Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, А. А. Могульский, Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 505–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2721>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:30:23

УДК 519.214

ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ В СХЕМЕ СЕРИЙ

А. А. Боровков, А. А. Могольский

Пусть $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ – сумма независимых случайных векторов $\xi(i) = \xi_{(n)}(i)$ с общим распределением, зависящим от параметра n . В работе найдены достаточные условия для справедливости равномерного варианта интегро-локальной теоремы Стоуна об асимптотике вероятности $P(S(n) \in \Delta(x))$, где $\Delta(x)$ – куб со стороной Δ и с вершиной в точке x .

Библиография: 11 наименований.

1. Введение. К середине 60-х годов прошлого века в работах Гнеденко [1], [2], Рвачевой [3], Шеша [4], Стоуна [5], [6] и др. была выявлена следующая важная закономерность в теории суммирования случайных векторов: *из интегральной теоремы для сумм $S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$ независимых одинаково распределенных случайных векторов всегда вытекает интегро-локальная теорема о вероятности попадания сумм $S(n)$ в фиксированный куб, расположенный в области нормальных уклонов*. Проиллюстрируем сказанное на примере сумм одномерных нерешетчатых слагаемых.

УТВЕРЖДЕНИЕ А. Пусть Q есть устойчивое распределение на прямой с плотностью q . Пусть далее слагаемые $\xi(i)$ независимы, имеют общее нерешетчатое распределение F , не зависящее от n , и для некоторых числовых последовательностей A_n, B_n имеет место слабая сходимость (интегральная теорема)

$$P\left(\frac{S(n) - A_n}{B_n} \in \cdot\right) \Rightarrow Q(\cdot), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда наряду с (1) справедливо следующее утверждение:

$$P(S(n) \in [x, x + \Delta)) = \frac{\Delta}{B_n} \left(q\left(\frac{x - A_n}{B_n}\right) + o(1) \right), \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00810, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-2139.2003.1, и фонда INTAS, грант № 02-51-5019.

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $x \in \mathbb{R}^d$ и $\Delta \in [\Delta_1, \Delta_2]$ для любых фиксированных $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \infty$.

Это утверждение было получено Шешом [4], Стоуном [5], а аналогичное утверждение в арифметическом случае – Гнеденко [1], [2]. Многомерные аналоги этого утверждения получены Стоуном [6] и Рвачевой [3]. Некоторые из результатов работы [6] были переоткрыты авторами настоящей статьи в [7] по той причине, что они не были знакомы с названной работой Стоуна. Судя по всему, с работой [6] не были знакомы и некоторые другие авторы работ по предельным теоремам (ср., например, результаты [6] с результатами работ [8], [9]).

Необходимые и достаточные условия для справедливости интегральной теоремы (1) хорошо известны (см., например, [10]), поэтому эти же условия являются необходимыми и достаточными для интегро-локальной теоремы (2).

Интегро-локальные теоремы вместе с преобразованием Крамера играют важнейшую роль при изучении вероятностей больших отклонений сумм случайных векторов. В этих задачах и особенно в задачах о сверхбольших отклонениях и о больших отклонениях сумм с семиекспоненциальными распределениями (где приходится использовать срезки) возникает потребность в интегро-локальных теоремах в *схеме серий*, когда *распределение F слагаемых $\xi(i)$ зависит от n* . В работе [6], где были найдены вероятности больших “регулярных” отклонений, также возникает схема серий, но в известном смысле “почти незаметная”, так как распределения случайных векторов $\xi^{(\alpha)}(i)$, полученных с помощью преобразования Крамера “аналитически” зависят от нормированного отклонения $\alpha = x/n$ и, следовательно, при $\alpha \rightarrow \alpha_0 = \text{const}$ почти не зависят от n . Поэтому в этих условиях проблема схемы серий в [6] решается без труда. Однако при изучении сверхбольших отклонений, когда $|\alpha| = |x/n| \rightarrow \infty$, положение существенно меняется. То же происходит при изучении сумм срезаемых на высоком (зависящем от n) уровне случайных величин, не удовлетворяющих условию Крамера.

Цель настоящей работы состоит в получении условий для справедливости интегро-локальной теоремы (2) в общей схеме серий, когда F_n произвольным образом зависит от n . Это позволит в достаточной общности изучать названные выше сверхбольшие отклонения и большие отклонения сумм семиекспоненциально распределенных слагаемых. При этом мы ограничимся случаем, когда слагаемое $\xi(i)$ имеет конечный второй момент и, стало быть, предельное распределение Q в (1) является нормальным.

2. Структурные условия на распределение случайного вектора ξ . Пусть ξ – d -мерный случайный вектор, имеющий фиксированное распределение $F = F(V) = P(\xi \in V)$. Скалярное произведение векторов α, β и норму в d -мерном пространстве Евклида $\mathbb{R}^d$ обозначим соответственно $\langle \alpha, \beta \rangle$, $|\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}$. Подмножество векторов в $\mathbb{R}^d$ с целочисленными координатами обозначим $\mathbb{Z}^d$.

Везде в настоящей работе будем предполагать выполненным

УСЛОВИЕ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ. Для любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^d$ случайная величина $\langle e, \xi \rangle$ не вырождена (ее распределение не сосредоточено в одной точке).

Характеристическую функцию случайного вектора ξ обозначим

$$f(t) = E e^{i \langle t, \xi \rangle}, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Невырожденный случайный вектор ξ называют *арифметическим* (имеющим *арифметическое распределение*), если $P(\xi \in \mathbb{Z}^d) = 1$, и для некоторого $y_0 \in \mathbb{Z}^d$ такого, что

$P(\xi = y_0) > 0$, группа по сложению, порожденная множеством $\{y : P(\xi = y_0 + y) > 0\}$, совпадает с $\mathbb{Z}^d$. Известно (см. лемму 21.6 в [8, с. 235]), что невырожденный вектор ξ является арифметическим тогда и только тогда, когда выполнено

УСЛОВИЕ (Z) (условие арифметичности). Для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ выполняется равенство $f(2\pi t) = 1$, и для любого $t \notin \mathbb{Z}^d$ — неравенство $|f(2\pi t)| < 1$.

