Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, Аттракторы диссипативных гиперболических уравнений с сингулярно осциллирующими внешними силами, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 522–545

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2722>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:30:40

АТТРАКТОРЫ ДИССИПАТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

М. И. Вишик, В. В. Чепыжов

Изучается равномерный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ диссипативного волнового уравнения в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, у которого внешняя сила сингулярно осциллирует по времени, точнее имеет вид $g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, где $\alpha > 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Это уравнение имеет в $E = H_0^1 \times L_2$ поглощающее множество B^ε , которое допускает оценку $\|B^\varepsilon\|_E \leq C_1 + C_2 \varepsilon^{-\alpha}$ и, следовательно, может неограниченно расти по норме E при $\varepsilon \rightarrow 0+$. При выполнении некоторых дополнительных условий для функции $g_1(x, z)$, $x \in \Omega$, $z \in \mathbb{R}$, доказано, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$ глобальные аттракторы $\mathcal{A}^\varepsilon$ такого уравнения ограничены в E , т.е. $\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C_3$, $0 < \varepsilon \leq 1$.

Наряду с исходным уравнением рассматривается “предельное” волновое уравнение с внешней силой $g_0(x, t)$, которое также имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$. В том случае, когда $g_0(x, t) = g_0(x)$ и глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ предельного уравнения является экспоненциальным, установлено, что при $0 < \alpha \leq \alpha_0$ хаусдорфово отклонение $\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq C \varepsilon^{\eta(\alpha)}$, причем $\eta(\alpha) > 0$. Для $\eta(\alpha)$ и α_0 даются явные формулы. Рассмотрен также неавтономный случай, когда функция $g_0 = g_0(x, t)$. Предполагается, что выполнены достаточные условия при которых “предельное” неавтономное уравнение имеет экспоненциальный глобальный аттрактор. В этом случае получены оценки сверху для хаусдорфова отклонения аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ от $\mathcal{A}^0$, аналогичные приведенным выше.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Рассматривается диссипативное волновое уравнение вида

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.1)$$

где $\gamma > 0$, $1 \geq \varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$. Нелинейная функция $f(u) \in C^1$. Предполагается, что функция $f(u)$ и внешняя сила $g^\varepsilon(t) := g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$ удовлетворяют условиям, при которых начальная задача

$$u|_{t=\tau} = u_\tau(x), \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau(x)$$

для (1.1) корректно поставлена при фиксированном $\varepsilon > 0$. В частности, считается выполненным неравенство $|f'(v)| \leq K(1 + |v|^\rho)$ при всех $v \in \mathbb{R}$, где $0 \leq \rho < 2/(n-2)$ при

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00390, Фонда содействия отечественной науке и фонда CRDF, грант № 1-2654.

$n \geq 3$ и $\rho \geq 0$ любое при $n = 1, 2$. Кроме того, предполагается, что функции $g_0(x, t)$ и $g_1(x, z)$ являются *трансляционно компактными* в пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ (см. п. 2).

Наряду с уравнением (1.1) рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 \hat{u}^\varepsilon + \gamma \partial_t \hat{u}^\varepsilon = \Delta \hat{u}^\varepsilon - f(\hat{u}^\varepsilon) + \hat{g}_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \hat{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.2)$$

у которых внешние силы $\hat{g}^\varepsilon(t) := \hat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1(t/\varepsilon)$ принадлежат оболочке $\mathcal{H}(g^\varepsilon)$ исходной внешней силы $g^\varepsilon(t)$ в пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ при любом фиксированном $\varepsilon \in]0, 1]$.

Обозначим через $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau), t \geq \tau\}$ процесс, соответствующий уравнению (1.2): $U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)y_\tau = \hat{y}^\varepsilon(t)$, где $y_\tau = (u_\tau, p_\tau) \in E := H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ – начальное условие при $t = \tau$ для уравнения (1.2), а $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(t), p^\varepsilon(t))$ – его решение при $t \geq \tau$. Здесь и далее, $E := H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ обозначает энергетическое фазовое пространство.

В п. 2 на основании энергетических оценок устанавливается, что при фиксированном $\varepsilon \in]0, 1]$ семейство процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau), \hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)\}$, обладает компактным в E поглощающим множеством $B^\varepsilon \Subset E$, для которого имеет место оценка

$$\|B^\varepsilon\|_E \leq C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha}. \quad (1.3)$$

Из этого свойства следует, что при каждом фиксированном $\varepsilon \in]0, 1]$ семейство процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau), \hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)\}$, имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon \subset B^\varepsilon$ в пространстве E , т.е. множество $\mathcal{A}^\varepsilon$ притягивает при $t \rightarrow +\infty$ в норме E любые ограниченные семейства траекторий $\{\hat{y}^\varepsilon(t), t \geq \tau \mid \|\hat{y}^\varepsilon(\tau)\|_E \leq M\}$ уравнения равномерно по $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, и при этом $\mathcal{A}^\varepsilon$ является минимальным замкнутым множеством, обладающим этим свойством. В частности,

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon^\alpha}. \quad (1.4)$$

Отметим, что при сделанных выше предположениях допускается неограниченный рост норм $\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (это можно показать на конкретных примерах).

Одновременно с уравнениями (1.2) рассматривается “предельное” семейство уравнений

$$\partial_t^2 \hat{u}^0 + \gamma \partial_t \hat{u}^0 = \Delta \hat{u}^0 - f(\hat{u}^0) + \hat{g}^0(t), \quad \hat{u}^0|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.5)$$

где $\hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g_0)$, которое также порождает “предельное” семейство процессов $\{U_{\hat{g}^0}(t, \tau), \hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g_0)\}$, действующих в E . Это семейство обладает равномерным глобальным аттрактором $\mathcal{A}^0$ (см. п. 2). Множество $\mathcal{A}^0$ компактно и, в частности, ограничено в E .

В п. 3 изучается вопрос об отклонении траекторий $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(t), \hat{p}^\varepsilon(t))$ при $t \geq \tau$ уравнения (1.2) от траекторий $\hat{y}^0(t) = (\hat{u}^0(t), \hat{p}^0(t))$ соответствующего “предельного” уравнения (1.5), удовлетворяющих одинаковым начальным условиям

$$\hat{y}^\varepsilon(\tau) = \hat{y}^0(\tau) = y_\tau \in B^\varepsilon.$$

При этом предполагается, что для всех функций $\hat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ выполнено следующее существенное дополнительное условие: существуют первообразные $\hat{G}_1(x, z)$ по переменной z , $\partial_z \hat{G}_1(x, z) = \hat{g}_1(x, z)$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq M < \infty \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

где число M не зависит от $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$. В п. 3 приведены примеры квазипериодических (по z) функций, для которых (1.6) имеет место.

При выполнении перечисленных выше условий, свойства (1.6), а также неравенства

$$|f'(v)| \leq K \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

доказано, что

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t) - \widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leq D\varepsilon^{1/2-\alpha} e^{rt} \quad \forall t \geq 0, \quad (1.8)$$

где D и r — некоторые положительные константы, не зависящие от ε . Для показателя r дается явное выражение. Эта оценка является аналогом известных глобальных оценок Боголюбова.

Несмотря на то, что поглощающее множество B^ε уравнений (1.2) допускает лишь оценку (1.3), в п. 4 доказано, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнений (1.2) равномерно ограничен по $\varepsilon \in]0, 1]$ в норме E :

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (1.9)$$

если показатель α в (1.1) и (1.2) удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = \frac{1}{2(1 + r/\beta)}. \quad (1.10)$$

Здесь число r такое же, как и в оценке (1.8), а коэффициент β взят из экспоненты в энергетическом неравенстве для уравнений (1.2) (см. (2.9) в п. 2).

