Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик, Отношение Штейнера для многообразий, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 387–395

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:24:42

УДК 519.711.7

ОТНОШЕНИЕ ШТЕЙНЕРА ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Д. Цислик

Отношение Штейнера характеризует максимальное возможное отклонение длины минимального остовного дерева от длины минимального дерева Штейнера. В статье получены оценки на отношение Штейнера на римановых многообразиях. В качестве следствия вычислено отношение Штейнера для плоских торов, плоских бутылок Клейна и проективной плоскости постоянной положительной кривизны.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Пусть V – произвольное конечное множество. Напомним, что *графом* G на множестве V называется пара (V, E) , где E – некоторое конечное семейство пар элементов множества V . В семействе E могут встречаться пары с одинаковыми элементами, а также одинаковые пары. Элементы из V называются *вершинами графа* G , а элементы из E – *ребрами графа* G . Ребра вида (v, v) называются *петлями*, а повторяющиеся пары из E называются *кратными ребрами*. Если задан граф G , то множество его вершин обычно обозначается через $V(G)$, а множество его ребер – через $E(G)$. Для удобства мы будем часто обозначать ребро $e = \{x, y\} \in E(G)$ через xy .

Иногда бывает удобно рассматривать граф как топологическое пространство, склеенное из отрезков, каждый из которых соответствует некоторому ребру графа. Такие графы мы будем называть *топологическими*, а непрерывное отображение топологического графа G в топологическое пространство будем называть *сетью*; при этом топологический граф G , а также обычный граф, соответствующий G , назовем *типом* этой сети или ее *топологией*. Таким образом, ребра сети – это непрерывные кривые в объемлющем пространстве. Кроме того, вся терминология теории топологических пространств переносится на топологические графы и сети. Если объемлющее пространство является гладким многообразием, то сеть в таком пространстве назовем *гладкой* (*кусочно-гладкой*), если все ребра сети являются гладкими (*кусочно-гладкими*).

Граф G называется *взвешенным*, если на множестве его ребер задана неотрицательная функция $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. При этом число $\omega(e)$ называется *весом ребра* $e \in E(G)$. Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа* G и обозначается через $\omega(G)$. Если G – связный взвешенный граф, то из всех связных остовных подграфов в G наименьшего веса всегда можно выбрать дерево,

При подготовке данной работы А. О. Иванов и А. А. Тужилин пользовались частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 96-15-96142, 98-01-00240, и INTAS, проект № 97-0808.

которое называется *минимальным остовным деревом* и обозначается через MST_G . Отметим, что если все веса строго больше нуля, то любой связный остовный подграф в G наименьшего веса является деревом.

Пусть X – множество, ρ – некоторая метрика на X , и N – произвольное конечное подмножество в X . Пусть G – полный граф на множестве N . Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy \in E(G)$ число $\rho(x, y)$. Эту весовую функцию мы будем обозначать той же буквой ρ . Минимальное взвешенное дерево во взвешенном графе G обозначим через MST_N . *Минимальным деревом Штейнера на множестве N или минимальным деревом Штейнера, затягивающим множество N* , называется дерево Γ , $N \subset V(\Gamma)$, для которого

$$\rho(\Gamma) = \inf_{\{\bar{N} : \bar{N} \subset N\}} \rho(\text{MST}_{\bar{N}}), \quad (1)$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам $\bar{N}$ в X , содержащим N . Минимальное дерево Штейнера на множестве N обозначается через SMT_N .

Отметим, что, вообще говоря, не для всякого N существует SMT_N (причиной этого может служить неполнота метрического пространства (X, ρ)). Тем не менее, сама точная нижняя грань из определения SMT_N существует всегда. В дальнейшем, даже если SMT_N не существует, точную нижнюю грань (1) будем обозначать через $\rho(\text{SMT}_N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отношением Штейнера $m(X, \rho)$ метрического пространства (X, ρ) называется следующая величина:*

$$m(X, \rho) = \inf_{\{N : N \subset X\}} \frac{\rho(\text{SMT}_N)}{\rho(\text{MST}_N)}.$$

Ясно, что $0 \leq m(X, \rho) \leq 1$.

