$$a^{ij}(0) = \delta^{ij}.$$

В случае, когда x_k является граничной точкой, соотношение (13) верно с $G(0,r)$ вместо $B(0,r)$. Выбирая $0 < r < A$ достаточно малым, чтобы лемма 2 и лемма 3 были применимы, получаем

$$\|w_{m,k}\|_{q,r}^1 \leq C_1 (\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 + \|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1). \quad (14)$$

4. Пусть $p > 1$. Оценим норму $\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0$. Имеем

$$\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 \leq \|\zeta_k e_m\|_{q,r}^0 + \|a \nabla \zeta_k u_m\|_{q,r}^0 \leq C(\zeta_k, \nabla \zeta_k, M) (\|e_m\|_{q,r}^0 + \|u_m\|_{q,r}^0).$$

Получаем, что $\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Теперь рассмотрим норму $\|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1$. Используя лемму 1 и оценки, полученные при доказательстве леммы 2, имеем

$$\begin{aligned} \|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1 &\leq C(\zeta_k, A, r, q, n) (\|f_m\|_{p,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 \|u_m\|_{q,r}^0 + \|b\|_{n,r}^0 \|u_m\|_{q,r}^0 + \|e_m\|_{q,r}^0) \\ &\quad + \|P_r(\zeta_{k,x_i} a^{ij} u_{m,x_j})\|_{q,r}^1. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим слагаемое $\|P_r(\zeta_{k,x_i} a^{ij} u_{m,x_j})\|_{q,r}^1$. Заметим, что $t_m = \zeta_{k,x_i} a^{ij} u_{m,x_j}$ слабо сходится к нулю в L_q , т.е. для всех $\varphi \in L_p$, $1/p + 1/q = 1$, имеет место соотношение

$$\int_{D_r} \varphi(x) t_m(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где D_r — обозначение для шара $B(0,r)$ или полушара $G(0,r)$ в зависимости от рассматриваемого случая (граничной или внутренней точки). Если $\psi \in L_p$, то $P_r(\psi) \in L_p$,

$\nabla P_r(\psi) \in L_p$, что немедленно следует из леммы 1. Заменяя φ в (16) на $P_r(\psi)$ (или на $\nabla P_r(\psi)$, что понадобится ниже) и используя теорему Фубини, получаем

$$\int_{D_r} \left(\int_{D_r} K(x-y)\psi(y) dy \right) t_m(x) dx = \int_{D_r} \psi(y) \left(\int_{D_r} K(x-y)t_m(x) dx \right) dy$$

и аналогично для $\nabla P_r(\psi)$. Поэтому последовательности $P_r(t_m)$ и $\nabla P_r(t_m)$ слабо сходятся к нулю в L_q . Поэтому последовательность $P_r(t_m)$ слабо сходится к нулю в $W^{1,q}$. Тогда она сильно сходится к нулю в L_q . Так как последовательность $\nabla P_r(t_m)$ слабо сходится к нулю в L_q , а последовательность $\nabla^2 P_r(t_m)$ равномерно ограничена в L_q (см. лемму 1), получаем, переходя к подпоследовательности, что последовательность $\nabla P_r(t_m)$ слабо сходится к нулю в $W^{1,q}$. Тогда эта последовательность сильно сходится к нулю в L_q . Таким образом, $\{P_r(t_m)\}$ сходится сильно к нулю в $W^{1,q}$. Следовательно, согласно неравенству (15) получаем

$$\|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1 \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда из оценки (14) следует, что $\|w_{m,k}\|_{q,r}^1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и всех $k \leq K$. Значит, $\|u_m\|_{q,G}^1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Получили противоречие с предположением, что $\|u_m\|_{q,G}^1 = 1$. В случае $n = q = 2$ доказательство аналогично. Теорема доказана.