Невырожденную *скалярную* случайную величину ξ называют *решетчатой* (имеющей *решетчатое распределение*), если для некоторых $a \in \mathbb{R}^1$ и $h > 0$ случайная величина $\xi' = a + h\xi$ является арифметической. Если это свойство не выполнено, то случайную величину ξ называют *нерешетчатой* (имеющей *нерешетчатое распределение*). В силу сказанного выше *скалярная случайная величина ξ является нерешетчатой тогда и только тогда, когда для всех $t \neq 0$ выполняется $|f(t)| < 1$.*

Говорят, что невырожденный случайный вектор ξ является *нерешетчатым* (имеющим *нерешетчатое распределение*), если для любого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^d$ случайная величина $\langle e, \xi \rangle$ является нерешетчатой, т.е. выполнено

УСЛОВИЕ (R) (условие нерешетчатости). Для любых $e \in \mathbb{R}^d$, $|e| = 1$, $v > 0$ выполняется неравенство $|f(ev)| < 1$, или, что то же, для любых $\delta > 0$, $T < \infty$

$$\sup_{\delta \leq |v| \leq T, |e|=1} |f(ev)| < 1. \quad (3)$$

В известном смысле условия (R) и (Z) исчерпывают все возможности (см. [6]), поскольку всегда с помощью линейного невырожденного преобразования можно перевести изучаемый случайный вектор ξ в случайный вектор $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ такой, что этот вектор ζ есть либо арифметический, либо нерешетчатый, либо такой, что для некоторого $m \in \{1, \dots, d-1\}$ первые m координат $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ составляют арифметический вектор, а остальные $d-m$ координат $(\zeta_{m+1}, \dots, \zeta_d)$ — нерешетчатый вектор.

Нам понадобится более сильное, чем (R), условие.

УСЛОВИЕ (R^γ) (условие Крамера на характеристическую функцию). Имеет место оценка

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq T} |f(t)| \leq e^{-d\gamma} < 1. \quad (4)$$

Отметим, что константа $\gamma > 0$, которая занята в условии (R^γ) и которая характеризует “силу” этого условия, будет играть важную роль в интегро-локальных теоремах (см. теорему 1 ниже). Если распределение F абсолютно непрерывно, то $\gamma = \infty$.

Обозначим

$$\Delta[x] = \{y = (y_1, \dots, y_d) : x_i \leq y_i < y_i + \Delta, 1 \leq i \leq d\}$$

куб в пространстве $\mathbb{R}^d$ с вершиной в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$ и со стороной $\Delta > 0$.

Интегро-локальными теоремами для сумм $S(n)$ мы называем (см. [7]) утверждения об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ вероятности

$$P(S(n) \in \Delta[x]), \quad (5)$$

где вектор $x = x(n)$ и положительное число $\Delta = \Delta_n$ зависят, вообще говоря, от n . Некоторые авторы, например, Стоун [6], эти теоремы называют локальными. Мы предпочитаем термин “локальный” оставить для теорем, касающихся плотностей или вероятностей $P(S(n) = x)$ в решетчатом случае.

Зная асимптотику (5) в интегро-локальной теореме, мы можем оценить соответствующие вероятности в интегральной теореме; например, можем найти асимптотику вероятности $P(S(n) \in rV)$, где вещественное $r = r(n)$ стремится к ∞ при $n \rightarrow \infty$, а измеримое множество $V \subseteq \mathbb{R}^d$ фиксировано и имеет достаточно гладкую границу. Для этого следует аппроксимировать “сверху” и “снизу” множество rV объединением непересекающихся малых кубов $\Delta[x]$ и воспользоваться асимптотикой вероятностей (5). Очевидно, что утверждение интегро-локальной теоремы тем сильнее, чем быстрее в этом утверждении параметр Δ может стремиться к 0. Скажем, если выполнено только условие (R), то интегро-локальная теорема в области больших отклонений верна для любого фиксированного i , стало быть, для достаточно медленно стремящегося к нулю параметра Δ . Если же выполнено условие (R^γ) , то параметр Δ может убывать экспоненциально быстро, как функция $e^{-n^{\gamma_1}}$ для любого $\gamma_1 < \gamma$, где константа $\gamma > 0$ определена в условии (R^γ) (см. теорему 1, приведенную ниже).

3. Интегро-локальные теоремы для схемы серий. Пусть распределение $F_{(n)}$ случайного d -мерного вектора $\xi_{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, зависит от параметра n и $f_{(n)}(t) = Ee^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}$, $t \in \mathbb{R}^d$, — характеристическая функция $\xi_{(n)}$.

Как и прежде, обозначим $S(n) = \xi_{(n)}(1) + \dots + \xi_{(n)}(n)$ сумму независимых случайных векторов, распределенных как вектор $\xi_{(n)}$.

Теоремы 1, 2, которые мы сформулируем и докажем ниже, являются обобщением интегро-локальной теоремы Стоуна [6] на случай, когда распределение $F = F_{(n)}$ зависит от n и при этом $E|\xi_{(n)}|^2 \leq c < \infty$.

В теореме 1, которая посвящена нерешетчатому случаю, т.е. случаю, когда выполнено условие (R) или более сильное условие (R^γ) , мы будем, не ограничивая общности, предполагать, что случайный вектор $\xi_{(n)}$ имеет нулевое среднее и единичную ковариационную матрицу:

$$E\xi_{(n)} = 0, \quad E\xi_{(n)}^T \xi_{(n)} = E. \quad (6)$$

Напомним известное условие Линдеберга (см., например, [11]).

УСЛОВИЕ (L) (условие Линдеберга). Для любого $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}| \geq \tau\sqrt{n}) = 0. \quad (7)$$

Оно является наиболее широким *моментным* условием для центральной предельной теоремы в схеме серий. Часто для проверки условия (L) используется более ограничительное условие равномерной интегрируемости квадрата нормы случайного вектора $\xi_{(n)}$.

УСЛОВИЕ (L_0) . Имеет место равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} E(|\xi_{(n)}|^2; |\xi_{(n)}| \geq T) = 0.$$

Обратимся теперь к *структурным* условиям (R) и (R^γ) , которые для схемы серий будут иметь следующий вид.

УСЛОВИЕ (R). Для любых $\delta > 0$, $T < \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq v \leq T, |\mathbf{e}|=1} |f_{(n)}(\mathbf{e}v)| < 1.$$

УСЛОВИЕ (R $^\gamma$). Имеет место оценка

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq T} |f_{(n)}(t)| \leq e^{-d\gamma} < 1.$$

Очевидно, что для “вырожденной” схемы серий, когда распределения $F_{(n)}$ не зависят от n , условия (R), (R $^\gamma$) для схемы серий совпадают с версиями (3), (4) этих условий (для фиксированного распределения).