Приведем основные известные нам результаты, описывающие отношение Штейнера римановых многообразий. Ду и Хванг [1] показали, что отношение Штейнера евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$; тем самым, была доказана знаменитая гипотеза Гилберта и Поллака [2], не поддававшаяся решению в течение 30 лет. Имеется также ряд оценок на отношение Штейнера для общих евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$, см. подробности в [3]. Рубинштейн и Венг [4] вычислили отношение Штейнера двумерной сферы постоянной (положительной) кривизны: оно оказалось таким же, как и у $\mathbb{R}^2$, т.е. равным $\sqrt{3}/2$.

Используя технику, разработанную в [5] и [6], авторы настоящей статьи получили следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.1. *Отношение Штейнера произвольного связного n -мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть W и M – связные римановы многообразия, и $\pi : W \rightarrow M$ – локально изометричное накрытие. Тогда отношение Штейнера базы M не меньше отношения Штейнера тотального пространства W .*

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если связное риманово многообразие можно локально изометрично накрыть евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, то отношение Штейнера этого многообразия равно отношению Штейнера пространства $\mathbb{R}^n$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Отношение Штейнера плоского двумерного тора, плоской бутылки Клейна, проективной плоскости постоянной положительной кривизны равно $\sqrt{3}/2$.

Таким образом, учитывая результат Рубинштейна и Венга [4], отношение Штейнера вычислено для всех замкнутых двумерных поверхностей постоянной неотрицательной кривизны.

ТЕОРЕМА 1.3. Отношение Штейнера пространства Лобачевского кривизны -1 не превосходит $3/4$.

ТЕОРЕМА 1.4. Отношение Штейнера произвольной двумерной поверхности постоянной кривизны -1 строго меньше $\sqrt{3}/2$.

А. О. Иванов и А. А. Тужилин пользуются случаем выразить искреннюю признательность А. Т. Фоменко за постоянное внимание к их работе. Авторы также благодарны университету г. Грайфсвальд (Германия) за поддержку их встречи в Грайфсвальде в марте 2000 г.

2. Доказательства теорем. В настоящем разделе мы приведем доказательства всех сформулированных во введении результатов. Для этого нам понадобятся следующие хорошо известные факты.

Доказательство приводимых ниже двух лемм см. в [3] (отметим, что лемма 2.1 доказана в [3] лишь для нормированных пространств, хотя ее доказательство для метрического случая абсолютно такое же).

ЛЕММА 2.1. Пусть X – некоторое множество, а ρ_1 и ρ_2 – две метрики на множестве X . Предположим, что для некоторых чисел $c_2 \geq c_1 > 0$ и любых двух точек x и y из X выполняется $c_1 \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq c_2 \rho_2(x, y)$. Тогда

$$\frac{c_1}{c_2} m(X, \rho_2) \leq m(X, \rho_1) \leq \frac{c_2}{c_1} m(X, \rho_2).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, и $Y \subset X$ – его подпространство. Тогда

$$m(Y, \rho) \geq m(X, \rho).$$

Воспользуемся этими леммами для доказательства следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение метрического пространства (X, ρ_X) на метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний, т.е. для любых двух точек x и y из X выполняется

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_X(x, y).$$

Тогда для любого конечного множества $N \subset Y$ выполняется

$$\rho_X(\text{MST}_N) \geq \rho_Y(\text{MST}_{f(N)}), \quad \rho_X(\text{SMT}_N) \geq \rho_Y(\text{SMT}_{f(N)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольный связный граф, построенный на N . Рассмотрим на G две весовых функции, заданные на ребрах xy из G так: $\rho_X(xy) = \rho_X(x, y)$ и $\omega_Y(xy) = \rho_Y(f(x), f(y))$. Так как f не увеличивает расстояний, то $\rho_X(G) \geq \omega_Y(G)$.

Пусть G' – граф на $N' = f(N)$ такой, что вершины x' и y' из $N' = V(G')$ соединены столькими ребрами, сколько ребер из G соединяет вершины из $f^{-1}(x') \cap N$ с вершинами из $f^{-1}(y') \cap N$. Ясно, что G' – связный граф такой, что $\rho_Y(G') = \omega_Y(G)$.