В ряде важных случаев удалось оценить сверху хаусдорфово отклонение глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ от глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$. Первый такой случай рассмотрен в п. 5. Предполагается, что в уравнении (1.1) внешняя сила имеет вид

$$g^\varepsilon(t) = g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно, в уравнениях (1.2)

$$\widehat{g}^\varepsilon(x, t) := g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

а “предельное” семейство волновых уравнений (1.5) состоит из одного автономного уравнения, так как $g_0(x)$ не зависит от времени t . Кроме того, предполагается, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ этого автономного уравнения является экспоненциальным. Достаточные условия для этого известны (см. п. 5). Главное из них заключается в том, что “предельное” уравнение (1.5) имеет конечное число стационарных точек, причем все они гиперболические.

При выполнении этих условий доказана следующая оценка:

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \quad \eta_0(\alpha) = \frac{\nu}{2(r + \nu)}(1 - \alpha). \quad (1.11)$$

Здесь r такое же, как и в (1.8), а ν — коэффициент в экспоненте из формулы для экспоненциального притяжения аттрактором $\mathcal{A}^0$ ограниченных семейств решений “предельного” уравнения (1.5).

Наконец, в п. 6 и п. 7 рассмотрен случай, когда “предельное” уравнение (1.5) является неавтономным: $\widehat{g}_0 = \widehat{g}_0(t) \in \mathcal{H}(g_0)$, но его глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ является экспоненциальным. Достаточные условия для этого даны в [1] и изложены в п. 6. В п. 7 доказана оценка вида (1.11) для $\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0)$, если выполнены условия из работы [1].

Некоторые проблемы, связанные с усреднением глобальных аттракторов автономных и неавтономных диссипативных уравнений математической физики, изучались в работах [2]–[8]. В работах [1], [9] доказаны оценки вида (1.11) для диссипативных волновых уравнений вида (1.1) при $\alpha = 0$ (случай несингулярной осцилляции внешних сил).

В заключение отметим, что и для некоторых других уравнений математической физики, содержащих сингулярно осциллирующие члены вида $g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$ или $g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x/\varepsilon, t)$, имеют место результаты, аналогичные результатам, полученным в настоящей статье.

2. Равномерный аттрактор диссипативного волнового уравнения с сингулярно осциллирующей по времени внешней силой. Изучается следующее волновое уравнение с нулевыми граничными условиями:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.1)$$

где $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = u(x, t)$ – неизвестная вещественная функция, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ – коэффициент диссипации, $\varepsilon > 0$ – малый параметр и $0 < \alpha \leq \alpha_0$ (величина α_0 будет определена позже). Предполагается, что нелинейная функция $f(u)$ принадлежит классу C^1 и удовлетворяет следующим условиям:

$$F(v)v \geq -mv^2 - C_m, \quad F(v) = \int_0^v f(w) dw, \quad (2.2)$$

$$f(v)v - \gamma_1 F(v) + mv^2 \geq -C_m \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Здесь число m достаточно мало и $\gamma_1 > 0$. Кроме того, предполагается выполненным неравенство

$$|f'(v)| \leq K(1 + |v|^\rho), \quad 0 \leq \rho < \frac{2}{n-2} \text{ при } n \geq 3, \quad \rho \geq 0 \text{ любое при } n = 1, 2. \quad (2.4)$$

Условия (2.2)–(2.4) являются стандартными для диссипативных квазилинейных волновых уравнений вида (2.1) (см., например, [10]–[17]). В качестве характерных примеров нелинейных функций $f(u)$, при которых уравнение (2.1) имеет конкретный физический смысл, можно привести функции $f(u) = u|u|^\rho$ и $f(u) = K \sin u$ (диссипативное уравнение сайн-Гордона; см. [11]).

Функция $g_0(x, t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(x, t/\varepsilon)$ называется *внешней силой*. Предполагается, что функции $g_0(t) := g_0(x, t)$ и $g_1(z) := g_1(x, z)$ являются *трансляционно компактными* в пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$, где $H = L_2(\Omega)$; по определению это означает, что при любом фиксированном $M > 0$ множества функций $\{g_0(t+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ и $\{g_1(z+h) \mid h \in \mathbb{R}\}$ являются предкомпактными в пространстве $L_2(-M, M; H)$ (см. [14]). Здесь и далее, через t обозначается “медленная” переменная времени, а через z – “быстрая”.

В частности, из условия трансляционной компактности вытекают неравенства

$$\begin{aligned}\|g_0\|_{L_2^b}^2 &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |g_0(s)|^2 ds \leq C_0^2, \\ \|g_1\|_{L_2^b}^2 &= \sup_{z \in \mathbb{R}} \int_z^{z+1} |g_1(\zeta)|^2 d\zeta \leq C_1^2.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$. Норму в пространстве $H_0^1(\Omega)$ мы для краткости будем обозначать $\|\cdot\|_1$.

Из неравенства (2.5) следует, что

$$\left\|g_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2^b}^2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \left|g_1\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right|^2 ds \leq C_2^2 := 2C_1^2 \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (2.6)$$

и, тем самым,

$$\left\|g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2^b} \leq \|g_0(\cdot)\|_{L_2^b} + \varepsilon^{-\alpha} \left\|g_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2^b} \leq C_0 + C_2 \varepsilon^{-\alpha}. \quad (2.7)$$

Заметим, что норма внешней силы $g^\varepsilon(t) := g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(t/\varepsilon)$ из уравнения (2.1) может неограниченно расти при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Для уравнения (2.1) рассматривается задача Коши

$$u|_{t=\tau} = u_\tau(x), \quad \partial_t u|_{t=\tau} = p_\tau(x), \quad (2.8)$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, $u_\tau(x) \in H_0^1(\Omega)$ и $p_\tau(x) \in L_2(\Omega)$. В [14] доказано (см., также исследования автономных гиперболических уравнений вида (2.1) в [10]–[13], [15]), что при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и для любой пары начальных данных $(u_\tau, p_\tau) \in H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ задача Коши (2.1), (2.8) имеет, и притом единственное решение $u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H_0^1(\Omega))$, $\partial_t u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; L_2(\Omega))$, причем $\partial_t^2 u \in C_b(\mathbb{R}_\tau; H^{-1}(\Omega))$, где обозначено $\mathbb{R}_\tau = [\tau, +\infty)$.

Рассмотрим функции $y_\tau(x) = (u_\tau(x), p_\tau(x))$ и $y(x, t) = (u(x, t), \partial_t u(x, t))$, $x \in \Omega$, $t \geq \tau$, где $u(x, t)$ – решение задачи (2.1), (2.8).

Рассмотрим также энергетическое пространство $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|y\|_E = \{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|p\|_{L_2(\Omega)}^2\}^{1/2} := \{\|u\|_1^2 + |p|^2\}^{1/2}.$$

Тогда, очевидно, $y(\cdot, t) \in C_b(\mathbb{R}_\tau; E)$ и $y(x, \tau) = y_\tau(x)$.

В [14] доказана следующая основная априорная оценка для решения

$$y(t) := y(x, t) = (u(x, t), \partial_t u(x, t))$$

задачи (2.1), (2.8):

$$\|y(t)\|_E^2 \leq C_3 \|y_\tau\|_E^{\rho+2} e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4 \left(1 + \left\|g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha} g_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{L_2^b}^2\right) \quad \forall t \geq \tau, \quad (2.9)$$

где $\beta > 0$, константы β, C_3, C_4 не зависят от g_0 и g_1 , а также от y_τ и $y(t)$.