Для локально интегрируемой функции u положим

$$\|u\|_{M^{\mu_1}(\Gamma)} = \inf \left\{ L : \int_{\Gamma \cap B(x,r)} |u(x)| dx \leq L^n r^{n\mu_1} \quad \text{для всех } B(x,r) \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что *функция u принадлежит классу $M^{\mu_1}(\Gamma)$* , если u интегрируема на Γ и $\|u\|_{M^{\mu_1}(\Gamma)} < \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\delta > 0$. Будем говорить, что коэффициенты a, b, c , и d удовлетворяют $H_{q,\delta}^1$ -условиям на области Γ , если $a^{ij} \in C^{0,\delta}(\Gamma)$, функции b^i, c^i и d измеримы и

- (а) если $n/(n-1) < q < n$, то $b^i, c^i \in L_{n+\delta}(\Gamma)$, $d \in L_{(n+\delta)/2}(\Gamma)$;
- (б) если $q = n \geq 2$, то $|b|^n, |c|^n, |d|^{n/2} \in M^{\mu_1}(\Gamma)$;
- (с) если $q > n$, то $b^i \in L_q(\Gamma)$, $c^i \in L_{n+\delta}(\Gamma)$, $d \in L_p(\Gamma)$, $p = nq/(n+q)$.

СЛЕДСТВИЕ. Заменяем H_q^1 в условиях теоремы на $H_{q,\delta}^1$ с некоторым $\delta > 0$. Предположим, что $\|a\|_{C^{0,\delta}}, \|b\|, \|c\|, \|d\| \leq C_0$ и $c_1 \leq m \leq M \leq c_2$ для некоторых констант c_1, c_2, C_1 , где нормы $\|b\|, \|c\|, \|d\|$ определяются следующим образом:

- (а) если $n/(n-1) < q < n$, то

$$\|b\| = \|b\|_{L_{n+\delta}(\Gamma)}, \quad \|c\| = \|c\|_{L_{n+\delta}(\Gamma)}, \quad \|d\| = \|d\|_{L_{(n+\delta)/2}(\Gamma)};$$

- (б) если $q = n \geq 2$, то

$$\|b\| = \||b|^n\|_{M^{\mu_1}(\Gamma)}, \quad \|c\| = \||c|^n\|_{M^{\mu_1}(\Gamma)}, \quad \|d\| = \||d|^{n/2}\|_{M^{\mu_1}(\Gamma)};$$

- (с) если $q > n$, то

$$\|b\| = \|b\|_{L_q(\Gamma)}, \quad \|c\| = \|c\|_{L_{n+\delta}(\Gamma)}, \quad \|d\| = \|d\|_{L_p(\Gamma)}, \quad p = \frac{nq}{n+q}.$$

Тогда существует число $C = C(n, q, G, C_0, c_1, c_2)$, с которым заключение теоремы выполнено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда существуют последовательности $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in W^{1,q}(G)$, $\{e_m\}_{m=1}^\infty \in L_q(G)$, $\{f_m\}_{m=1}^\infty \in L_p(G)$ (или $\{L_m\}_{m=1}^\infty$, если $p = 1$) такие, что

- (1) $\|u_m\|_{q,G}^1 = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$;
- (2) $\{u_m\}$ сходится слабо в $W^{1,q}(G)$;
- (3) $\{u_m\} \rightarrow 0$ в $L_1(G)$;
- (4) $\{e_m\} \rightarrow 0$ в $L_q(G)$;
- (5) $\{f_m\} \rightarrow 0$ в $L_p(G)$, если $p > 1$, и $L_m \rightarrow 0$, если $p = 1$.

Тогда $u_m \rightarrow 0$ в $L_q(G)$, что следует из 2) и 3) и теоремы о вложении пространств Соболева. Существуют $\{a_m\}_{m=1}^\infty$, $\{b_m\}_{m=1}^\infty$, $\{c_m\}_{m=1}^\infty$, $\{d_m\}_{m=1}^\infty$ такие, что

$$\|a_m\|, \|b_m\|, \|c_m\|, \|d_m\| \leq C_0$$

и выполнено равенство

$$\int_G v_{x_i} (a_m^{ij} u_{m,x_j} + b_m^i u_m + e_m^i) + v (c_m^i u_{m,x_i} + d_m u_m + f_m) dx = 0$$

для всех $v \in C_0^1(G)$. Тогда, повторяя часть 3 доказательства теоремы и используя сказанное выше, получаем

$$\int_{B(0,r)} (v_{x_i} (a_m^{ij} w_{m,k,x_j} + b_m^i w_{m,k} + \tilde{e}_m^i) + v (c_m^i w_{m,k,x_i} + d_m w_{m,k} + \tilde{f}_m)) dx = 0, \\ a_m^{ij}(0) = \delta^{ij}.$$

2. Докажем, что существует $r \in (0, A)$ столь малое, что (14) выполнено с константой C_1 , не зависящей от m .