Обратно, легко видеть, что для любого связного графа G' , построенного на $f(N)$, существует такой связный граф G_X на N , что $\rho_Y(G') = \omega_Y(G_X)$ (для построения графа G_X достаточно натянуть связным графом каждое множество $N \cap f^{-1}(x')$, $x' \in N'$, а каждую пару полученных связных графов, соответствующих смежным в G' вершинам, соединить столькими ребрами, какова кратность соответствующего ребра из G'). Поэтому

$$\begin{aligned} \rho_X(\text{MST}_N) &= \inf_{\{G: V(G)=N\}} \rho_X(G) \geq \inf_{\{G: V(G)=N\}} \omega_Y(G) \\ &= \inf_{\{G': V(G')=f(N)\}} \rho_Y(G') = \rho_Y(\text{MST}_{f(N)}). \end{aligned}$$

Тем самым, первое неравенство доказано.

Докажем теперь второе неравенство. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_X(\text{SMT}_N) &= \inf_{\{\bar{N}: \bar{N} \supset N\}} \rho_X(\text{MST}_{\bar{N}}) \geq \inf_{\{\bar{N}: \bar{N} \supset N\}} \rho_Y(\text{MST}_{f(\bar{N})}) \\ &\geq \inf_{\{\bar{N}': \bar{N}' \supset f(N)\}} \rho_Y(\text{MST}_{\bar{N}'}) = \rho_Y(\text{SMT}_{f(N)}). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ существует такое конечное подмножество N , что $f(N) = N'$ и

$$\rho_X(\text{SMT}_N) \leq \rho_Y(\text{SMT}_{N'}). \quad (2)$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leq m(Y, \rho_Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \subset X$ – произвольное конечное множество. Имеем

$$\begin{aligned} m(X, \rho_X) &= \inf_{\{N: N \subset X\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_N)}{\rho_X(\text{MST}_N)} = \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \inf_{\{N: f(N)=N'\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_N)}{\rho_X(\text{MST}_N)} \\ &\leq \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \frac{\rho_Y(\text{SMT}_{N'})}{\rho_Y(\text{MST}_{N'})} = m(Y, \rho_Y), \end{aligned}$$

где неравенство получается одновременным применением условия (2) и первого неравенства из предложения 2.1. Доказательство закончено.

Предложение 2.2 можно немного усилить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – отображение метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) , не увеличивающее расстояний. Предположим, что для каждого конечного подмножества $N' \subset Y$ выполняется

$$\inf_{\{N: f(N)=N'\}} \rho_X(\text{SMT}_N) \leq \rho_Y(\text{SMT}_{N'}). \quad (3)$$

Тогда

$$m(X, \rho_X) \leq m(Y, \rho_Y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \subset X$ – произвольное конечное множество. Как и в доказательстве предложения 2.2, имеем

$$m(X, \rho_X) = \inf_{\{N: N \subset X\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_N)}{\rho_X(\text{MST}_N)} = \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \inf_{\{N: f(N)=N'\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_N)}{\rho_X(\text{MST}_N)}.$$

Так как f не увеличивает расстояний, то $\rho_X(\text{MST}_N) \geq \rho_Y(\text{MST}_{f(N)})$ (см. предложение 2.1); с другой стороны, по условию существует такая последовательность конечных множеств $N_i \subset X$, $f(N_i) = N'$, что $\rho_X(\text{SMT}_{N_i}) \leq \rho_Y(\text{SMT}_{N'}) + \varepsilon_i$, где последовательность положительных чисел ε_i стремится к 0 при $i \rightarrow \infty$, а последовательность положительных чисел $\rho_X(\text{SMT}_{N_i})$ стремится к $\inf_{\{N: f(N)=N'\}} \rho_X(\text{SMT}_N)$. Поэтому

$$\frac{\rho_X(\text{SMT}_{N_i})}{\rho_X(\text{MST}_{N_i})} \leq \frac{\rho_Y(\text{SMT}_{N'}) + \varepsilon_i}{\rho_Y(\text{MST}_{N'})},$$