Отметим, что условие (R) для схемы серий, в отличие от версии (3) этого условия, более не является, вообще говоря, условием нерешетчатости в строгом смысле этого слова. Возьмем, например, скалярную нерешетчатую случайную величину ξ и по ней определим последовательность решетчатых случайных величин $\xi_{(n)} = (1/n)[\xi n]$, где $[v]$ означает целую часть v . Характеристические функции $f_{(n)}(t)$ сходятся к характеристической функции $f(t)$ равномерно по t из любого компакта, поэтому для последовательности $\{\xi_{(n)}\}$ выполнено условие (R). Это означает, что условие (R) допускает решетчатые распределения с шагом решетки, сходящимся к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Приведем теперь достаточное для (R $^\gamma$)

УСЛОВИЕ (R *). Найдется куб $\Delta[u]$ со стороной $\Delta > 0$ и с вершиной в точке $u = u_n \in \mathbb{R}^d$ такой, что распределение вектора $\xi_{(n)}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту с плотностью $p_{(n)}(v)$, равномерно отделенной в этом кубе от нуля: для некоторого $p > 0$ и всех достаточно больших n выполняется неравенство $p_{(n)}(v) \geq p > 0$ при $v \in \Delta[u]$.

Поскольку

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \left| \int_{\Delta[u]} e^{i\langle t, v \rangle} dv \right| = 0,$$

то при условии (R *)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t| \geq T} |\mathbb{E} e^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}| \leq 1 - \text{mes}(\Delta[u])p = 1 - p\Delta^d < 1.$$

Следовательно, выполнено условие (R $^\gamma$) для

$$\gamma = -\frac{1}{d} \ln(1 - p\Delta^d). \quad (8)$$

Заметим еще, что если для некоторого целого $m \geq 1$ условие (R *) выполнено для случайных векторов

$$S_{(n)}(m) = \xi_{(n)}(1) + \dots + \xi_{(n)}(m), \quad (9)$$

то исходные случайные векторы $\xi_{(n)}$ удовлетворяют условию (R $^\gamma$) для $\gamma = -(1/md) \times \ln(1 - p\Delta^d)$.

В нерешетчатом случае для схемы серий справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть случайные векторы $\xi_{(n)}$ удовлетворяют условиям (6), (L).

I. Если выполнено условие (R), то

$$P(S(n) \in \Delta[x]) = \frac{\Delta^d}{n^{d/2}} \left[\phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon_n(x, \Delta) \right], \quad (10)$$

где $\phi(t) = (1/(2\pi)^{d/2})e^{-|t|^2/2}$, и для любых фиксированных $\Delta_1, \Delta_2, 0 < \Delta_1 \leq \Delta_2 < \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, \Delta_1 \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0.$$

II. Если выполнено условие (R^γ) , то для любых фиксированных $\gamma_1 < \gamma, \Delta_2 > 0$, справедливо (10), где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x, e^{-n\gamma_1} \leq \Delta \leq \Delta_2} |\varepsilon_n(x, \Delta)| = 0. \quad (11)$$

Обратимся теперь к решетчатому случаю, когда для слагаемых $\xi_{(n)}(i)$ выполнено условие арифметичности (Z). Обозначим через

$$a_{(n)} = E\xi_{(n)}, \quad B_{(n)}^2 = E(\xi_{(n)} - a_{(n)})^T(\xi_{(n)} - a_{(n)})$$

соответственно среднее и ковариационную матрицу вектора $\xi_{(n)}$. Собственные числа матрицы $B_{(n)}$ обозначим $B_{(n)}(1) \leq B_{(n)}(2) \leq \dots \leq B_{(n)}(d)$, так что определитель $|B_{(n)}|$ матрицы $B_{(n)}$ равен $|B_{(n)}| = \prod_{i=1}^d B_{(n)}(i)$.

Условие (Z) для схемы серий имеет следующий вид.

УСЛОВИЕ (Z). Для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ и всех достаточно больших n справедливо равенство $f_{(n)}(2\pi t) = 1$, и для любого $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t|, \max_{1 \leq i \leq d} |t_i| \leq \pi} |f_{(n)}(t)| < 1.$$

Условие (Z) есть условие невырождения решетки, на которой сосредоточены случайные векторы $\xi_{(n)}$. Например, в $\mathbb{R}^1$ оно исключает сходимость к нулю при $n \rightarrow \infty$ вероятности $P(\xi_{(n)} \text{ нечетно})$.

Следующее условие является достаточным для выполнения (Z) (ср. с условием (R^*)). Пусть $\Delta_n[u]$ означает куб со стороной $\Delta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и вершиной в точке u .

УСЛОВИЕ (Z^*) . Для любого $t \in \mathbb{Z}^d$ выполняется $f_{(n)}(2\pi t) = 1$ и найдутся $u = u_n \in \mathbb{R}^d, p > 0$ такие, что для всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$P(\xi_{(n)} = y) \geq \frac{p}{\Delta_n^d} \quad \text{при } y \in \mathbb{Z}^d \cap \Delta_n[u_n].$$

ЛЕММА 1. Пусть выполнено условие (Z^*) . Тогда случайные векторы $\xi_{(n)}$ удовлетворяют условию (Z).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что при $n = 1, 2, \dots$ числа $\Delta = \Delta_n$ целые. Рассмотрим случайный вектор $\bar{\xi}_{(n)}$, имеющий равномерное распределение на множестве $\mathbb{Z}^d \cap \Delta_n[0)$. Тогда характеристическая функция $\bar{f}_{(n)}(t)$ этого вектора для $t = (t_1, \dots, t_d)$ равна

$$\bar{f}_{(n)}(t) = \prod_{k=1}^d g_{(n)}(t_k), \quad g_{(n)}(u) = \frac{e^{i\Delta u} - 1}{\Delta(e^{iu} - 1)}.$$

Поскольку

$$|g_{(n)}(u)|^2 = \frac{1}{\Delta^2} \frac{1 - \cos(\Delta u)}{1 - \cos u}$$

и при $\delta > 0$

$$\sup_{\delta/\Delta \leq |u| \leq \pi} |g_{(n)}(u)| \leq e^{-(1/12)\delta^2(1+o(1))},$$

то очевидно, что для характеристических функций $\bar{f}_{(n)}(t)$ векторов $\bar{\xi}_{(n)}$ выполнено условие (Z). В силу условия (Z*) имеет место неравенство $|f_{(n)}(t)| \leq 1 - p + p|\bar{f}_{(n)}(t)|$, поэтому условие (Z) справедливо и для исходной последовательности $\xi_{(n)}$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что утверждение леммы 1 сохранится, если условию (Z*) удовлетворяет не последовательность $\xi_{(n)}$, а последовательность $S_{(n)}(m)$ (см. (9)) для некоторого фиксированного $m \geq 1$.

