Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Об ослабленной задаче Коши для линейного дифференциального включения, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 483–487

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:59:58

ОБ ОСЛАБЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

М. С. Бичегкуев

Для дифференциального включения $\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t)$ с линейным отношением $\mathcal{A}$ устанавливается связь между ослабленной и обычной задачами Коши. Доказывается единственность и представление ослабленного решения.

Библиография: 4 названия.

Пусть X – комплексное банахово пространство и $\mathcal{B}(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $C(\overline{\mathbb{R}}_+; X)$ обозначим пространство непрерывных функций на $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$, принимающих значения в X , а $C^1(\mathbb{R}_+; X)$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в X .

Приведем наиболее используемые определения и результаты из теории линейных отношений, придерживаясь терминологии из [1] и [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset X \times X$ называется *линейным отношением* на X . Если $\mathcal{A}$ – замкнутое подпространство в $X \times X$, то $\mathcal{A}$ называется *замкнутым линейным отношением*.

Множество всех замкнутых линейных отношений на X обозначается символом $LR(X)$, причем множество $LO(X)$ линейных замкнутых операторов, действующих в X , считается включенным (при отождествлении их с графиком) в $LR(X)$. Итак, $\mathcal{B}(X) \subset LO(X) \subset LR(X)$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначается множество $\{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$; кроме того, $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$ – ядро отношения $\mathcal{A}$ и

$$\text{Im } \mathcal{A} = \{y \in X : \exists x \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$$

– область значений.

Если $\mathcal{A}$ – линейное отношение в X , то $\mathcal{A}0$ является линейным многообразием в X и для любых $x \in D(\mathcal{A})$ и $y \in \mathcal{A}x$ имеет место равенство $\mathcal{A}x = y + \mathcal{A}0$.

В дальнейшем символ I используется для обозначения тождественного оператора в любом из рассматриваемых банаховых пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Резольвентным множеством отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Спектром отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.*

Если $\mathcal{A} \in LR(X)$, то резольвентное множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, а спектр $\sigma(\mathcal{A})$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}(X), \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$* .

Мы будем рассматривать введенное Крейном понятие ослабленного решения [3], адаптированное к дифференциальным включениям с линейным отношением $\mathcal{A} \in LR(X)$ вида

$$\dot{x}(t) \in \mathcal{A}x(t). \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X)$, удовлетворяющая включению (1) при $t \in \mathbb{R}_+$, называется его *ослабленным решением*.

Под *ослабленной задачей Коши* для дифференциального включения (1) понимают задачу нахождения ослабленного решения, удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

(Отметим, что элемент x_0 может не принадлежать области определения отношения $\mathcal{A}$.)

Напомним, что *обычным решением* или просто *решением* дифференциального включения (1) называется функция $x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; X)$, удовлетворяющая этому включению при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$, а если она удовлетворяет еще начальному условию (2) при $t = 0$, то x называют решением задачи Коши (1), (2).

Связь между ослабленной и обычной задачами Коши устанавливает приводимое ниже предложение 1, которое показывает, что ослабленные решения сводятся к изучению решений задачи Коши со специальными свойствами. Имеет место

ЛЕММА 1. *Если функция $x \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; X)$ удовлетворяет включению (1) при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и существует $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{x}(t)$, то она является обычным решением (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем некоторое $t > 0$ и произвольное $\varepsilon \in (0, t)$. Тогда из равенства

$$x(t) - x(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^t x'(\tau) d\tau$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x'(\tau) d\tau.$$

Отсюда согласно условию заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} x'(t) = x'(0).$$