Поскольку задача (2.1), (2.8) имеет единственное решение при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и при всех $y_\tau \in E$, диссипативное волновое уравнение (2.1) порождает процесс $\{U_{g^\varepsilon}(t, \tau)\} := \{U_{g^\varepsilon}(t, \tau) \mid t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$, действующий в E по формуле

$$U_{g^\varepsilon}(t, \tau)y_\tau = y(t), \quad t \geq \tau, \quad (2.10)$$

где $y(t)$ – решение задачи (2.1), (2.8) с внешней силой $g^\varepsilon(t) := g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$ и с начальными условиями $y_\tau \in E$. Отметим, что каждое (нелинейное) отображение $U_{g^\varepsilon}(t, \tau): E \rightarrow E$ сильно непрерывно в норме E (см., например, [14]).

Из оценки (2.9) следует, что процесс $\{U_{g^\varepsilon}(t, \tau)\}$ имеет ограниченное (в E) равномерно (по $\tau \in \mathbb{R}$) поглощающее множество $B^\varepsilon \subset E$, а именно:

$$B^\varepsilon = \{y \in E \mid \|y\|_E^2 \leq 2C_4(1 + \|g^\varepsilon\|_{L_2^b}^2)\}, \quad (2.11)$$

где $g^\varepsilon := g^\varepsilon(t) = g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$. Из (2.7) получаем, что

$$\|B^\varepsilon\|_E \leq C_5 + \frac{C_6}{\varepsilon^\alpha}, \quad C_5 = \sqrt{2C_4}(1 + C_0), \quad C_6 = \sqrt{2C_4}C_2, \quad (2.12)$$

где константы C_5 и C_6 не зависят от ε . Значит, норма в E поглощающего множества B^ε процесса $\{U_{g^\varepsilon}(t, \tau)\}$ может неограниченно возрастать при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Раз функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ являются трансляционно компактными в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$, то функция $g^\varepsilon(t) := g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$ также трансляционно компактна в этом пространстве при любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq 1$. Обозначим через $\mathcal{H}(g_0)$, $\mathcal{H}(g_1)$ и $\mathcal{H}(g^\varepsilon)$ оболочки соответственно функций $g_0(t)$, $g_1(z)$ и $g^\varepsilon(t)$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Напомним, например, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(g_0) &= \{\widehat{g}_0(t) \mid \exists \{h_n\}, h_n \in \mathbb{R}, \text{ такая, что} \\ &g_0(t + h_n) \rightarrow \widehat{g}_0(t), n \rightarrow \infty, \text{ сильно в } L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Аналогично определяются оболочки $\mathcal{H}(g_1)$ и $\mathcal{H}(g^\varepsilon) = \mathcal{H}(g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(\cdot/\varepsilon))$ при каждом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq 1$. В дальнейшем символ $\widehat{g}^\varepsilon$ будет обозначать функцию из $\mathcal{H}(g^\varepsilon)$. Легко видеть, что любую такую функцию можно записать в виде суммы

$$\widehat{g}^\varepsilon(t) = \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $\widehat{g}_0(t) \in \mathcal{H}(g_0)$ и $\widehat{g}_1(z) \in \mathcal{H}(g_1)$. Отметим, что

$$\|\widehat{g}^\varepsilon(\cdot)\|_{L_2^b} = \left\| \widehat{g}_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L_2^b} \leq \|\widehat{g}_0(\cdot)\|_{L_2^b} + \varepsilon^{-\alpha}\left\| \widehat{g}_1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L_2^b} \leq C_0 + C_2\varepsilon^{-\alpha}, \quad (2.14)$$

где константы C_0 и C_2 те же самые, что и в оценках (2.5), (2.7).

Теперь при каждом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, мы рассмотрим семейство уравнений

$$\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon + \gamma \partial_t \widehat{u}^\varepsilon = \Delta \widehat{u}^\varepsilon - f(\widehat{u}^\varepsilon) + \widehat{g}^\varepsilon(t), \quad \widehat{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.15)$$

где $\widehat{g}^\varepsilon(t) = \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}\widehat{g}_1(t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, $g^\varepsilon = g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha}g_1(t/\varepsilon)$, а $g_0(t)$, $g_1(z)$ – исходные функции из уравнения (2.1). Очевидно, что семейство уравнений (2.15) порождает

семейство процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, действующих в E по формуле, аналогичной (2.10). Кроме того, соответствующие решения

$$\hat{y}^\varepsilon(t) = U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\hat{y}_\tau = (\hat{u}^\varepsilon(\cdot, t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(\cdot, t)), \quad t \geq \tau,$$

удовлетворяют неравенству

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|_E^2 \leq C_3 \|\hat{y}_\tau\|_E^{\rho+2} e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4(1 + (C_0 + C_2\varepsilon^{-\alpha})^2) \quad \forall t \geq \tau, \quad (2.16)$$

из которого заключаем, что множество B^ε (см. (2.11)) является общим равномерно поглощающим множеством семейства процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$.

Напомним, что семейство процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, называется *равномерно асимптотически компактным* в E , если найдется компактное множество $P^\varepsilon \subseteq E$, которое притягивает любое ограниченное множество B ($\|B\|_E \leq M$) начальных данных:

$$\text{dist}_E(U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)B, P^\varepsilon) \rightarrow 0, \quad t - \tau \rightarrow +\infty, \quad (2.17)$$

равномерно по $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$. Здесь число ε фиксировано и $0 < \varepsilon \leq 1$.

Нам понадобится еще одно определение, связанное с семейством процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$. Это семейство называется $(E \times \mathcal{H}(g^\varepsilon), E)$ -*непрерывным*, если для любой фиксированной пары (t, τ) , где $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, отображение $(\hat{y}_\tau, \hat{g}^\varepsilon) \rightarrow U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\hat{y}_\tau$ непрерывно из $E \times \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ в E , т.е. $U_{\hat{g}_n^\varepsilon}(t, \tau)\hat{y}_{\tau n} \rightarrow U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\hat{y}_\tau$ в E при $\hat{y}_{\tau n} \rightarrow \hat{y}_\tau$ в E и при $\hat{g}_n^\varepsilon \rightarrow \hat{g}^\varepsilon$ в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$.

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. При любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, семейство процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, соответствующее уравнениям (2.15) является равномерно (по $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$) асимптотически компактным и $(E \times \mathcal{H}(g^\varepsilon), E)$ -непрерывным.

Доказательство этого утверждения приведено в [14, гл. 4, п. 4] (см. также [16], [11], [13]).

Напомним определение равномерного глобального аттрактора семейства процессов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Замкнутое множество $\mathcal{A}^\varepsilon \subset E$ называется *равномерным глобальным аттрактором* семейства процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, если множество $\mathcal{A}^\varepsilon$ притягивает любое ограниченное множество B начальных данных

$$\text{dist}_E(U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)B, \mathcal{A}^\varepsilon) \rightarrow 0, \quad t - \tau \rightarrow +\infty,$$

равномерно по $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$ и $\mathcal{A}^\varepsilon$ — минимальное равномерно притягивающее множество, т.е. $\mathcal{A}^\varepsilon$ принадлежит любому замкнутому множеству P^ε , удовлетворяющему (2.17).