В арифметическом случае наряду с последовательностью $\xi_{(n)}$ рассмотрим последовательность нормированных случайных векторов с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей

$$\zeta_{(n)} = (\xi_{(n)} - a_{(n)})B_{(n)}^{-1}.$$

В арифметическом случае для схемы серий справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть случайные векторы $\xi_{(n)}$ удовлетворяют условиям (Z) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}B_{(n)}(1) = \infty,$$

а случайные векторы $\zeta_{(n)}$ — условию (L). Тогда для $x \in \mathbb{Z}^d$

$$P(S(n) = x) = \frac{1}{n^{d/2}|B_{(n)}|} [\phi((x - na_{(n)})n^{-1/2}B_{(n)}^{-1}) + \varepsilon_n(x)],$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}^d} |\varepsilon_n(x)| = 0.$$

Заметим, что утверждение теоремы 2 сохранится, если условию (Z) удовлетворяет не $\xi_{(n)}$, а сумма $S_{(n)}(m)$ (см. (9)) для некоторой последовательности $m = m_n = o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ (см. доказательство теоремы 2).

4. Доказательство теорем 1, 2. Мы будем следовать в основном методу работы Стоуна [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим для краткости

$$P(S(n) \in \Delta[x]) = P_n(x, \Delta), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 1 является следствием следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (L), (R). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдутся $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) < \infty$ и $h_0 = h_0(\varepsilon, \delta) > 0$ такие, что при $n \geq n_0$, $\delta/\sqrt{n} \leq h \leq h_0$ выполняется

$$|P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{n}h) - h^d \phi(y)| \leq h^d \varepsilon \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^d. \quad (12)$$

Если дополнительно выполнено условие (R^γ) , то для любых $\varepsilon > 0$ и $\gamma_1 < \gamma$ найдется $n_1 = n_1(\varepsilon, \gamma_1) \in (n_0, \infty)$ такое, что соотношение (12) выполнено для всех $n \geq n_1$, $e^{-n\gamma_1} \leq h \leq h_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Введем в рассмотрение независимый от суммы $S(n)$ случайный вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ с плотностью

$$r(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \prod_{i=1}^d \left(\frac{\sin(x_i/2)}{x_i/2} \right)^2, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

и характеристической функцией $w(t) = \mathbb{E} e^{i\langle t, \eta \rangle} = \prod_{k=1}^d l(t_k)$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, где

$$l(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{если } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{если } |t| > 1. \end{cases}$$

Мы будем сглаживать распределение вектора $S(n)/\sqrt{n}$, прибавляя к нему $u\eta$, $u > 0$, и для $\Delta = Nu$ рассматривая вероятности

$$R^N(y, u) \equiv P\left(\frac{S(n)}{\sqrt{n}} + u\eta \in \Delta[y]\right).$$

Нетрудно видеть, что для $h = Nu$

$$R^N(y, u) = \int_{z \in \mathbb{R}^d} r_u(z) P_n(\sqrt{n}(y - z), \sqrt{n}h) dz, \quad (13)$$

где $r_u(z) = u^{-1}r(u^{-1}z)$ — плотность случайной величины $u\eta$.

В рамках доказательства леммы 2 выберем произвольные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma_1 < \gamma$. Плотность нормального распределения $\phi(x)$ ограничена числом $\phi(0) = (2\pi)^{-d/2}$ и равномерно непрерывна во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, поэтому можно выбрать константу $h_1 \in (0, 1)$ таким образом, что

$$\sup_{|x-y| \leq h_1} |\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Ниже наряду с евклидовой нормой $|y| = (y_1^2 + \dots + y_d^2)^{1/2}$ мы будем использовать “равномерную” норму $\rho(y) = \max_{1 \leq k \leq d} |y_k|$.

Для произвольного $\beta > 0$ обозначим

$$\varepsilon_1(\beta) = \int_{\rho(y) \geq \beta^{-1}} r(y) dy.$$

Воспользуемся далее следующей леммой.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (L), (R). Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдутся $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) < \infty$, $N = N(\varepsilon, \delta) > 0$ и $u_0 = u_0(\varepsilon, \delta) > 0$ такие, что для $h = Nu$ и всех $n \geq n_0$, $\delta/\sqrt{n} \leq u \leq u_0$ справедливы неравенства

$$h^d(\phi(y) - \varepsilon) \leq R_n^N(y, u) \leq h^d(\phi(y) + \varepsilon) \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^d. \quad (14)$$

Если дополнительно выполнено условие (R^γ) , то для любых $\varepsilon > 0$, $\gamma_1 < \gamma$ найдется $n_1 = n_1(\varepsilon, \gamma_1) \in (n_0, \infty)$ такое, что неравенства (14) справедливы для $h = Nu$ и всех $n \geq n_1$, $e^{-n\gamma_1} \leq u \leq u_0$.

Лемму 3 мы докажем несколько позже в этом пункте, а сейчас с помощью этой леммы продолжим доказательство леммы 2. Отметим, что все неравенства (или тождества), которые будут использоваться в оставшейся части доказательства теоремы 1 и в формулировках которых присутствует параметр y , справедливы для любого значения параметра $y \in \mathbb{R}^d$ (как, например, в неравенстве (14)). Для краткости упоминание об этом мы будем опускать.