откуда, учитывая, что $\{N_i\} \subset \{N: f(N) = N'\}$, получаем

$$\begin{aligned} & \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \inf_{\{N: f(N)=N'\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_N)}{\rho_X(\text{MST}_N)} \\ & \leq \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \inf_{\{N_i\}} \frac{\rho_X(\text{SMT}_{N_i})}{\rho_X(\text{MST}_{N_i})} \leq \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \inf_i \frac{\rho_Y(\text{SMT}_{N'}) + \varepsilon_i}{\rho_Y(\text{MST}_{N'})} \\ & = \inf_{\{N': N' \subset Y\}} \frac{\rho_Y(\text{SMT}_{N'})}{\rho_Y(\text{MST}_{N'})} = m(Y, \rho_Y). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Пусть M – произвольное связанное n -мерное риманово многообразие. Для каждой кусочно-гладкой кривой γ обозначим через $\text{len}(\gamma)$ ее длину по отношению к римановой метрике. Обозначим через ρ внутреннюю метрику, порожденную римановой метрикой. Напомним, что

$$\rho(x, y) = \inf_{\gamma} \text{len}(\gamma),$$

где точная нижняя грань берется по всем кусочно-гладким кривым γ , соединяющим точки x и y .

Пусть P – некоторая точка из M . Рассмотрим нормальные координаты $x^1, \dots, x^n$ с центром в точке P , для которых риманова метрика g_{ij} , вычисленная в точке P , совпадает с δ_{ij} . Пусть $U(\delta)$ – выпуклый открытый шар радиуса δ с центром в P , для которого

каждая его пара точек x и y соединяется единственной кратчайшей геодезической γ , лежащей в $U(\delta)$. При этом, $\rho(x, y) = \text{len}(\gamma)$. Таким образом, шар $U(\delta)$ является метрическим пространством с внутренней метрикой, т.е. метрикой, в которой расстояние между точками равно точной нижней грани длин всех измеримых кривых, соединяющих эти точки. Отметим, что в координатах x^i шар $U(\delta)$ задается так:

$$U(\varepsilon) = \{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < \delta^2\},$$

поэтому если на $U(\delta)$ задать евклидово расстояние ρ_e (по отношению к нормальным координатам x^i), то метрическое пространство $(U(\delta), \rho_e)$ также будет пространством с внутренней метрикой, порожденной евклидовой метрикой δ_{ij} .

В силу гладкой зависимости метрики $g_{ij}(x)$ от точки $x \in U(\varepsilon)$ для любого ε , $1/n^2 > \varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $x \in U(\delta)$ выполняется

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \varepsilon. \quad (4)$$

Последнее приводит к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\|v\|_g$ обозначает длину касательного вектора $v \in T_x M$ в метрике g_{ij} , а $\|v\|_e$ – длину этого вектора в евклидовой метрике δ_{ij} . Если для любых i и j выполняется неравенство (4), то

$$\sqrt{1 - n^2\varepsilon} \|v\|_e \leq \|v\|_g \leq \sqrt{1 + n^2\varepsilon} \|v\|_e.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ортогональное (по отношению к δ_{ij}) преобразование, приводящее (g_{ij}) к диагональному виду $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, и пусть (c_j^i) – матрица этого преобразования. Тогда $\lambda_k = \sum_{i,j} c_k^i c_k^j g_{ij}$; поэтому, так как в силу ортогональности матрицы (c_j^i) выполняется $|c_j^i| \leq 1$, имеем

$$|\lambda_k - 1| = \left| \sum_{i,j} (c_k^i c_k^j g_{ij} - c_k^i c_k^j \delta_{ij}) \right| \leq \sum_{i,j} |c_k^i| \cdot |c_k^j| \cdot |g_{ij} - \delta_{ij}| \leq \sum_{i,j} |g_{ij} - \delta_{ij}| \leq n^2\varepsilon.$$

В новых координатах имеем

$$\|v\|_g = \sqrt{\sum_k l_k v^k v^k} \leq \sqrt{\max_k l_k \sum_k v^k v^k} \leq \sqrt{1 + n^2\varepsilon} \|v\|_e.$$

Аналогично получаем

$$\|v\|_g \geq \sqrt{1 - n^2\varepsilon} \|v\|_e.$$

Доказательство закончено.

