Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Теоремы Брауэра, Какутани и Борсука–Улама, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 471–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:37:54

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА, КАКУТАНИ И БОРСУКА–УЛАМА

А. Ю. Воловиков

1. Введение. Теорема Брауэра о неподвижной точке является следствием теоремы Борсука–Улама (см., например, [1]–[4]). Доказательства этого факта можно разделить на две группы – не прямые, как в [1], [2], [4], и прямое доказательство, приведенное в работе [3]. В последней указана явная конструкция на уровне отображений – по отображению n -мерного шара в себя строится вспомогательное отображение n -мерной сферы в n -мерное евклидово пространство со свойством: по крайней мере один из склеивающихся антиподов (существующих в силу теоремы Борсука–Улама) определяет неподвижную точку отображения шара.

Основываясь на тех же идеях, что и в [3], мы строим отображение, обладающее теми же свойствами, но заданное более простой формулой (упрощение достигается просто за счет того, что мы рассматриваем стандартный евклидов шар, а не куб – шар в норме максимум модуля координат, как в [3]). Тем самым, прямое рассуждение, выводящее одну теорему из другой, становится более простым и коротким. Кроме того, мы покажем, что многозначная теорема об антиподах влечет многозначную версию теоремы Брауэра, и, в частности, теорему Какутани. Эти же рассуждения применимы и к бесконечномерным обобщениям теоремы Брауэра, т.е. к теореме Шаудера и ее многозначным обобщениям, но мы в этой заметке их не рассматриваем. Краткое описание конструкции было приведено в работе автора [5].

2. Обозначим через $B^n \subset \mathbb{R}^n$ и $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ соответственно стандартные n -мерные шар и сферу единичного радиуса с центром в начале координат.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Брауэра). *У любого непрерывного отображения $f: B^n \rightarrow B^n$ имеется неподвижная точка.*

Множество неподвижных точек отображения f будем обозначать через $\text{Fix } f$.

ТЕОРЕМА 2 (теорема Борсука–Улама). *Для любого непрерывного отображения $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ найдется точка $x \in S^n$ такая, что $g(x) = g(-x)$.*

Пусть на пространстве X действует инволюция T (или равносильно действует группа $\mathbb{Z}_2$ порядка 2). Для отображения $g: X \rightarrow Y$ в некоторое пространство Y положим

$$A(g) = \{x \in X \mid g(x) = g(Tx)\}.$$

В этих обозначениях теорема Борсука–Улама утверждает, что $A(g) \neq \emptyset$ для любого непрерывного отображения $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где на сфере рассматривается антиподальная инволюция (т.е. $Tx = -x$, $x \in S^n$).

Покажем с помощью прямой конструкции на уровне отображений, что теорема Брауэра является следствием теоремы Борсука–Улама.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00705.

Для заданного отображения $f: B^n \rightarrow B^n$ евклидова n -мерного шара в себя определим отображение цилиндра $g: B^n \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$g(x, t) = (t + 1)(f(x) - x).$$

На цилиндре действует инволюция по формуле $T(x, t) = (-x, -t)$. Поскольку граница цилиндра $\mathbb{Z}_2$ -гомеоморфна n -мерной сфере, по теореме Борсука–Улама найдется точка (x^*, t^*) на границе цилиндра такая, что $g(x^*, t^*) = g(-x^*, -t^*)$. Покажем, что хотя бы одна из точек x^* или $-x^*$ является неподвижной точкой отображения f . Действительно, если $(x^*, 1) \in A(g)$, то равенство $g(x^*, 1) = g(-x^*, -1)$ дает $2(f(x^*) - x^*) = 0$, т.е. x^* – неподвижная точка отображения f . Если же $(x^*, -1) \in A(g)$, то $2(f(-x^*) + x^*) = 0$, т.е. $-x^*$ – неподвижная точка.

Пусть теперь $t^* \in (-1, 1)$ и $(x^*, t^*) \in A(g)$. Тогда точки x^* и $-x^*$ лежат на границе $\partial B^n = S^{n-1}$ шара B^n и $(t^* + 1)(f(x^*) - x^*) = (-t^* + 1)(f(-x^*) + x^*)$, при этом $t^* + 1 > 0$ и $-t^* + 1 > 0$. Поэтому равенство может выполняться, только если $f(x^*) - x^* = 0$ и $f(-x^*) + x^* = 0$. Действительно, векторы $f(x^*) - x^*$ и $f(-x^*) + x^*$, отложенные соответственно от x^* и $-x^*$, направлены внутрь шара. Следовательно, их проекции на направление вектора x^* имеют разные знаки, если предположить, что они не равны нулю. Таким образом, в этом случае обе граничные точки x^* и $-x^*$ являются неподвижными точками отображения f .

3. Пусть заданы непрерывные отображения $\pi: Z \rightarrow B^n$ и $f: Z \rightarrow B^n$. Определим многозначное отображение шара B^n в себя формулой $F = f \circ \pi^{-1}: B^n \rightarrow B^n$. Положим

$$\text{Fix } F = \{x \in B^n \mid x \in F(x)\}.$$

Точки множества $\text{Fix } F$ называются неподвижными точками многозначного отображения F .

Определим $g: Z \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой

$$g(z, t) = (t + 1)[f(z) - \pi(z)].$$

Пусть $S^{n-1} = \partial B^n$ – граничная сфера и S – граница цилиндра $B^n \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, т.е. $S = B^n \times \{-1\} \cup B^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times (-1, 1)$. Пространство S и n -мерная сфера $\mathbb{Z}_2$ -гомеоморфны.