Обозначим $\mathbf{j} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$. Поскольку для $N = 1/\beta^2$, $h = Nu$, $\Delta = \sqrt{nh}$, $\Delta_\pm = \Delta(1 \pm 2\beta)$, $y_\pm(z) = y \mp \beta h \mathbf{j}$ при $\rho(z) \leq \beta h$ имеют место соотношения

$$\Delta_+[\sqrt{n}(y_+ - z)) \geq \Delta[\sqrt{n}y] \geq \Delta_-[\sqrt{n}(y_- - z)],$$

то

$$\inf_{\rho(z) \leq \beta h} P_n(\sqrt{n}(y_+ - z), \Delta_+) \geq P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) \geq \sup_{\rho(z) \leq \beta h} P_n(\sqrt{n}(y_- - z), \Delta_-). \quad (15)$$

Используя (13) и первое неравенство в (15), получаем

$$\begin{aligned} R_n^N(y_+, u) &\geq \int_{\rho(z) \leq \beta h} r_u(z) P_n(\sqrt{n}(y_+ - z), \Delta_+) dz \\ &\geq \int_{\rho(z) \leq \beta h} r_u(z) dz P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) \geq (1 - \varepsilon_1(\beta)) P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}). \end{aligned}$$

Из этого неравенства, оценивая его левую часть с помощью второго неравенства (14) и выбирая $\beta > 0$ достаточно малым, получаем

$$P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) \leq h^d \left((1 + 2\beta)^d \phi(y - \beta h \mathbf{j}) + \frac{1}{6} \varepsilon \right) (1 - \varepsilon_1(\beta))^{-1} \leq h^d[\phi(y) + \varepsilon], \quad (16)$$

$$P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) \leq \sup_y h^d[\phi(y) + \varepsilon] = h^d[\phi(0) + \varepsilon]. \quad (17)$$

Аналогично, с помощью (13), второго неравенства (15) и (17) находим

$$\begin{aligned} R_n^N(y_-, u) &= \int_{\rho(z) \leq \beta h} r_u(z) P_n(\sqrt{n}(y_- - z), \Delta_-) dz \\ &\quad + \int_{\rho(z) > \beta h} r_u(z) P_n(\sqrt{n}(y_- - z), \Delta_-) dz \\ &\leq \int_{\rho(z) \leq \beta h} r_u(z) dz P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) + \int_{\rho(z) > \beta h} r_u(z) h^d dz [\phi(0) + \varepsilon] \\ &\leq P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{nh}) + h^d[\phi(0) + \varepsilon] \varepsilon_1(\beta). \end{aligned}$$

Оценивая левую часть последнего неравенства с помощью первого неравенства (14) и вновь выбирая $\beta > 0$ достаточно малым, получаем

$$P_n(\sqrt{n}y, \sqrt{n}h) \geq h^d [\phi(y) - \varepsilon]. \quad (18)$$

В силу (16), (18) лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Характеристическая функция

$$q(t) = f_{(n)}^n(tn^{-1/2})w(ut)$$

случайного вектора $S(n)/\sqrt{n} + u\eta$ равна 0 вне множества $\{\rho(t) \leq u^{-1}\}$ и, следовательно, абсолютно интегрируема. Поэтому в силу известной формулы обращения плотность $p(z)$ распределения этого вектора имеет вид

$$p(z) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-i\langle z, t \rangle} q(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\rho(t) \leq u^{-1}} e^{-i\langle z, t \rangle} q(t) dt,$$

и для $\Delta \equiv h = Nu$

$$\begin{aligned} R_n^N(y, u) &= P\left(\frac{S(n)}{\sqrt{n}} + u\eta \in \Delta[y]\right) = \int_{\Delta[y]} p(z) \\ &= \int_{\rho(t) \leq u^{-1}} \int_{\Delta[y]} e^{-i\langle z, t \rangle} dz q(t) dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл есть $h^{-d}g_h(t)$, где

$$g_h(t) = e^{-i\langle y, t \rangle} \prod_{k=1}^d \frac{1 - e^{-it_k h}}{it_k h}.$$

Поэтому

$$R_n^N(y, u) = \frac{h^d}{(2\pi)^d} \int_{\rho(t) \leq u^{-1}} e^{-i\langle y, t \rangle} g_h(t) f_{(n)}^n(tn^{-1/2})w(ut) dt. \quad (19)$$

Характеристическая функция $f_0(t) = e^{-|t|^2/2}$ и плотность $\phi(y)$ нормального закона связаны соотношением

$$h^d \phi(y) = \frac{h^d}{(2\pi)^d} \int e^{-i\langle y, t \rangle} f_0(t) dt.$$

Поэтому в силу (19)

$$|R_n^N(y, u) - h^d \phi(y)| \leq \frac{h^d}{(2\pi)^d} (|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|),$$

где для произвольных $\beta = \beta_n > 0$ и $T > 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(\beta) \equiv \int_{\beta\sqrt{n} \leq \rho(t), \rho(t) \leq u^{-1}} e^{-i\langle y, t \rangle} g_h(t) f_{(n)}^n(tn^{-1/2})w(ut) dt, \\ I_2 &= I_2(T, \beta) \equiv \int_{T \leq \rho(t) < \beta\sqrt{n}} e^{-i\langle y, t \rangle} g_h(t) f_{(n)}^n(tn^{-1/2})w(ut) dt, \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\rho(t) \leq T} e^{-i\langle y, t \rangle} (g_h(t) f_{(n)}^n(tn^{-1/2}) w(ut) - f_0(t)) dt,$$

$$I_4 = \int_{T < \rho(t)} e^{-i\langle y, t \rangle} f_0(t) dt.$$

Докажем, что для заданных $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma_1 < \gamma$ найдутся $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) < \infty$, $N = N(\varepsilon, \delta) > 0$ и $u_0 = u_0(\varepsilon, \delta) > 0$ такие, что для $h = Nu$, $n \geq n_0$, $u \leq u_0$ выполняется

$$\max_{2 \leq i \leq 4} |I_i| \leq \varepsilon;$$

при дополнительном ограничении $u \geq \delta/\sqrt{n}$ выполняется

$$|I_1| \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Если выполнено дополнительное условие (R^γ) , то найдется $n_1 = n_1(\varepsilon, \gamma_1) \in (n_0, \infty)$ такое, что для $n \geq n_1$, $h = Nu$, $u \leq u_0$ неравенство (20) верно при более слабом дополнительном ограничении $u \geq e^{-n\gamma_1}$.