Утверждение 2.1 используется при доказательстве теоремы о существовании компактного в E , равномерного глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, отвечающего уравнениям (2.15) (см. [14]). Кроме того, в силу (2.12) из вложения $\mathcal{A}^\varepsilon \subseteq B^\varepsilon$ получаем оценку

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C_5 + \frac{C_6}{\varepsilon^\alpha}. \quad (2.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Можно построить примеры внешних сил $g^\varepsilon(t) := g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(t/\varepsilon)$ в уравнении (2.1), которые являются трансляционно компактными функциями в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$, причем соответствующие равномерные глобальные аттракторы $\mathcal{A}^\varepsilon$ удовлетворяют неравенству

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \geq c_5 + \frac{c_6}{\varepsilon^\alpha},$$

т.е. нормы аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ в E могут неограниченно расти при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Для процесса $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, имеющего внешнюю силу $\hat{g}^\varepsilon(t) := \hat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1(t/\varepsilon)$, обозначим через $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ ядро соответствующего уравнения (2.15). Напомним, что ядро $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ состоит из всех решений $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(\cdot, t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(\cdot, t))$ этого уравнения, которые определены на всей оси времени $\{t \in \mathbb{R}\}$ (такие решения мы будем называть *полными траекториями*) и являются ограниченными в E . Формально, это условие можно записать в виде

$$U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau) \hat{y}^\varepsilon(\tau) = \hat{y}^\varepsilon(t) \quad \forall t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

причем $\hat{y}^\varepsilon(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}; E)$ для любого $\hat{y}^\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$. Множество

$$\mathcal{K}(t) = \{\hat{y}^\varepsilon(t) \mid \hat{y}^\varepsilon \in \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

называется *сечением ядра* в момент времени t .

В [14] доказано, что равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ семейства процессов $\{U_{\hat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, отвечающего (2.15), можно представить в виде

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcup_{\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)} \mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(0), \quad (2.19)$$

где $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}(0)$ – сечение ядра в момент $t = 0$. Отметим, что ядро $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ не пусто при любой $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$.

Вместе с уравнением (2.1) рассматривается “предельное” (или “усредненное”) волновое уравнение

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + g_0(x, t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.20)$$

где $\gamma, f(u)$ и $g_0(x, t)$ те же, что и в (2.1). Рассматривается также семейство “предельных” волновых уравнений

$$\partial_t^2 \hat{u}^0 + \gamma \partial_t \hat{u}^0 = \Delta \hat{u}^0 - f(\hat{u}^0) + \hat{g}^0(t), \quad \hat{u}^0|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.21)$$

где $\hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g^0)$, $g^0(t) := g_0(t)$. Семейство уравнений (2.21) порождает “предельное” семейство процессов $\{U_{\hat{g}^0}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g^0)$, действующих в E , и соответствующие решения

$$\hat{y}^0(t) = U_{\hat{g}^0}(t, \tau) \hat{y}_\tau = (\hat{u}^0(\cdot, t), \partial_t \hat{u}^0(\cdot, t)), \quad t \geq \tau,$$

удовлетворяют неравенству

$$\|\hat{y}^0(t)\|_E^2 \leq C_3 \|\hat{y}_\tau\|_E^{\rho+2} e^{-2\beta(t-\tau)} + C_4(1 + C_0^2) \quad \forall t \geq \tau. \quad (2.22)$$

Шар

$$B^0 = \{y \in E \mid \|y\|_E^2 \leq 2C_4(1 + \|g^0\|_{L_2^b}^2)\}$$

(см. (2.11)) служит равномерно поглощающим множеством семейства процессов $\{U_{\hat{g}^0}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g^0)$. Утверждение 2.1 выполнено при $\varepsilon = 0$ для семейства процессов $\{U_{\hat{g}^0}(t, \tau)\}$, $\hat{g}^0 \in \mathcal{H}(g^0)$, и это семейство имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0 \subseteq E$,

$$\|\mathcal{A}^0\|_E \leq C_5. \quad (2.23)$$

Формула (2.19) справедлива и при $\varepsilon = 0$ (см. [14], где перечисленные выше свойства подробно доказаны).

В следующих пунктах будет изучаться связь между равномерными аттракторами $\mathcal{A}^\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и при выполнении некоторых дополнительных условий. В настоящий момент мы даже не можем гарантировать равномерную ограниченность множеств $\mathcal{A}^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ (см. замечание 2.1).

3. Оценка отклонения траекторий исходного и “предельного” уравнений. Рассматривается диссипативное волновое уравнение (2.15) с фиксированной внешней силой $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, $\hat{g}^\varepsilon(t) = \hat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1(t/\varepsilon)$, где $\hat{g}_0(t) \in \mathcal{H}(g_0)$ и $\hat{g}_1(z) \in \mathcal{H}(g_1)$, а функции $g_0(t)$, $g_1(z)$ взяты из исходного уравнения (2.1). В этом пункте мы сравним решение этого уравнения с решением соответствующего “предельного” волнового уравнения (2.21) с внешней силой $\hat{g}^0(t) := \hat{g}_0(t)$ при одинаковых начальных условиях, принадлежащих поглощающему множеству B^ε (см. (2.11)).

Мы будем предполагать, что функция $f(u)$ удовлетворяет неравенству (2.4) с показателем $\rho = 0$, т.е.

$$|f'(v)| \leq K \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Тогда, в частности,

$$|f(v)| \leq K|v| + C'_0 \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad C'_0 = |f(0)|. \quad (3.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Излагаемые далее результаты применимы, например, к неавтономному диссипативному уравнению сайн-Гордона, в котором нелинейная функция $f(u) = K \sin u$.

Рассмотрим решение $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t))$, $t \geq \tau$, уравнения (2.15), у которого начальное условие $\hat{y}^\varepsilon(\tau) = (\hat{u}^\varepsilon(\tau), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(\tau)) = (\hat{u}_\tau, \hat{p}_\tau) = \hat{y}_\tau$ принадлежит шару B^ε . Тогда (см. (2.12))

$$\|\hat{y}^\varepsilon(\tau)\|_E = \|\hat{y}_\tau\|_E = \|(\hat{u}_\tau, \hat{p}_\tau)\|_E \leq C_5 + \frac{C_6}{\varepsilon^\alpha}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим также решение $\hat{y}^0(t) = (\hat{u}^0(t), \partial_t \hat{u}^0(t))$, $t \geq \tau$, соответствующего “предельного” уравнения (2.21) с внешней силой $\hat{g}^0(t)$ и с теми же начальными условиями при $t = \tau$, что и у решения $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t))$ исходного уравнения:

$$\hat{u}^0|_{t=\tau} = \hat{u}_\tau(x), \quad \partial_t \hat{u}^0|_{t=\tau} = \hat{p}_\tau(x). \quad (3.4)$$

Разность этих решений $(w(t), \partial_t w(t)) = (\hat{u}^\varepsilon(t) - \hat{u}^0(t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t) - \partial_t \hat{u}^0(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 w + \gamma \partial_t w = \Delta w - (f(\hat{u}^\varepsilon) - f(\hat{u}^0)) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (3.5)$$

и начальным условиям

$$w|_{t=\tau} = 0, \quad \partial_t w|_{t=\tau} = 0. \quad (3.6)$$

Умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ уравнение (3.5) на $\partial_t w$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\partial_t w|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_1^2 + \gamma |\partial_t w|^2 + \langle f(\hat{u}^\varepsilon) - f(\hat{u}^0), \partial_t w \rangle = \left\langle \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \partial_t w \right\rangle. \quad (3.7)$$

