Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера и строго регулярные матрицы, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 3, 474–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:22:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОКСТЕРА И СТРОГО РЕГУЛЯРНЫЕ МАТРИЦЫ

В. А. Колмыков

Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями (или даже псевдоотражениями) относительно некоторого набора гиперплоскостей. Наиболее употребительным является случай (см. [1, § 2], [2, гл. V, § 6 и упр. к § 6]), когда пространство n -мерно, а множество псевдоотражений n -элементно. Данные о системе псевдоотражений составляют $(n \times n)$ -матрицу. Наоборот, с каждой квадратной матрицей A связана некоторая система псевдоотражений и некоторое преобразование Кокстера, матрица которого обозначается $C(A)$.

Матрица называется *регулярной*, если ее определитель не равен нулю, и *строго регулярной*, если не равны нулю все ее ведущие (по другой терминологии угловые) миноры.

Оказывается (теорема 1), что матрица строго регулярна, если и только если она регулярна и представима в виде $C(A)$. Это утверждение является существенным усилением первой теоремы из [3].

Очень интересно, что понятие преобразования Кокстера связано с некоторыми усилениями понятий регулярности и нерегулярности матриц. В [4] рассматривалось преобразование Кокстера, соответствующее ациклической матрице A . Было установлено, что наличие или отсутствие минуса единицы в спектре такого преобразования Кокстера, не зависит от замены внедиагональных ненулевых элементов матрицы A на любые ненулевые числа. Чтобы лучше разобраться в этом явлении, в [5] было введено понятие инертности матрицы (сохранение регулярности или нерегулярности при заменах ненулевых элементов любыми ненулевыми числами). Исследование инертных матриц оказывается интересным для теории графов и дает возможность легко доказать теорему 6.1 из [4]. Кроме того, в [5] обнаружено приложение понятия инертности матриц в квантовой химии.

Матрицу назовем *почти строго регулярной*, если не равны нулю все ее ведущие миноры кроме минора максимального порядка. Мы доказываем (теорема 2), что матрица строго регулярна или почти строго регулярна тогда и только тогда, когда она единственным образом представима в виде $C(A)$.

1. Формулировка результатов. Через $M(n, K)$ обозначим множество всех $(n \times n)$ -матриц с элементами из поля K . Пусть $A \in M(n, K)$. Через $R_i(A)$ обозначим $(n \times n)$ -матрицу, которая получится, если в единичной матрице из i -го столбца вычесть i -й столбец матрицы A . Положим

$$C(A) = R_1(A)R_2(A) \cdots R_n(A).$$

Если в линейном пространстве зафиксирован базис, то линейный оператор, имеющий в этом базисе матрицу $C(A)$, называется *преобразованием Кокстера*. (Предполагается правостороннее соглашение: строка координат справа умножается на матрицу оператора.)

Пусть $B \in M(n, K)$. Определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы B , обозначим $\Delta_k(B)$. Матрица B называется *строго регулярной* (соответственно *почти строго регулярной*), если $\Delta_k(B) \neq 0$ для любого $k \leq n$ (соответственно, если $\Delta_n(B) = 0$ и $\Delta_k(B) \neq 0$ для любого $k \leq n - 1$).

ТЕОРЕМА 1. Матрица из $M(n, K)$ строго регулярна, если и только если она регулярна и представима в виде $C(A)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 2$. Матрица из $M(n, K)$ строго регулярна или почти строго регулярна тогда и только тогда, когда она единственным образом представима в виде $C(A)$.

2. Доказательства теорем. При умножении матрицы справа на $R_k(A)$ сохраняются все столбцы с номерами $i \neq k$.

ЛЕММА 1. Пусть $A, A' \in M(n, K)$, числа $i_1, \dots, i_s$ попарно различны и принадлежат множеству $\{1, \dots, n\}$, а матрицы $R_{i_1}(A), \dots, R_{i_{s-1}}(A)$ регулярны. Тогда из равенства $R_{i_1}(A) \cdots R_{i_s}(A) = R_{i_1}(A') \cdots R_{i_s}(A')$ следует, что $R_{i_m}(A) = R_{i_m}(A')$ для любого m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного перед леммой следует, что i_1 -й столбец матрицы $R_{i_1}(A) \cdots R_{i_s}(A)$ такой же, как у матрицы $R_{i_1}(A)$. Значит, из равенства $R_{i_1}(A) \cdots R_{i_s}(A) = R_{i_1}(A') \cdots R_{i_s}(A')$ следует, что $R_{i_1}(A) = R_{i_1}(A')$. Отсюда $R_{i_2}(A) \cdots R_{i_s}(A) = R_{i_2}(A') \cdots R_{i_s}(A')$.

Повторяя все для набора $i_2, \dots, i_s$, получаем, что $R_{i_2}(A) = R_{i_2}(A')$. Аналогично получаем, что $R_{i_m}(A) = R_{i_m}(A')$ для любого $m \leq s - 1$.

ЛЕММА 2. Справедливо равенство

$$\Delta_k(C(A)) = \prod_{i=1}^k |R_i(A)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in M(n, K)$. Матрицу, элементы которой стоят на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы B , обозначим $M_k(B)$.