Поскольку $|(1 - e^{-iht_i})(iht_i)^{-1}| \leq 1$, то $|g_h(t)| \leq 1$ и

$$|I_1| \leq \int_{\beta\sqrt{n} \leq \rho(t), \rho(t) \leq u^{-1}} |f_{(n)}^n(tn^{-1/2})|^n dt.$$

В силу условия (R) для любого фиксированного $\delta > 0$ найдутся $\beta = \beta_n \downarrow 0$ и $N_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ такие, что

$$n^{d/2} \sup_{\beta_n \leq \rho(t) \leq 1/\delta} |f_{(n)}^n(t)| \leq e^{-N_n}. \quad (21)$$

Из (21) следует, что

$$\int_{\beta_n\sqrt{n} \leq \rho(t) \leq \sqrt{n}/\delta} |f_{(n)}^n(tn^{-1/2})|^n dt \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^d e^{-N_n}.$$

Мы доказали, что если $u \geq \delta/\sqrt{n}$, то $I_1(\beta_n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по y, h . Если $\gamma_1 < \gamma$, то в силу (R^γ) выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы

$$\sup_{1/\delta \leq \rho(t)} \sup_{n \geq 1} |f_{(n)}^n(t)| \leq e^{-d(\gamma+\gamma_1)/2}.$$

Тогда

$$\int_{\sqrt{n}/\delta \leq \rho(t) \leq e^{n\gamma_1}} |f_{(n)}^n(tn^{-1/2})|^n dt \leq n^{d/2} e^{-nd((\gamma_1+\gamma)/2-\gamma_1)}$$

и, стало быть, при $e^{-nd\gamma_1} \leq u \leq \delta/\sqrt{n}$ также выполнено $I_1(\beta_n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по y, h . Соотношение (20) для некоторого $\beta_n \downarrow 0$ установлено.

Оценим теперь интеграл $I_2 = I_2(T, \beta)$. Для этого докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $T_0 = T_0(\varepsilon) < \infty$ и $n_0 = n_0(\varepsilon) < \infty$ такие, что для последовательности $\beta_n \downarrow 0$ (для которой справедлива оценка (20)), для всех $n \geq n_0$, $T \geq T_0$ выполнено $|I_2(T, \beta_n)| \leq \varepsilon$. Воспользуемся следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. *Найдутся $n_1 < \infty$, $N < \infty$, $\nu \in (0, 1)$, $b^2 > 0$ и случайный вектор $\bar{\xi}_{(n)}$ с нулевым средним такие, что для всех $n \geq n_1$ выполнены следующие соотношения: для некоторой последовательности $\nu_n \in [\nu, 1]$*

$$|f_{(n)}(t)| \leq 1 - \nu_n + \nu_n |\bar{f}_{(n)}(t)|, \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad (22)$$

$$P(|\bar{\xi}_{(n)}| \geq 2N) = 0; \quad \mathbf{e} \bar{B}_{(n)}^2 \mathbf{e}^T \geq b^2, \quad |\mathbf{e}| = 1, \quad (23)$$

где $\bar{f}_{(n)}(t)$ — характеристическая функция $\bar{\xi}_{(n)}$, $\bar{B}_{(n)}^2$ — ковариационная матрица $\bar{\xi}_{(n)}$.

Доказательство предложения А мы выполним несколько позже, а сейчас продолжим оценивать интеграл $I_2(T, \beta_n)$.

Заметим, что из (23) вытекает, что

$$|\bar{f}_{(n)}(tn^{-1/2})| \leq 1 - \frac{1}{n}(b^2\psi(t) + o(1)), \quad \psi(t) = \frac{1}{2}|t|^2,$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $|t| \leq r_n \sqrt{n}$ для любой фиксированной последовательности $r_n = o(1)$. Поэтому в силу (22) справедливо соотношение

$$|f_{(n)}(tn^{-1/2})|^n \leq \left| 1 - \nu_n \frac{1}{n}(b^2\psi(t) + o(1)) \right|^n \leq e^{-\nu(b^2\psi(t) + o(1))}, \quad (24)$$

где остаточный член $o(1)$ равномерен по $|t| \leq r_n \sqrt{n}$. Из (24) для $r_n = \beta_n$ следует, что

$$|I_2(T, \beta_n)| \leq \int_{T \leq \rho(t) \leq \beta_n \sqrt{n}} |f_{(n)}(tn^{-1/2})|^n dt \leq \int_{T \leq \rho(t)} e^{-\nu b^2 |t|^2 / 2} dt (1 + o(1)),$$

поэтому выбором $T < \infty$ можно добиться неравенства $|I_2(T, \beta_n)| \leq \varepsilon$.

Докажем теперь

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ А. Итак, доказываем соотношения (22), (23). В силу условия (R) найдутся $c > 0$ и $\nu \in (0, 1)$ такие, что для всех достаточно больших n

$$\sup_{|\mathbf{e}|=1} |f_{(n)}(\mathbf{e})| \leq e^{-c} < 1, \quad \frac{1 - \nu + e^{-c}}{\nu} \leq e^{-c/2}. \quad (25)$$

В силу того, что вектор $\xi_{(n)}$ имеет нулевое среднее и единичную ковариационную матрицу, используя неравенство Чебышева, получаем для всех $n \geq 1$

$$P(|\xi_{(n)}| \geq t) \leq d \sup_{|\mathbf{e}|=1} P\left(|\langle \mathbf{e}, \xi_{(n)} \rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{d}} t\right) \leq d \sup_{|\mathbf{e}|=1} \frac{d}{t^2} \mathbf{E} |\langle \mathbf{e}, \xi_{(n)} \rangle|^2 = \frac{d^2}{t^2}.$$

Поэтому можно выбрать $N < \infty$ такое, что $1 - \nu_n \equiv P(|\xi_{(n)}| > N) \leq 1 - \nu$ для всех $n \geq 1$. Обозначим $c_{(n)} = \mathbf{E}(\xi_{(n)} | |\xi_{(n)}| \leq N)$ условное среднее вектора $\xi_{(n)}$ при условии $\{|\xi_{(n)}| \leq N\}$. Рассмотрим случайный вектор $\bar{\xi}_{(n)}$ с распределением

$$P(\bar{\xi}_{(n)} \in V) = \frac{1}{\nu_n} P(\xi_{(n)} - c_{(n)} \in V; |\xi_{(n)}| \leq N) \equiv P(\xi_{(n)} - c_{(n)} \in V / |\xi_{(n)}| \leq N). \quad (26)$$

Убедимся теперь, что выполнены соотношения (22), (23), где в качестве $\bar{\xi}_{(n)}$ взят случайный вектор, определенный в (26), с характеристической функцией $\bar{f}_{(n)}(t)$. Поскольку

$$f_{(n)}(t) = E(e^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}; |\xi_{(n)}| > N) + E(e^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}; |\xi_{(n)}| \leq N), \quad (27)$$