Рассмотрим $\pi \times \text{id}: Z \times [-1, 1] \rightarrow B^n \times [-1, 1]$, где id – тождественное отображение отрезка $[-1, 1]$. Определим $Z' \subset Z \times [-1, 1]$ как $Z' = (\pi \times \text{id})^{-1}S$ и положим $\pi' = (\pi \times \text{id})|_{Z'}$. Таким образом, имеем отображения $\pi': Z' \rightarrow S$ и $g: Z' \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим многозначное отображение G формулой $G = g \circ (\pi')^{-1}: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ и положим

$$A(G) = \{(x, t) \in S \mid G(x, t) \cap G(-x, -t) \neq \emptyset\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $A(G) \neq \emptyset$, то $\text{Fix } F \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x^*, t^*) \in S$ – такая точка, что $G(x^*, t^*) \cap G(-x^*, -t^*) \neq \emptyset$. Тогда найдутся $z_1, z_2 \in Z$ такие, что $\pi z_1 = -\pi z_2 = x^*$ и $g(z_1, t^*) = g(z_2, t^*)$, т.е.

$$(t^* + 1)[f(z_1) - x^*] = (-t^* + 1)[f(z_2) + x^*]. \quad (1)$$

Если $t^* = 1$, то $2[f(z_1) - x^*] = 0$, поэтому $f(z_1) = x^*$, т.е. $x^* \in F(x^*)$. Если $t^* = -1$, то $2[f(z_2) + x^*] = 0$, поэтому $f(z_2) = -x^*$, и, поскольку $\pi z_2 = x^*$, мы получаем, что $-x^* \in F(-x^*)$.

Пусть теперь $t^* \in (-1, 1)$. Тогда $x^* \in S^{n-1} = \partial B^n$.

Умножая равенство (1) скалярно на вектор x^* , получим

$$(t^* + 1)[(f(z_1), x^*) - 1] = (-t^* + 1)[(f(z_2), x^*) + 1].$$

Левая часть предыдущего равенства неположительна, а правая – неотрицательна, и, поскольку $t^* + 1 > 0$ и $-t^* + 1 > 0$, равенство может выполняться лишь в случае, когда $(f(z_1), x^*) = 1$ и $(f(z_2), x^*) = -1$, откуда легко следует, что $f(z_1) = x^*$ и $f(z_2) = -x^*$. Действительно, рассмотрим, например, первое равенство. Имеем $(f(z_1), x^*) = |f(z_1)| \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $f(z_1)$ и x^* . Поскольку $|f(z_1)| \cos \varphi = 1$ и $f(z_1) \in B^n$, получаем, что $|f(z_1)| = 1$, $\varphi = 0$,

т.е. $f(z_1) = x^*$. Аналогичным образом получаем, что $f(z_2) = -x^*$. Таким образом, в случае $t^* \in (-1, 1)$ как x^* , так и $-x^*$ являются неподвижными точками многозначного отображения F .

Нетрудно видеть, что если $F: B^n \rightarrow B^n$ имеет ациклические над полем $\mathbb{Z}_2$ образы, то и построенное по нему отображение G обладает этим свойством. Ациклическость (для G) означает, что для любого $x \in S^n$ пространство $G(x)$ связно и во всех положительных размерностях имеет тривиальные чеховские группы когомологий с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_2$.

Обычно рассматриваются полунепрерывные сверху отображения. Предыдущие конструкции применимы к таким отображениям, если взять график многозначного отображения и рассматривать две проекции – на область определения и на область значений.

На случай многозначных отображений теоремы Брауэра и Борсука–Улама обобщались многими авторами для разных классов отображений (см., например, [6], [7], [1], [8]). Частным случаем полученных в указанных работах результатов является следующее (далеко не самое общее) утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение с компактными и ациклическими над полем $\mathbb{Z}_2$ образами. Тогда $A(G) \neq \emptyset$.

Предложение 1 показывает, что из этой теоремы вытекает следующий тоже хорошо известный результат.

ТЕОРЕМА 4. У любого полунепрерывного сверху многозначного отображения $F: B^n \rightarrow B^n$ с ациклическими над полем $\mathbb{Z}_2$ образами имеется неподвижная точка.

Поскольку выпуклые множества, очевидно, ациклически, предыдущая теорема в качестве следствия имеет следующее классическое утверждение.

ТЕОРЕМА 5 (теорема Какутани). У любого полунепрерывного сверху многозначного отображения $F: B^n \rightarrow B^n$ с выпуклыми образами имеется неподвижная точка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Granas A. // Rozprawy Math. 1962. V. 30. P. 1–93.
2. Dugundji J., Granas A. Fixed Point Theory. Warsaw: Polish Scientific Publishers, 1982.
3. Su F. E. // Amer. Math. Monthly. 1997. V. 104. №9. P. 855–859.
4. Matousek J. Using the Borsuk–Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2003.
5. Воловиков А. Ю. // Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 83–97.
6. Jaworowski J. // Bull. Acad. Sci. Polon. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1956. V. 4. P. 187–198.
7. Granas A. // Bull. Acad. Sci. Polon. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1959. V. 7. №5. P. 123–129.
8. Geba K., Gorniewicz L. // Bull. Polon. Acad. Sci. Ser. Math. 1986. V. 34. №5–6. P. 315–322.

Московский институт радиоэлектроники и автоматики
E-mail: a_volov@list.ru

Поступило
28.06.2005