Так как отношение $\mathcal{A}$ замкнуто, согласно включению (1) при $t \rightarrow 0+$ имеем $x'(0) \in \mathcal{A}x(0)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A} \in LR(X)$ и $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$. Если x – ослабленное решение задачи Коши, то $x_1(t) = R(\lambda_0, \mathcal{A})x(t)$ – решение задачи Коши с начальным условием $x_1(0) = R(\lambda_0, \mathcal{A})x_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для производной функции $x_1(t)$ при $t \in \mathbb{R}_+$, учитывая свойства линейных отношений, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= R(\lambda_0, \mathcal{A})\dot{x}(t) \in R(\lambda_0, \mathcal{A})\mathcal{A}x(t) = R(\lambda_0, \mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_0 I)x(t) + \lambda_0 R(\lambda_0, \mathcal{A})x(t) \\ &= x(t) + R(\lambda_0, \mathcal{A})0 + \lambda_0 R(\lambda_0, \mathcal{A})x(t) \\ &= x(t) + \lambda_0 R(\lambda_0, \mathcal{A})x(t) \subset \mathcal{A}x_1(t). \end{aligned}$$

Отсюда, используя предпоследнее выражение для $\dot{x}_1(t)$, заключаем, что $\dot{x}_1(t)$ непрерывна на $\overline{\mathbb{R}_+}$ и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} \dot{x}_1(t) = x(0) + \lambda_0 R(\lambda_0, \mathcal{A})x(0).$$

Теперь, используя лемму 1, находим, что $x_1 \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}; X)$, а значит, является решением задачи Коши с начальным условием $x_1(0) = R(\lambda_0, \mathcal{A})x_0$. Предложение доказано.

ЛЕММА 2. Если $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, то для любого ослабленного решения $x: \overline{\mathbb{R}_+} \rightarrow X$ дифференциального включения (1) справедливо равенство

$$\int_0^t e^{-\lambda \tau} x(\tau) d\tau = R(\lambda, \mathcal{A})(e^{-\lambda t} x(t) - x(0)), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\lambda = 0 \in \rho(\mathcal{A})$. Тогда $(x(\tau), \dot{x}(\tau)) \in \mathcal{A}$ для любого $\tau \geq 0$, что равносильно соотношению $(\dot{x}(\tau), x(\tau)) \in \mathcal{A}^{-1}$. Так как $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, то $x(\tau) = \mathcal{A}^{-1}\dot{x}(\tau)$ при всех $\tau \geq 0$. Интегрируя это равенство по промежутку $[\varepsilon, t]$, где $0 < \varepsilon < t$, получим

$$\int_\varepsilon^t x(\tau) d\tau = \int_\varepsilon^t \mathcal{A}^{-1}\dot{x}(\tau) d\tau = \mathcal{A}^{-1}(x(t) - x(\varepsilon)).$$

Так как функция x непрерывна в точке 0, имеет место равенство (3), где $\lambda \geq 0$.

Пусть λ – произвольная точка из $\rho(\mathcal{A})$. Тогда функция $x_\lambda(\tau) = e^{-\lambda \tau} x(t)$, $\tau \geq 0$, есть ослабленное решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in (\mathcal{A} - \lambda I)y(t).$$

Таким образом, из доказанного следует искомое равенство (3). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если для отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ выполнены условия

$$\begin{aligned} [\omega, \infty) &\subset \rho(\mathcal{A}) \quad \text{для некоторого } \omega \in \mathbb{R}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \|R(\lambda, \mathcal{A})\|}{\lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

то ослабленное решение задачи (1), (2) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что ослабленное решение $x: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow X$ задачи (1), (2) при условии $x(0) = 0$ является нулевым. В этом случае равенство (3) перепишем в виде

$$R(\lambda, \mathcal{A})x(T) = \int_0^T e^{\lambda(T-\tau)} x(\tau) d\tau = \int_0^T e^{\lambda s} x(T-s) ds,$$

где $T > 0$ – произвольное фиксированное число. Тогда функция $\varphi(\lambda) = R(\lambda, \mathcal{A})x(T)$ является преобразованием Лапласа финитной функции $\tilde{x}(s) = x(T-s)$, $s \in [0, T]$, и $\tilde{x}(s) = 0$, $s > 0$. Поэтому функция φ допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа, причем согласно условию (4) из [4, теорема 151] следует, что $\varphi \equiv 0$. Итак, $x(\tau) = 0$ для любого $\tau \in [0, T]$, а в силу произвольного выбора T заключаем, что $x = 0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ удовлетворяет условиям