то для $\nu_n \equiv P(|\xi_{(n)}| \leq N) \geq \nu$ выполняются неравенства

$$|f_{(n)}(t)| \leq 1 - \nu_n + \nu_n \left| E \left(\frac{e^{i\langle t, \xi_{(n)} \rangle}}{|\xi_{(n)}|} \leq N \right) \right| = 1 - \nu_n + \nu_n |\bar{f}_{(n)}(t)|.$$

Это доказывает (22). В силу построения справедливо первое соотношение (23). Заметим далее, что в силу (27) для любого $e \in \mathbb{R}^d$, $|e| = 1$, и всех достаточно больших n выполняется

$$|\bar{f}_{(n)}(e)| \leq \frac{1}{\nu_n} (|f_{(n)}(e)| + 1 - \nu_n) \leq \frac{1}{\nu_n} (e^{-c} + 1 - \nu_n).$$

Поэтому в силу выбора c и ν (см. (25)) для $\nu_n \in [\nu, 1]$ справедливо неравенство

$$\sup_{|e|=1} |\bar{f}_{(n)}(e)| \leq e^{-c/2}. \quad (28)$$

Допустим, что для последовательности равномерно ограниченных векторов $\bar{\xi}_{(n)}$, характеристические функции которых удовлетворяют неравенству (28), не найдется $b^2 > 0$ такого, что для всех достаточно больших n выполнено второе соотношение (23). Это означает, что для некоторой подпоследовательности $n_k \rightarrow \infty$ и для векторов e_k единичной длины выполняется при $k \rightarrow \infty$ соотношение $E|\langle e_k, \bar{\xi}_{(n_k)} \rangle|^2 \rightarrow 0$. Следовательно, случайные величины $\langle e_k, \bar{\xi}_{(n_k)} \rangle$ сходятся к 0 по вероятности, и $\bar{f}_{(n_k)}(e_k) \rightarrow 1$. Последнее в силу (28) невозможно. Поэтому второе соотношение (23), а вместе с ним и предложение А доказаны.

Оценим I_3 . Если $T > 0$ фиксировано, то, очевидно, равномерно по t таким, что $\rho(t) \leq T$, выполняются следующие три асимптотические равенства:

- 1) $|w(ut) - 1| = o(1)$ при $u \rightarrow 0$;
- 2) $|g_h(t) - 1| = o(1)$ при $h \rightarrow 0$;
- 3) $|f_{(n)}^n(tn^{-1/2}) - f_0(t)| = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому для любого фиксированного $T > 0$ выполняется $|I_3| = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, $u \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Оценка $|I_4|$ происходит просто. Ясно, что выбором T можно сделать $|I_4|$ сколь угодно малым.

Лемма 3, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Перейдем теперь к рассмотрению арифметического случая. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Для $x \in \mathbb{Z}^d$ обозначим $P_n(x) = P(S(n) = x)$.

ЛЕММА 4. Пусть для последовательности $\xi_{(n)}$ выполнены условия (Z),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} B_{(n)}(1) > 0$$

и, кроме того, для последовательности $(\zeta_{(n)})$ выполнены условия (L), (R). Тогда для $y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d$

$$P_n(y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)}) = \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}|} [\phi(y) + \varepsilon_n(y)], \quad (29)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d} |\varepsilon_n(y)| = 0. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. По формуле обращения имеем

$$P_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\rho(t) \leq \pi} e^{-i\langle x, t \rangle} f_{(n)}^n(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (31)$$

Поэтому, полагая $x = y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d$ и делая в интеграле замену $t = z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} P_n(y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)}) &= \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}| (2\pi)^d} \\ &\times \int_{\rho(z n^{-1/2} B_{(n)}^{-1}) \leq \pi} e^{-i\langle y, z \rangle} e^{-i\langle n^{1/2} a_{(n)} B_{(n)}^{-1}, z \rangle} f_{(n)}^n(z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2}) dz. \end{aligned} \quad (32)$$

Используя далее формулу, связывающую характеристическую функцию $f_0(z)$ и плотность $\phi(y)$ нормального распределения:

$$\frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}|} \phi(y) = \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}| (2\pi)^d} \int e^{-i\langle y, z \rangle} f_0(z) dz,$$

получаем неравенство

$$\left| P_n(y \sqrt{n} B_{(n)} + na_{(n)}) - \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}|} \phi(y) \right| \leq \frac{1}{n^{d/2} |B_{(n)}| (2\pi)^d} (|I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|),$$

где для $\beta_n \downarrow 0$, $T < \infty$,

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1(\beta_n) \equiv \int_{\beta_n \leq \rho(z n^{-1/2}), \rho(z n^{-1/2} B_{(n)}^{-1}) \leq \pi} e^{-i\langle y, z \rangle} \\ &\quad \times e^{-i\langle n^{1/2} a_{(n)} B_{(n)}^{-1}, z \rangle} f_{(n)}^n(z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2}) dz, \\ I_2 &= I_2(T, \beta_n) = \int_{T \leq \rho(z) < \beta_n \sqrt{n}} e^{-i\langle y, z \rangle} e^{-i\langle n^{1/2} a_{(n)} B_{(n)}^{-1}, z \rangle} f_{(n)}^n(z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2}) dz, \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{\rho(z) \leq T} e^{-i\langle y, z \rangle} (e^{-i\langle n^{1/2} a_{(n)} B_{(n)}^{-1}, z \rangle} f_{(n)}^n(z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2}) - f_0(z)) dz,$$

$$I_4 = \int_{T < \rho(z)} e^{-i\langle y, z \rangle} f_0(z) dz.$$

Докажем, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 < \infty$ такое, что для $n \geq n_0$, $y\sqrt{n} \times B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d$, и всех достаточно больших T выполняется

$$\max_{1 \leq i \leq 4} |I_i| \leq \varepsilon. \quad (33)$$

В силу условия (Z) для любого $\beta > 0$ найдется $c(\beta) > 0$ такое, что

$$\sup_{\beta \leq \rho(z n^{-1/2}), \rho(z n^{-1/2} B_{(n)}^{-1}) \leq \pi} |f_{(n)}(z B_{(n)}^{-1} n^{-1/2})| \leq e^{-c},$$

поэтому $|I_1| \leq \int_{\rho(z) \leq \pi} e^{-cn} dz \leq (2\pi)^d e^{-cn}$. Отсюда следует, что для любого $\beta > 0$ равномерно по y выполняется $I_1 = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому можно выбрать последовательность положительных чисел $\beta_n = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ такую, что $I_1 = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

В доказательстве леммы 3 для оценивания интегралов I_2, I_3, I_4 мы использовали только условия (L) и (R) для случайных векторов $\xi_{(n)}$, которые в лемме 3 совпадают с векторами $\zeta_{(n)}$. Поэтому в силу этих оценок неравенства $|I_i| \leq \varepsilon$ для $i = 2, 3, 4$ и всех достаточно больших n доказаны. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда для каждого n наряду с независимыми векторами $\xi_{(n)}(1), \dots, \xi_{(n)}(n)$ определен еще один случайный вектор $\xi'_{(n)}$, не зависящий от первых n векторов.