Вспоминая определение расстояния между точками связного риманова многообразия, мгновенно получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть M – произвольное n -мерное риманово многообразие, а $U(\delta)$, ρ и ρ_e такие, как выше. Тогда для любого $1/n^2 > \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех точек $x, y \in U(\delta)$ выполняется

$$\sqrt{1 - n^2\varepsilon}\rho_e(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{1 + n^2\varepsilon}\rho_e(x, y).$$

Следствие 2.1, лемма 2.1 и независимость отношения Штейнера от выбора выпуклого открытого подмножества в $\mathbb{R}^n$ приводят к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть M – произвольное n -мерное риманово многообразие, и $U(\varepsilon) \subset M$ – открытый выпуклый шар малого радиуса ε с центром в некоторой точке P . Обозначим через ρ метрику на M , порожденную римановой метрикой. Тогда

$$\sqrt{\frac{1 - n^2\varepsilon}{1 + n^2\varepsilon}}m(\mathbb{R}^n) \leq m(U(\varepsilon), \rho) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2\varepsilon}{1 - n^2\varepsilon}}m(\mathbb{R}^n),$$

где $m(\mathbb{R}^n)$ – отношение Штейнера для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Перейдем теперь к доказательствам основных теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть M – произвольное связное n -мерное риманово многообразие, и ρ – метрика, порожденная римановой метрикой многообразия M . Пусть $P \in M$ – произвольная точка из M , и $U(\varepsilon)$ – открытый выпуклый шар радиуса $\varepsilon < 1/n^2$ с центром в P . Введем в $U(\varepsilon)$ нормальные координаты x^i , и пусть ρ_e – метрика на $U(\varepsilon)$, порожденная евклидовой метрикой δ_{ij} (по отношению к координатам x^i).

Для некоторой убывающей последовательности ε_i положительных чисел такой, что $\varepsilon_i < \varepsilon$ для любого i и $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, рассмотрим семейство вложенных подмножеств $X_i = U(\varepsilon_i)$. Заметим, что в силу выпуклости евклидовых шаров $(U(\varepsilon), \rho_e)$ имеем

$$m(U(\varepsilon), \rho_e) = m(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, в силу выпуклости шаров $U(\varepsilon)$ по отношению к внутренней метрике ρ' , порожденной римановой метрикой g_{ij} , эта внутренняя метрика совпадает с ограничением метрики ρ . Таким образом, шар $U(\varepsilon)$ с внутренней метрикой ρ' является подпространством в (M, ρ) .

По следствию 2.2

$$m(X_i, \rho) \leq \sqrt{\frac{1 + n^2\varepsilon}{1 - n^2\varepsilon}}m(\mathbb{R}^n).$$

Так как $\sqrt{(1 + n^2\varepsilon)/(1 - n^2\varepsilon)} \rightarrow 1$ при $i \rightarrow \infty$ в силу выбора последовательности ε_i , получаем

$$\inf_i m(X_i, \rho) \leq m(\mathbb{R}^n),$$

но по лемме 2.2

$$m(M, \rho) \leq \inf_i m(X_i, \rho),$$

что и завершает доказательство теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пусть $\pi: W \rightarrow M$ – локально изометричное накрытие, где W и M – связные римановы многообразия. Обозначим через ρ_W и ρ_M метрики, порожденные соответствующими римановыми метриками на W и M . Отметим, что локально изометричное накрытие не увеличивает расстояний, так как образ измеримой кривой γ имеет ту же длину, что и γ .

Рассмотрим произвольное конечное множество $N' \subset M$, и пусть G'_i – семейство деревьев на конечных множествах $\bar{N}'_i \supset N'$ таких, что

$$\rho_M(G'_i) \rightarrow \rho_M(\text{SMT}_{N'}) \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Для каждого G'_i обозначим через Γ'_i вложенную сеть на M типа G'_i с множеством вершин $V(G'_i)$, длина которой отличается от $\rho_M(G'_i)$ не более, чем на $1/i$. Пусть Γ_i – связанная компонента из $\pi^{-1}(\Gamma'_i)$ и $N_i = \pi^{-1}(N) \cap \Gamma_i$. Так как сеть Γ'_i стягиваема, ограничение расслоения π на Γ'_i тривиально, поэтому ограничение проекции π на Γ_i является гомеоморфизмом. В силу локальной изометричности проекции π получаем, что длина сети Γ_i на W совпадает с длиной сети Γ'_i на M . Но $\rho_W(\text{SMT}_{N_i})$ не превосходит длины сети Γ_i , поэтому