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Предположим, что функции $\hat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ обладают первообразными $\hat{G}_1(x, z)$ по z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{G}_1(x, z) = \hat{g}_1(x, z) \quad (3.8)$$

такими, что

$$\|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_1 = \|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_{H_0^1} \leq \Gamma_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

где Γ_1 не зависит от $\hat{g}_1$. Отсюда, очевидно, следует, что

$$|\hat{G}_1(\cdot, z)| = \|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_{L_2} \leq \Gamma_0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Заметим, что в (3.7)

$$\varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^{1-\alpha} \partial_t \hat{G}_1 \left(\frac{t}{\varepsilon} \right).$$

Интегрируя уравнение (3.7) по времени от τ до $\tau + t$ и используя нулевые условия (3.6), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ |\partial_t w(\tau + t)|^2 + \|w(\tau + t)\|_1^2 \} + \gamma \int_0^t |\partial_t w(\tau_1)|^2 d\tau_1 \\ &= - \int_0^t \left\langle \left(\int_0^1 f'(\hat{u}^0(\tau + \tau_1) + s \cdot w(\tau + \tau_1)) ds \right) w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \\ & \quad + \varepsilon^{1-\alpha} \int_0^t \left\langle \partial_t \hat{G}_1 \left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon} \right), \partial_t w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \\ &= - \int_0^t \left\langle \left(\int_0^1 f'(\tilde{u}(\tau + \tau_1, s)) ds \right) w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \\ & \quad + \varepsilon^{1-\alpha} \left\langle \hat{G}_1 \left(\frac{\tau + t}{\varepsilon} \right), \partial_t w(\tau + t) \right\rangle - \varepsilon^{1-\alpha} \int_0^t \left\langle \hat{G}_1 \left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon} \right), \partial_t^2 w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \\ &:= I + II + III. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В последнем равенстве применялось интегрирование по частям. (Для краткости обозначено $\tilde{u}(t, s) := \hat{u}^0(t) + s \cdot w(t) = \hat{u}^0(t) + s(\hat{u}^\varepsilon(t) - \hat{u}^0(t))$). Оценим слагаемые I , II и III каждое по-отдельности. Имеем в силу (3.1)

$$\begin{aligned} |I| &= \left| \int_0^t \left\langle \left(\int_0^1 f'(\tilde{u}(\tau + \tau_1, s)) ds \right) w(\tau + \tau_1), \partial_t w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \right| \\ &\leq K \int_0^t |w(\tau + \tau_1)| \times |\partial_t w(\tau + \tau_1)| d\tau_1 \\ &\leq K \int_0^t \lambda_1^{-1/2} \|w(\tau + \tau_1)\|_1 \times |\partial_t w(\tau + \tau_1)| d\tau_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{K}{\lambda_1^{1/2}} \int_0^t (\|w(\tau + \tau_1)\|_1^2 + |\partial_t w(\tau + \tau_1)|^2) d\tau_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь мы воспользовались неравенством Пуанкаре: $|w| \leq \lambda_1^{-1/2} \|w\|_1$, где λ_1 — первое собственное значение оператора Лапласа при нулевых граничных условиях. При оценивании интеграла *III* воспользуемся условием (3.9):

$$\begin{aligned} |III| &= \varepsilon^{1-\alpha} \left| \int_0^t \left\langle \widehat{G}_1 \left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon} \right), \partial_t^2 w(\tau + \tau_1) \right\rangle d\tau_1 \right| \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \int_0^t \left\| \widehat{G}_1 \left(\frac{\tau + \tau_1}{\varepsilon} \right) \right\|_1 \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1 \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 \int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оценим теперь интеграл в правой части неравенства (3.13). Имеем

$$\|\partial_t^2 w(\tau + t)\|_{-1} \leq \|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(\tau + t)\|_{-1} + \|\partial_t^2 \widehat{u}^0(\tau + t)\|_{-1}. \quad (3.14)$$

При $0 < \varepsilon \leq 1$ из уравнения (2.15), а при $\varepsilon = 0$ из уравнения (2.21) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(t)\|_{-1} &\leq C_7 (\|\widehat{u}^\varepsilon(t)\|_1 + \|f(\widehat{u}^\varepsilon(t))\|_{-1} + \|\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)\|_{-1} + \|\widehat{g}^\varepsilon(t)\|_{-1}) \\ &\leq C_8 (\|\widehat{u}^\varepsilon(t)\|_1 + |f(\widehat{u}^\varepsilon(t))| + |\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)| + |\widehat{g}^\varepsilon(t)|). \end{aligned} \quad (3.15)$$

(Напомним, что $|\cdot|$ обозначает норму в $L_2(\Omega)$.) Из (3.2) находим, что

$$|f(\widehat{u}^\varepsilon(\tau + t))| \leq C_9 (|\widehat{u}^\varepsilon(\tau + t)| + 1), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (3.16)$$

Значит, из (3.15) и (3.16) следует неравенство

$$\|\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon(\tau + t)\|_{-1} \leq C_{10} (\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E + |\widehat{g}^\varepsilon(\tau + t)|) \quad \forall t \geq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (3.17)$$

Применим оценки (2.16) и (2.22) (напомним, что в нашем случае $\rho = 0$):

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E \leq C_{11} \|\widehat{y}_\tau\|_E e^{-\beta t} + C_{12} (1 + \varepsilon^{-\alpha}), \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (3.18)$$

$$\|\widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leq C_{11} \|\widehat{y}_\tau\|_E e^{-\beta t} + C_{12} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.19)$$

Воспользуемся условием (3.3), подставим оценки (3.18) и (3.19) в (3.17), а затем в (3.14), и получим, что

$$\int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1 \leq C_{13} (1 + \varepsilon^{-\alpha}) \int_0^t (1 + e^{-\beta \tau_1}) d\tau_1 \leq C_{14} (1 + \varepsilon^{-\alpha}) (1 + t). \quad (3.20)$$

Из (3.20) и (3.13) находим, что

$$\begin{aligned} |III| &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 \int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1 \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 C_{14} (1 + \varepsilon^{-\alpha}) (1 + t) \leq C_{15} \varepsilon^{1-2\alpha} (1 + t), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $C_{15} = 2\Gamma_1 C_{14}$ (напомним, что $0 < \varepsilon \leq 1$).

Для слагаемого II в (3.11), воспользовавшись неравенствами (2.16), (2.22) и (3.10), получаем оценку

$$\begin{aligned} |II| &= \varepsilon^{1-\alpha} \left| \left\langle \widehat{G}_1 \left(\frac{\tau+t}{\varepsilon} \right), \partial_t w(\tau+t) \right\rangle \right| \leq \varepsilon^{1-\alpha} \left| \widehat{G}_1 \left(\frac{\tau+t}{\varepsilon} \right) \right| \times |\partial_t w| \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 \times |\partial_t w(\tau+t)| \leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 (|\partial_t \widehat{u}^\varepsilon(\tau+t)| + |\partial_t \widehat{u}^0(\tau+t)|) \\ &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 (\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau+t)\|_E + \|\widehat{y}^0(\tau+t)\|_E) \leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 C_{16} (1 + \varepsilon^{-\alpha}) \leq C_{17} \varepsilon^{1-2\alpha}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Обозначим $z(t) := |\partial_t w(\tau+t)|^2 + \|w(\tau+t)\|_1^2$. Из (3.11)–(3.13) и из (3.21), (3.22) получаем

$$z(t) \leq 2(I + II + III) \leq K_1 \int_0^t z(\tau) d\tau + C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha} (1+t), \quad (3.23)$$