- 1) $\mathbb{C}_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq \alpha\} \subset \rho(\mathcal{A})$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lim_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \|R(\lambda, \mathcal{A})\|}{\operatorname{Re} \lambda} = 0$;
- 3) существует положительная монотонно возрастающая функция $\varphi: [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\ln \|R(\lambda, \mathcal{A})\|}{|\lambda|} = 0$$

для всех $\lambda \in U(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}_\alpha : \operatorname{Re} \lambda \leq \varphi(\operatorname{Im} \lambda)\}$.

Тогда любое ослабленное решение $x: \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow X$ задачи Коши дифференциального включения (1), (2) единственно и представимо в виде

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathcal{A})x(0) d\lambda, \quad (5)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что если вектор x_0 принадлежит $D(\mathcal{A})$, то

$$\lim_{\lambda \in U(\varphi), |\lambda| \rightarrow \infty} R(\lambda, \mathcal{A})x_0 = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим произвольную пару $(x_0, y) \in \mathcal{A}$. Тогда имеем $(x_0, y - \lambda x_0) \in \mathcal{A} - \lambda I$ и, значит, $(y - \lambda x_0, x_0) \in (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$. Отсюда для любого $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, принимая во внимание определение 4, имеем $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}(y - \lambda x_0) = x_0$. Поэтому $R(\lambda, \mathcal{A})x_0 = x_0/\lambda + R(\lambda, \mathcal{A})y/\lambda$, и согласно условию 3) теоремы получаем равенство (6).

Рассмотрим левую часть (3) как преобразование Лапласа финитной функции

$$x_t(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & 0 \leq \tau \leq t, \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

Так как $x_t(\tau)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0, t)$, при $\tau \in (0, t)$ справедлива формула обращения (см. [4])

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, \mathcal{A})(e^{-\lambda t} x(t) - x(0)) d\lambda.$$

Положим

$$\Phi(\lambda, \tau, t) = e^{-\lambda(t-\tau)} R(\lambda, \mathcal{A}) x(t), \quad 0 < \tau < t, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

и рассмотрим замкнутый контур $\Gamma(\omega) \subset \mathbb{C}$, являющийся прямоугольником, с вершинами в точках $\alpha - i\omega$, $\alpha + i\omega$, $\varphi(\omega) + i\omega$, $\varphi(\omega) - i\omega$, где $\omega > 0$. Поскольку функция Φ голоморфна по первому аргументу в $\mathbb{C}_\alpha$ и $\Gamma(\omega) \subset \mathbb{C}_\alpha$, то

$$\int_{\Gamma(\omega)} \Phi(\lambda, \tau, t) d\lambda = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} \Phi d\lambda = \int_{\alpha-i\omega}^{\varphi(\omega)-i\omega} \Phi d\lambda + \int_{\varphi(\omega)-i\omega}^{\varphi(\omega)+i\omega} \Phi d\lambda + \int_{\varphi(\omega)+i\omega}^{\alpha+i\omega} \Phi d\lambda.$$

Первый и третий интегралы в правой части последнего равенства сходятся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ в силу условия 2) теоремы и доказанного свойства (6). Второй интеграл также сходится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ согласно условию 2) теоремы. Таким образом,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} \Phi(\lambda, t, \tau) d\lambda = 0$$

и, значит, верна формула (5). Теорема доказана.

Автор благодарен профессору А. Г. Басакову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cross R. Multivalued Linear Operators. New York: M. Dekker, 1988.
- [2] Басаков А. Г., Чернышов К. И. Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов // Матем. сб. 2002. Т. 193. №11. С. 3–42.
- [3] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [4] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило
21.12.2004