$$\rho_W(\text{SMT}_{N_i}) \leq \rho_M(\text{SMT}_{N'}) + \varepsilon_i,$$

где положительные числа ε_i стремятся к 0 при $i \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\inf_{\{N: f(N)=N'\}} \rho_W(\text{SMT}_N) \leq \rho_M(\text{SMT}_{N'}).$$

Осталось применить предложение 2.3. Доказательство закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.1 вытекает из теорем 1.1 и 1.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.2 вытекает из следствия 1.1, теоремы Ду и Хванга [1], утверждающей, что отношение Штейнера для евклидовой плоскости равно $\sqrt{3}/2$, а также теоремы Рубинштейна и Венга [4], утверждающей, что отношение Штейнера двумерной сферы с метрикой постоянной кривизны равно $\sqrt{3}/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Рассмотрим модель Пуанкаре для пространства Лобачевского $L^2(-1)$ постоянной кривизны -1 . Напомним, что эта модель представляет собой плоский круг радиуса 1 с центром в нуле на евклидовой плоскости с координатами (x, y) , причем метрика ds^2 в нем задается в виде

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Известно, что каждый правильный треугольник на плоскости Лобачевского можно описать окружностью, причем радиусы, проведенные из центра окружности в вершины треугольника, образуют углы величины 120° .

Пусть r – радиус описанной окружности. По теореме косинусов длина a стороны правильного треугольника вычисляется по формуле

$$\text{ch } a = \text{ch}^2 r - \text{sh}^2 r \cos \frac{2\pi}{3} = 1 + \frac{3}{2} \text{sh}^2 r.$$

Легко проверить, что длина MST для такого треугольника равна $2a$, а длина SMT равна $3r$. Поэтому отношение Штейнера $m(r)$ для правильного треугольника на $L^2(-1)$, вокруг которого можно описать окружность радиуса r , имеет вид

$$m(r) = \frac{3}{2} \cdot \frac{r}{\operatorname{arcch}\left(1 + \frac{3}{2} \operatorname{sh}^2(r)\right)}.$$

Легко вычислить, что предел функции $m(r)$ при $r \rightarrow \infty$ равен $3/4$. Доказательство закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4 вытекает из того, что функция $m(r)$ в окрестности нуля имеет следующий начальный отрезок ряда Тейлора:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{r^2}{16\sqrt{3}} + O(r^4),$$

поэтому в некоторой окрестности $(0, \varepsilon)$ она строго меньше $\sqrt{3}/2$. Последнее означает, что у достаточно малых правильных треугольников на поверхности постоянной кривизны -1 отношение длин SMT и MST строго меньше $\sqrt{3}/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Du D. Z., Hwang F. K. A proof of Gilbert–Pollak Conjecture on the Steiner ratio // *Algorithmica*. 1992. V. 7. P. 121–135.
- [2] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // *SIAM J. Appl. Math.* 1968. V. 16. № 1. P. 1–29.
- [3] Cieslik D. *Steiner Minimal Trees*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [4] Rubinstein J. H., Weng J. F. Compression theorems and Steiner ratios on spheres // *J. Combin. Optimization*. 1997. V. 1. P. 67–78.
- [5] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations*. N.W., Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.
- [6] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. *Branching Solutions of One-Dimensional Variational Problems*. World Publisher Press, 2000, to appear.
- [7] Hwang F. K., Richards D., Winter P. *The Steiners Tree Problem*. Elsevier Science Publishers, 1992.

(А. О. Иванов, А. А. Тужилин) Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(Д. Цислик) Институт математики и информатики,
Эрнст Морис Арндт университет,
г. Грайфсвальд, Германия
E-mail:

aoiva@mech.math.msu.su
tuz@mech.math.msu.su
cieslik@mail.uni-greifswald.de

Поступило
10.04.2000