где $K_1 = K\lambda_1^{-1/2}$. Обозначим $v(t) = z(t)/(1+t)$. Тогда

$$\begin{aligned} v(t) &\leq K_1 \int_0^t \frac{z(\tau)}{1+t} d\tau + C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha} \\ &\leq K_1 \int_0^t \frac{z(\tau)}{1+\tau} d\tau + C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha} = K_1 \int_0^t v(\tau) d\tau + C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha}. \end{aligned}$$

Из леммы Гроуолла получаем, что

$$v(t) \leq C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha} e^{K_1 t}$$

и, следовательно,

$$|\partial_t w(\tau+t)|^2 + \|w(\tau+t)\|_1^2 = z(t) = v(t)(1+t) \leq C_{18} \varepsilon^{1-2\alpha} e^{K_1 t} (1+t) \leq D_0^2 \varepsilon^{1-2\alpha} e^{2rt}, \quad (3.24)$$

где $D_0^2 := C_{18}$, $2r := K_1 + 1 = K\lambda_1^{-1/2} + 1$.

Напомним, что

$$|\partial_t w(t+\tau)|^2 + \|w(t+\tau)\|_1^2 = \|\widehat{y}^\varepsilon(t+\tau) - \widehat{y}^0(t+\tau)\|_E^2$$

при $t \geq 0$, причем $\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}_\tau \in B^\varepsilon$.

Доказана следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть в уравнении (2.1) функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (2.2)–(2.4) при $\rho = 0$ (см. (3.1)). Кроме того, пусть функции $g_0(x, t)$ и $g_1(x, z)$ являются трансляционно компактными в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$ соответственно по $t \in \mathbb{R}$ и по $z \in \mathbb{R}$. Предполагается, что любая функция $\widehat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ имеет первообразную $\widehat{G}_1(x, z)$ по z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \widehat{G}_1(x, z) = \widehat{g}_1(x, z),$$

причем $\widehat{G}_1 \in C_b(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$ и выполнено неравенство

$$\|\widehat{G}_1(\cdot, z)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \Gamma_1 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

где Γ_1 не зависит от $\widehat{g}_1$.

Тогда для отклонения

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)) - (\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$$

решения $(\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$ уравнения (2.15) от решения $(\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$ “предельного” уравнения (2.21), которые удовлетворяют одинаковым начальным условиям $\widehat{y}^\varepsilon(\tau) = \widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}_\tau \in B^\varepsilon$ (шар B^ε определен в (2.11)), справедливо неравенство

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t) - \widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leq D_0 \varepsilon^{1/2 - \alpha} e^{rt} \quad \forall t \geq 0, \quad (3.25)$$

где $r = (K\lambda_1^{-1/2} + 1)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Доказанная оценка (3.25) для отклонения решений исходного и “предельного” (“усредненного”) уравнений друг от друга при одинаковых начальных условиях аналогична известным глобальным оценкам Боголюбова (см. [18]). В следующих пунктах предполагается, что $\alpha < 1/2$, но еще накладываются некоторые дополнительные ограничения на этот показатель (см. (4.1)).

Приведем теперь некоторые примеры функций $g_1(x, z)$, для которых любые функции $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ удовлетворяют условиям (3.8) и (3.9).

Будем рассматривать квазипериодические функции. Функция $g_1(x, z)$ называется *квазипериодической* по z , если она представима в виде

$$g_1(x, z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z), \quad \overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l, \quad (3.26)$$

где $\Phi(x, \overline{\omega}) \in C(\mathbb{R}^l; H_0^1(\Omega))$ и функция $\Phi(x, \overline{\omega}) = \Phi(x, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l)$ является 2π -периодической по каждому аргументу $\omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, l$ (см. [19]). Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ называются *частотами* квазипериодической функции.

а) Пусть функция $g_1(x, z)$ представима в виде (3.26), причем функция $\Phi(x, \overline{\omega})$ является тригонометрическим полиномом по $\overline{\omega}$ с нулевым средним:

$$\Phi(x, \overline{\omega}) = \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{\omega}, \bar{k})}, \quad x \in \Omega, \quad \overline{\omega} \in \mathbb{R}^l, \quad (3.27)$$

где $a_{\bar{k}}(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$, $a_{\bar{k}}(\cdot) = a_{-\bar{k}}(\cdot)$ при всех мультииндексах $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_l) \in \mathbb{Z}^l \setminus \{0\}$. В формуле (3.27)

$$|\bar{k}| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_l|, \quad (\overline{\omega}, \bar{k}) = \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \dots + \omega_l k_l.$$

Условие нулевого среднего означает, что коэффициент $a_{\overline{0}}(x) \equiv 0$.

Тогда функция $g_1(x, z)$ имеет вид

$$g_1(x, z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z) = \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{\alpha}, \bar{k})z}, \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Заметим, что любая функция $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ представима в виде

$$\widehat{g}_1(x, z) = \Phi(x, \overline{\alpha}z + \overline{h}) = \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\overline{h}, \bar{k})} e^{i(\overline{\alpha}, \bar{k})z}, \quad \overline{h} \in \mathbb{T}^l = (\mathbb{R} \bmod 2\pi)^l,$$

где элемент $\bar{h} \in \mathbb{T}^l$ зависит от $\hat{g}_1$.

Предполагается, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ являются рационально независимыми. В этом случае имеет место неравенство

$$|(\bar{\alpha}, \bar{k})| \geq \rho > 0 \quad \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus \{\bar{0}\}, \quad |\bar{k}| \leq N, \quad (3.29)$$

для некоторого $\rho = \rho(\bar{\alpha}, N)$ и, следовательно, функция

$$\hat{G}_1(x, z) = \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} \frac{a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{h}, \bar{k})}}{i(\bar{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z} \quad (3.30)$$

задана корректно и является первообразной по z для $\hat{g}_1(x, z)$: $\partial_z \hat{G}_1(x, z) = \hat{g}_1(x, z)$. Условие (3.9) также выполнено в силу (3.29), так как

$$\|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_1 \leq \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} \frac{\|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1}{|(\bar{\alpha}, \bar{k})|} \leq \frac{1}{\rho} \sum_{0 < |\bar{k}| \leq N} \|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1 = M_1. \quad (3.31)$$

б) Рассмотрим случай (3.26) общей квазипериодической зависимости по z функции $g_1(x, z)$. Для простоты предположим, что $\Phi(x, \bar{\omega}) \in C^m(\mathbb{T}^l; H_0^1(\Omega))$. Будем также предполагать, что функция $\Phi(x, \bar{\omega})$ имеет нулевое среднее по $\bar{\omega}$:

$$\int_{\mathbb{T}^l} \Phi(x, \bar{\omega}) \mu(d\bar{\omega}) = 0, \quad (3.32)$$

где $\mu(d\bar{\omega})$ – мера Лебега на торе $\mathbb{T}^l$.

Предположим, что компоненты вектора $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ являются рационально независимыми числами и удовлетворяют следующему диофантову условию:

$$|(\bar{\alpha}, \bar{k})| \geq C_{\bar{\alpha}} |\bar{k}|^{-(l-1+\delta)} > 0 \quad \forall \bar{k} \in \mathbb{Z}^l \setminus \{\bar{0}\}, \quad \delta > 0. \quad (3.33)$$

Как известно неравенство (3.33) имеет место, если вектор $\bar{\alpha}$ принадлежит некоторому множеству $\mathcal{S}^l = \mathbb{R}^l / \mathcal{Q}^l$, где множество $\mathcal{Q}^l$ имеет в $\mathbb{R}^l$ нулевую меру Лебега: $\mu(\mathcal{Q}^l) = 0$ (см. [20], [21]).