1) Так как $\|a_m(x)\|_{C^{0,\delta}(B(0,A))} \leq C(A, C_0, c_1, c_2)$, то последовательность $\{a_m(x)\}$ равномерно непрерывна.

2) Если $n/(n-1) < q < n$, то согласно неравенству Гёльдера имеем

$$\|b\|_{n,r} \leq c(n) r^{(n+\delta)/\delta} \|b\|_{n+\delta,r} \leq c(n) r^{(n+\delta)/\delta} C_0, \\ \|c\|_{n,r} \leq c(n) r^{(n+\delta)/\delta} \|c\|_{n+\delta,r} \leq c(n) r^{(n+\delta)/\delta} C_0, \\ \|d\|_{n/2,r} \leq c(n) r^{2(n+\delta)/\delta} \|d\|_{(n+\delta)/2,r} \leq c(n) r^{2(n+\delta)/\delta} C_0.$$

Применяя часть 2.A доказательства леммы 2 и 1), 2), получаем

$$C_1(r) = 1 - C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) \left[\max_{x \in B(0,r)} |a(x) - \delta| + \|b\|_{n,r}^0 + \|c\|_{n,r}^0 + \|d\|_{n/2,r}^0 \right] \\ \geq 1 - C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) [C(A, C_0, c_1, c_2) r^{2/3} + c(n, C_0) r^{(n+\delta)/\delta} + \\ + c(n, C_0) r^{(n+\delta)/\delta} + c(n, C_0) r^{2(n+\delta)/\delta}].$$

Существует $r \in (0, A)$ столь малое, что $C_1(r) > 1/2$ и

$$\|w_{m,k}\|_{q,r}^1 \leq 2C(n, q, A)(r^{2/3} + 1) (\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 + \|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1).$$

Итак, имеет место требуемая оценка.

3) Если $q > n$, то по неравенству Гёльдера получаем

$$\|c\|_{n,r} \leq c(n)r^{(n+\delta)/\delta} \|c\|_{n+\delta,r} \leq c(n)r^{(n+\delta)/\delta} C_0.$$

Повторяя рассуждения части 2.В доказательства леммы 2 и используя 1), 3), приходим, как и выше, к требуемой оценке.

4) Если $q = n$, то заменим L_1 на C_0 в пункте 2.С и в пункте 2.Д доказательства леммы 2. Повторяя доказательство леммы 2 и используя 1), получаем требуемую оценку. Итак,

$$\|w_{m,k}\|_{q,r}^1 \leq C_1 (\|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 + \|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1),$$

где C_1 зависит только от $n, q, r, A, C_0, c_1, c_2$.

3. Окончание доказательства практически дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы. Дополнительно заметим, что имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_m\|_{q,r}^0 &\leq \|\zeta_k e_m\|_{q,r}^0 + \|a \nabla \zeta_k u_m\|_{q,r}^0 \leq C(\zeta_k, \nabla \zeta_k, c_2, c_1, C_0) (\|e_m\|_{q,r}^0 + \|u_m\|_{q,r}^0), \\ \|P_r(\tilde{f}_m)\|_{q,r}^1 &\leq C(n, q, r, A) \|\tilde{f}_m\|_{p,r}^0 \\ &\leq C(n, q, r, A, \zeta_k, \nabla \zeta_k) (\|f_m\|_{p,r}^0 + \|c_m\|_{n,r}^0 \|u_m\|_{q,r}^0 + \|b\|_{m,r}^0 \|u_m\|_{q,r}^0 + \|e_m\|_{q,r}^0) \\ &\quad + \|P_r(\zeta_{k,x_i} a_m^{ij} u_{m,x_j})\|_{q,r}^1, \end{aligned}$$