ЛЕММА 5. Пусть для последовательности $\xi_{(n)}$ выполнены условия леммы 4, а целочисленная последовательность $\xi'_{(n)}$ со средними $a'_{(n)} = E\xi'_{(n)}$ такова, что последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi'_{(n)} - a'_{(n)})B_{(n)}^{-1} \quad \text{сходится по вероятности к 0 при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда для $y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} + a'_{(n)} \in \mathbb{Z}^d$ выполнено равенство

$$P(S(n) + \xi'_{(n)} = y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} + a'_{(n)}) = \frac{1}{n^{d/2}|B_{(n)}|} [\phi(y) + \varepsilon_n(y)], \quad (34)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} + a'_{(n)} \in \mathbb{Z}^d} |\varepsilon_n(y)| = 0. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in \mathbb{Z}^d$ обозначим $R_n(x) = P(S(n) + \xi'_{(n)} = x)$. Повторя доказательство леммы 4, надо в формуле (31) и всех последующих заменить $P_n(x)$ на $R_n(x)$, вместо $f_{(n)}^n(t)$ написать произведение $f_{(n)}^n(t)f'_{(n)}(t)$, где второй сомножитель есть характеристическая функция случайного вектора $\xi'_{(n)}$. В формуле (32) и всех последующих вместо na_n следует написать сумму $na_n + a'_n$. Тогда, следуя доказательству леммы 4, мы приходим к соотношениям (29), (30), причем в соответствии с высказанным выше “правилом” в левой части (29) вместо $P_n(y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)})$ следует написать $R_n(y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} + a'_{(n)})$, и в (30) вместо na_n следует поставить $na_n + a'_n$. Так подправленные соотношения (29), (30) доказывают лемму 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть случайные векторы $\zeta_{(n)}(1), \dots, \zeta_{(n)}(n)$ независимы и распределены, как $\zeta_{(n)}$. В силу условия (L) найдется такая целочисленная последовательность $m = m_n = o(n)$, что для нормированной суммы

$$\eta_n \equiv \frac{1}{\sqrt{m}}(\zeta_{(n)}(1) + \dots + \zeta_{(n)}(m))$$

будет выполнена центральная предельная теорема. Из центральной предельной теоремы следует, что для последовательности η_n выполнено условие (R). При этом для последовательности $S_{(n)}(m)$ будет выполнено условие (Z) (условие (Z) для исходной последовательности $\xi_{(n)}$ может и не выполняться; достаточно выполнения этого условия для суммы $S_{(n)}(m)$ растущего числа $m = m_n = o(n)$ слагаемых). Обозначим $\bar{n} = [n/m]$, $k = n - m\bar{n}$ и рассмотрим случайные векторы

$$\bar{\xi}_{(\bar{n})}(1), \bar{\xi}_{(\bar{n})}(2), \dots, \bar{\xi}_{(\bar{n})}(\bar{n}), \xi'_{(\bar{n})},$$

где для $1 \leq j \leq \bar{n}$ (см. (9))

$$\bar{\xi}_{(\bar{n})}(j) = S_{(n)}(mj) - S_{(n)}(m(j-1)), \quad S_{(n)}(0) = 0, \quad \xi'_{(\bar{n})} = S_{(n)}(n) - S_{(n)}(m\bar{n}).$$

Очевидно, что для этих векторов выполнены все условия леммы 5, в формулировке которой буква n заменена буквой $\bar{n}$. Поскольку $na_{(n)} = \bar{n}a_{(n)} + a'_{(n)}$, $n \sim \bar{n}m$, то в силу леммы 5 получаем для $y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d$ равенство

$$P(S(n) = y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)}) = \frac{1}{n^{d/2}|B_{(n)}|} \left[\phi \left(y\sqrt{1 + \frac{k}{\bar{n}m}} \right) + \varepsilon_n(y) \right], \quad (36)$$

где

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y\sqrt{n}B_{(n)} + na_{(n)} \in \mathbb{Z}^d} |\varepsilon_n(y)| = 0. \quad (37)$$

Очевидно, что для некоторого $c < \infty$ выполняется неравенство $|\phi(y) - \phi(y')| \leq c|y - y'|$. Поэтому

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left| \phi(y) - \phi \left(y\sqrt{1 + \frac{k}{\bar{n}m}} \right) \right| = o(1),$$

и из соотношений (36), (37) вытекает утверждение теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gnedenko B. V. On a local limit theorem for identically distributed independent summands // Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-Nat. Reihe. 1954. V. 3. P. 287–293.
- [2] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
- [3] Ryacheva E. L. On domains of attraction of multi-dimensional distributions // Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Meh-Mat. 1958. P. 5–44.
- [4] Shepp L. A. A local limit theorem // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. P. 419–423.
- [5] Stone C. J. Local limit theorems for asymptotically stable distributions // Notices Amer. Math. Soc. 1964. V. 11. P. 465.
- [6] Stone C. On local and ratio limit theorems // Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. V. 2. Part 2. Los Angeles, CA: Univ. of California Press, 1966. P. 217–224.
- [7] Боровков А. А., Могульский А. А. Интегро-локальные предельные теоремы для сумм случайных векторов, включающие большие отклонения. I, II // Теор. вероятн. и ее примен. 1998. Т. 43. №1. С. 3–17; 2000. Т. 45. №1. С. 5–19.
- [8] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.
- [9] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
- [10] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1967.
- [11] Боровков А. А. Теория вероятностей. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Эдиториал УРСС; Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: borovkov@math.nsc.ru, mogul@math.nsc.ru

Поступило
20.05.2004
Исправленный вариант
05.09.2005