Пусть $\bar{\alpha} \in \mathcal{S}^l$. Разложим функцию $\Phi(x, \bar{\omega})$ в ряд Фурье по переменным $\bar{\omega}$ и положим $\bar{\omega} = \bar{\alpha}z$, где $z \in \mathbb{R}$. Мы получим

$$g_1(x, z) = \Phi(x, \bar{\alpha}z) = \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}. \quad (3.34)$$

(Отметим, что в силу (3.32) $a_{\bar{0}}(x) = 0$.) Рассмотрим функцию

$$G_1(x, z) = \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \frac{a_{\bar{k}}(x)}{i(\bar{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}. \quad (3.35)$$

Если выполнено неравенство

$$\sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1 |\bar{k}|^{l-1+\delta} < +\infty, \quad (3.36)$$

то в силу условия (3.33), очевидно,

$$\|G_1(\cdot, z)\|_1 \leq \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \frac{\|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1}{|(\bar{\alpha}, \bar{k})|} \leq \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1 |\bar{k}|^{l-1+\delta} = M_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

а функция $G_1(x, z)$ является первообразной по z для функции $g_1(x, z)$.

Осталось заметить, что любая функция $\hat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ имеет вид

$$\hat{g}_1(x, z) = \Phi(x, \bar{\alpha}z + \bar{h}) = \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{h}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}, \quad \bar{h} \in \mathbb{T}^l,$$

а ее первообразная по z

$$\hat{G}_1(x, z) = \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \frac{a_{\bar{k}}(x) e^{i(\bar{h}, \bar{k})}}{i(\bar{\alpha}, \bar{k})} e^{i(\bar{\alpha}, \bar{k})z}$$

в силу (3.33) и (3.36) удовлетворяет (как и G_1) неравенству

$$\|\hat{G}_1(\cdot, z)\|_1 \leq \sum_{\bar{k} \neq \bar{0}} \frac{\|a_{\bar{k}}(\cdot)\|_1}{|(\bar{\alpha}, \bar{k})|} \leq M_1 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Условие (3.37) выполнено, если известно, что функция $\Phi(x, \bar{\omega})$ имеет достаточно большое число m производных по переменной $\bar{\omega}$.

4. О равномерной ограниченности глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$. Как уже отмечалось в замечании 2.1, условия, сформулированные в п. 2, не гарантируют равномерную ограниченность (по ε) глобальных аттракторов $\mathcal{A}^\varepsilon$ уравнений (2.15). В этом пункте будут указаны условия, при которых свойство равномерной ограниченности имеет место. Как и в п. 3, предполагается, что в оценке (2.4) $\rho = 0$, т.е. выполнено неравенство (3.1), а, кроме того, предполагается, что каждая функция $\hat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ имеет первообразную $\hat{G}_1(x, z)$ по z , которая удовлетворяет неравенству (3.9).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *При выполнении перечисленных выше условий, если число α удовлетворяет неравенству*

$$\alpha \leq \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)}, \quad (4.1)$$

то найдется число $C > 0$ такое, что

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C \quad \forall \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (4.2)$$

В неравенстве (4.1) число r такое же, как в неравенстве (3.25), а показатель β такой же, как в основных априорных оценках (2.9) и (2.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $y^\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon$ — любая точка глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$. В силу (2.19) найдется полная траектория $\hat{y}^\varepsilon(t)$ процесса $\{U_{\hat{g}_1}(t, \tau)\}$ с некоторой внешней силой $\hat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, для которой $\hat{y}^\varepsilon(0) = y^\varepsilon$. Функция $\hat{g}^\varepsilon$ представима в виде $\hat{g}^\varepsilon(t) = \hat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1(t/\varepsilon)$, где $\hat{g}_0(t) \in \mathcal{H}(g_0)$ и $\hat{g}_1(z) \in \mathcal{H}(g_1)$. Заметим, что

$$\|\hat{y}^\varepsilon(t)\|_E \leq \|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq \frac{C'}{\varepsilon^\alpha} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

где $C' = C_5 + C_6$, $0 < \varepsilon \leq 1$ (см. (2.18)).

Зафиксируем некоторое число $T > 0$, которое будет выбрано позднее (см. (4.10)). Рассмотрим точку $\hat{y}^\varepsilon(-T)$. Построим решение $\hat{y}^0(t)$, $t \geq -T$, “предельного” уравнения (2.21) с внешней силой $\hat{g}_0(t)$ и начальным условием

$$\hat{y}^0|_{t=-T} = \hat{y}^\varepsilon(-T). \quad (4.4)$$

В силу (4.3) имеем, что

$$\|\hat{y}^0(-T)\|_E \leq \frac{C'}{\varepsilon^\alpha}. \quad (4.5)$$

Тогда из основной априорной оценки (2.22) получаем неравенство

$$\|\hat{y}^0(-T+t)\|_E \leq C'_3 \|\hat{y}^\varepsilon\|_E e^{-\beta t} + C'_4 \leq \frac{C'_3 C'}{\varepsilon^\alpha} e^{-\beta t} + C'_4 = \frac{C'_5}{\varepsilon^\alpha} e^{-\beta t} + C'_4 \quad \forall t \geq 0. \quad (4.6)$$

Из теоремы 3.1 (в которой следует положить $\tau = -T$, см. (4.4)) получаем следующую оценку для разности $\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - \hat{y}^0(-T+t)$:

$$\|\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - \hat{y}^0(-T+t)\|_E \leq D_0 \varepsilon^{1/2-\alpha} e^{rt} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) находим, что

$$\begin{aligned} \|\hat{y}^\varepsilon(-T+t)\|_E &\leq \|\hat{y}^\varepsilon(-T+t) - \hat{y}^0(-T+t)\|_E + \|\hat{y}^0(-T+t)\|_E \\ &\leq D_0 \varepsilon^{1/2-\alpha} e^{rt} + C'_5 \varepsilon^{-\alpha} e^{-\beta t} + C'_4 \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставим в (4.8) $t = T$ и получим, что

$$\|y^\varepsilon\|_E = \|\hat{y}^\varepsilon(0)\|_E \leq D_0 \varepsilon^{1/2-\alpha} e^{rT} + C'_5 \varepsilon^{-\alpha} e^{-\beta T} + C'_4. \quad (4.9)$$

Выберем T из уравнения

$$\varepsilon^{1/2-\alpha} e^{rT} = \varepsilon^{-\alpha} e^{-\beta T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{2(r+\beta)} \log \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.10)$$

Подставляем выбранное T в (4.9):

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon\|_E &\leq D_0 \varepsilon^{1/2-\alpha} \varepsilon^{-r/(2(r+\beta))} + C'_5 \varepsilon^{-\alpha} \varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))} + C'_4 \\ &= [D_0 + C'_3] \varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C'_4 = C'_6 \varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C'_4. \end{aligned}$$

Это неравенство выполнено для любого $y^\varepsilon \in \mathcal{A}^\varepsilon$. Следовательно,

$$\|\mathcal{A}^\varepsilon\|_E \leq C'_6 \varepsilon^{\beta/(2(r+\beta))-\alpha} + C'_4. \quad (4.11)$$

Правая часть этого неравенства равномерно ограничена по ε , т.е. имеет место (4.2), очевидно, при

$$\alpha \leq \frac{\beta}{2(r+\beta)} = \frac{1}{2(1+r/\beta)} =: \alpha_0.$$

Предложение доказано.