где $\|c_m\|, \|b_m\| \leq C_0$. Так как $\{u_{m,x_j}\}$ слабо сходится к нулю в L_q и $\|\zeta_{k,x_i} a_m^{ij}\|_{C^{0,\delta}} \leq C(\nabla \zeta_k, C_0, c_1, c_2)$, заключаем, что последовательность $t_m = \zeta_{k,x_i} a_m^{ij} u_{m,x_j}$ слабо сходится к нулю в L_q . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим множество $F(\Gamma)$ эллиптических уравнений на подобласти G области Γ

$$\partial_{x_i}(a^{ij} \partial_{x_j} u + b^i u) - c^i \partial_{x_i} u - du = f - \partial_{x_i} e^i,$$

где множество $\{a\}$ компактно в $C(\Gamma)$ и существуют положительные константы c_1, c_2 такие, что

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_2 |\xi|^2$$

для всех $x \in \overline{G}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $a \in \{a\}$. Предположим, что множества $\{b\}, \{c\}, \{d\}$ удовлетворяют следующим условиям:

- (а) если $n/(n-1) < q < n$, то $\{b\}, \{c\} \subset L_n(\Gamma)$, $\{d\} \subset L_{n/2}(\Gamma)$ и множества функций $\{|b|^n\}, \{|c|^n\}, \{|d|^{n/2}\}$ имеют компактные замыкания в слабой топологии $L_1(\Gamma)$;
- (б) если $q = n \geq 2$, то множества $\{|b|^n\}, \{|c|^n\}, \{|d|^{n/2}\}$ ограничены в $M^{\mu_1}(\Gamma)$;
- (в) если $q > n$, то множество $\{b\}$ ограничено в $L_q(\Gamma)$, множество $\{c\}$ ограничено в $L_n(\Gamma)$, множество $\{d\}$ ограничено в $L_p(\Gamma)$, где $p = nq/(n+q)$, и множество $\{|c|^n\}$ имеет компактное замыкание в слабой топологии $L_1(\Gamma)$.

Пусть G – ограниченная область с границей класса C^1 и пусть $q \geq n/(n-1)$, где равенство имеет место только, если $q = n = 2$. Предположим, что $\{e\} \subset L_q(G)$, $\{f\} \subset L_p(G)$, где $p = qn/(n+q) \geq 1$, и функции из множества $\{f\}$ удовлетворяют следующему условию:

$$\int_{\Gamma \cap B(x,r)} |f(y)| dy \leq L(f)r^{\mu(f)} \quad \text{для некоторого } \mu(f) > 0 \text{ и всех } B(x,r), \text{ если } p = 1.$$

Пусть $u \in W^{1,q}(G)$ удовлетворяет некоторому уравнению из $F(\Gamma)$ в слабом смысле. Тогда

$$\|u\|_{q,G}^1 \leq C(\|e\|_{q,G}^0 + \|f\|_{p,G}^0 + \|u\|_{1,G}^0).$$

Если $q = n = 2$ и $p = 1$, то норму $\|f\|_{p,G}^0$ заменяем на $L(f)$. Число C зависит только от $n, q, G, \Gamma, c_0, c_1$ и множества $F(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что множество $Q \subset L_1(\Gamma)$ имеет компактное замыкание в слабой топологии $L_1(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда Q равномерно интегрируемо, а Q равномерно интегрируемо тогда и только тогда, когда Q имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. Применяя этот факт и повторяя доказательство следствия, получаем требуемое.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Богачеву за плодотворные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Morrey C. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1966.
- [2] Богачев В. И., Рёкнер М. Обобщение теоремы Хасьминского о существовании инвариантных мер для локально интегрируемых сносов // Теория вероятн. и ее прим. 2000. Т. 45. №3. С. 417–436.
- [3] Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M. On regularity of transition probabilities and invariant measures of singular diffusions under minimal conditions // Comm. Partial Differential Equations. 2001. V. 26. №11–12. P. 2037–2080.
- [4] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
- [6] Stampacchia G. Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus: Les Presses de l'Université de Montréal, 1966.
- [7] Trudinger N. S. Linear elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa (3). 1973. V. 27. P. 265–308.