Положим $R_i = R_i(A)$. Из сказанного перед леммой 1 следует, что $M_k(C(A)) = M_k(R_1 \cdots R_k)$.

Через $T_m(n, K)$ обозначим множество всех матриц из $M(n, K)$, которые имеют блочный вид

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где $B_{11} \in M(m, K)$, B_{12} — нулевая матрица, а B_{22} — единичная.

Если $l \leq m$, то $R_1 \cdots R_l \in T_m(n, K)$. Если $X, Y \in T_m(n, K)$, то $M_m(XY) = M_m(X)M_m(Y)$ и $\Delta_{m+1}(X) = \Delta_m(X)$. Поэтому

$$|M_s(R_1 \cdots R_s)| = |M_s(R_1 \cdots R_{s-1})M_s(R_s)| = |M_{s-1}(R_1 \cdots R_{s-1})| |M_s(R_s)|.$$

Отсюда

$$|M_k(R_1 \cdots R_k)| = \prod_{i=1}^k |M_i(R_i)|,$$

но $|M_i(R_i)| = |R_i|$.

Матрицу, получающуюся из единичной матрицы I заменой i -го столбца столбцом L , обозначим I_i^L .

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 2$ и матрица $B \in M(n, K)$ не является ни строго регулярной, ни почти строго регулярной. Если уравнение $C(X) = B$ имеет хотя бы одно решение, то решений бесконечно много.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(A) = B$. Для доказательства бесконечности множества решений уравнения $C(X) = B$ достаточно доказать бесконечность множества решений уравнения

$$R_1(A) \cdots R_{n-1}(A)I_n^Y = B$$

(одним из его решений является последний столбец матрицы $R_n(A)$). Это уравнение равносильно уравнению $R_1(A) \cdots R_{n-1}(A)Y = b_n$, где b_n — последний столбец матрицы B . Теперь достаточно доказать, что $|R_1(A) \cdots R_{n-1}(A)| \neq 0$.

Так как $\Delta_k(B) = 0$ для некоторого $k \leq n - 1$, то из леммы 2 следует, что $|R_k(A)| = 0$ для некоторого $k \leq n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Через $J(n, K)$ обозначим подмножество в $M(n, K)$, состоящее из всех строго регулярных и всех почти строго регулярных матриц.

1) Пусть $B \in J(n, K)$. Докажем, что матрица B представляется в виде $C(A)$.

Если (i, i) -й элемент матрицы I_i^L не равен нулю, то эта матрица обратима, а обратная к ней имеет вид I_i^U . Если $F \in M(n, K)$, то умножение матрицы F слева на I_i^L равносильно прибавлению ко всем строкам матрицы F ее i -й строки, умноженной на некоторое (каждый раз на свое) число.

Так как $B \in J(n, K)$, то можно подобрать регулярную матрицу вида $I_1^{L_1}$ так, что в первом столбце матрицы $I_1^{L_1}B$ первый элемент будет равен единице, а остальные – нулю. При этом $I_1^{L_1}B \in J(n, K)$. Затем можно подобрать регулярную матрицу вида $I_2^{L_2}$ так, что во втором столбце матрицы $I_2^{L_2}I_1^{L_1}B$ второй элемент будет равен единице, а остальные – нулю. При этом $I_2^{L_2}I_1^{L_1}B \in J(n, K)$. Продолжая этот процесс для столбцов с номерами $3, \dots, n-1$, получим $I_{n-1}^{L_{n-1}} \dots I_1^{L_1}B = I_n^{U_n}$ для некоторых $L_1, \dots, L_{n-1}, U_n$. Поэтому $B = I_1^{U_1} \dots I_n^{U_n}$, т.е. B имеет вид $C(A)$.

2) Пусть $B \in J(n, K)$. Покажем, что представление матрицы B в виде $C(A)$ единственно.

Пусть $B = C(A) = C(A')$. Из леммы 2 следует, что $|R_i(A)| \neq 0$ и $|R_i(A')| \neq 0$ для любого $i \leq n-1$. Из этого и леммы 1 следует, что $R_i(A) = R_i(A')$ для любого $i \leq n$. Поэтому $A = A'$.

3) Пусть $B \in M(n, K)$ и уравнение $C(X) = B$ имеет единственное решение. Из леммы 3 следует, что $B \in J(n, K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из теоремы 2 следует, что строго регулярная матрица представима в виде $C(A)$.

Пусть матрица B регулярна и $B = C(A)$. Тогда $|R_i(A)| \neq 0$ для любого i . Отсюда и из леммы 2 следует, что $\Delta_k(C(A)) \neq 0$ для любого k .

Автор благодарит Д. А. Лейтеса и Н. Н. Удоденко за полезную информацию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. // УМН. 1973. Т. 28. № 2. С. 19–33.
2. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
3. Колмыков В. А. // Матем. заметки. 2004. Т. 76. № 1. С. 144–146.
4. Колмыков В. А. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 37–50.
5. Колмыков В. А. // Дискретная матем. 2003. Т. 15. № 4. С. 119–125.

Воронежский государственный университет

Поступило

06.10.2004

Исправленный вариант

27.06.2005