Заметим, что при выполнении (4.1) доказанное в предыдущем пункте неравенство (3.25) можно усилить следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При выполнении предположений теоремы 3.1 и при условии (4.1) для разности

$$\widehat{y}^\varepsilon(t) - \widehat{y}^0(t) = (\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t)) - (\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$$

решения $(\widehat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \widehat{u}^\varepsilon(t))$ уравнения (2.15) с внешней силой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g^\varepsilon)$, причем $\widehat{y}^\varepsilon(t)$ взято из ядра $\mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}$, и решения $(\widehat{u}^0(t), \partial_t \widehat{u}^0(t))$ “предельного” уравнения (2.21), которое удовлетворяет начальным условиям $\widehat{y}^0(\tau) = \widehat{y}^\varepsilon(\tau)$, справедливо неравенство

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t) - \widehat{y}^0(\tau + t)\|_E \leq D_1 \varepsilon^{1/2 - \alpha/2} e^{rt} \quad \forall t \geq 0, \quad (4.12)$$

где $r = (K\lambda_1^{-1/2} + 1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует повторить рассуждения из доказательства теоремы 3.1 с той лишь разницей, что при оценивании $\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|$ воспользоваться не неравенством (3.18), а равномерной оценкой (4.2). Кроме того, в неравенствах (3.18) и (3.19) при оценке $\|\widehat{y}_\tau\|$ следует также воспользоваться (4.2), так как $\widehat{y}_\tau \in \mathcal{A}^\varepsilon$. Получим, что

$$\begin{aligned} \|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E &\leq C'_{11}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \\ \|\widehat{y}^0(\tau + t)\|_E &\leq C'_{11} \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда вместо неравенств (3.20), (3.21) и (3.22) будем иметь соответственно

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1 &\leq C'_{14}(1 + t), \\ |III| &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 \int_0^t \|\partial_t^2 w(\tau + \tau_1)\|_{-1} d\tau_1 \leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_1 C'_{14}(1 + t) \leq C'_{15} \varepsilon^{1-\alpha}(1 + t), \\ |II| &\leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 (\|\widehat{y}^\varepsilon(\tau + t)\|_E + \|\widehat{y}^0(\tau + t)\|_E) \leq \varepsilon^{1-\alpha} \Gamma_0 C'_{16} \leq C'_{17} \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому неравенство (3.23) примет вид

$$z(t) \leq 2(I + II + III) \leq K_1 \int_0^t z(\tau) d\tau + C'_{18} \varepsilon^{1-\alpha}(1 + t),$$

откуда аналогично (3.24) получаем неравенство

$$z(t) \leq C'_{18} \varepsilon^{1-\alpha} e^{K_1 t} (1 + t) \leq D_1^2 \varepsilon^{1-\alpha} e^{2rt},$$

где $2r = K_1 + 1$, $D_1^2 = C'_{18}$, что совпадает с искомым неравенством (4.12).

5. Оценка отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ от глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$ (автономный случай “предельного” уравнения). Рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 \widehat{u}^\varepsilon + \gamma \partial_t \widehat{u}^\varepsilon = \Delta \widehat{u}^\varepsilon - f(\widehat{u}^\varepsilon) + g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \widehat{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.1)$$

где функция $f(u)$ удовлетворяет условиям (2.2)–(2.4) при $\rho = 0$ (см. (3.1)), $\gamma > 0$. В этом пункте в отличие от уравнений (2.1) и (2.15) предполагается, что функция $g_0(\cdot) \in L_2(\Omega)$

не зависит от времени. Относительно функции $\widehat{g}_1(x, z)$, как и раньше, предполагается, что $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$, причем исходная функция $g_1(x, z)$ является трансляционно компактной по z в пространстве $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$ и, кроме того, любая функция $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ имеет первообразную $\widehat{G}_1(x, z)$ по z , которая ограничена в $C_b(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$, т.е. имеет место неравенство (3.9).

В п. 2 было показано, что уравнения (5.1) порождают семейство процессов $\{U_{\widehat{g}^\varepsilon}(t, \tau)\}$, $\widehat{g}^\varepsilon(t) = g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1(\cdot, t/\varepsilon)$, $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$, в энергетическом пространстве $E = H_0^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, которое имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon \subseteq E$.

Соответствующее “предельное” уравнение является автономным:

$$\partial_t^2 u^0 + \gamma \partial_t u^0 = \Delta u^0 - f(u^0) + g_0(x), \quad u^0|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.2)$$

В силу автономности процесс $\{U^0(t, \tau)\}$, порождаемый этим уравнением, зависит лишь от разности $t - \tau$. Его можно представить в виде $U^0(t, \tau) = S^0(t - \tau)$, где $\{S^0(t)\} := \{S^0(t), t \geq 0\}$ – полугруппа, отвечающая автономному уравнению (5.2). Это уравнение также имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0 \subseteq E$ (см. [11]–[14]), который обладает свойством строгой инвариантности под действием полугруппы $\{S^0(t)\}$: $S^0(t)\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}^0$ при всех $t \geq 0$.

В этом пункте будет рассматриваться важный случай, когда глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ автономного диссипативного волнового уравнения (5.2) притягивает ограниченные множества с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow +\infty$. Это выполнено, например, когда $\mathcal{A}^0$ является регулярным аттрактором (см. [13], [12]). Как известно, уравнение (5.2) обладает глобальной функцией Ляпунова

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y^0(t)) &= \mathcal{L}(u^0(t), \partial_t u^0(t)) \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{ |\partial_t u^0(x, t)|^2 + |\nabla_x u^0(x, t)|^2 \} + F(u^0(x, t)) - g^0(x) u^0(x, t) \right) dx. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для любого решения $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ уравнения (5.2) имеет место тождество

$$\mathcal{L}(y^0(t)) - \mathcal{L}(y^0(\tau)) = -\gamma \int_{\tau}^t |\partial_t u^0(\cdot, s)|^2 ds \quad \forall t \geq \tau, \quad (5.4)$$

из которого следует строгое убывание функции $\mathcal{L}(y^0(t))$ по t вдоль любого решения этого уравнения, не совпадающего с его стационарной точкой $z(x)$.

Предполагается, что уравнение (5.2) обладает лишь конечным числом стационарных точек $\{z_i(x), i = 1, \dots, N\}$:

$$\Delta z_i(x) - f(z_i(x)) + g_0(x) = 0, \quad z_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,$$

причем каждая стационарная точка является гиперболической (см. [13], [12], [15]). Тогда, как известно, глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ совпадает с объединением неустойчивых многообразий $M^u(z_i)$, выходящих из стационарных точек z_i (см. [13], [12]):

$$\mathcal{A}^0 = \bigcup_{i=1}^N M^u(z_i).$$

Кроме того, ограниченные семейства траекторий $\{y^0(t), t \geq 0\}$ сближаются с аттрактором $\mathcal{A}^0$ с экспоненциальной скоростью, т.е. найдется число $\nu > 0$ такое, что для любого решения $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ уравнения (5.2) с начальным условием $y^0(0) = y_0$, $\|y_0\|_E \leq L$, справедливо неравенство

$$\text{dist}_E(y^0(t), \mathcal{A}^0) \leq C(L)e^{-\nu t}. \quad (5.5)$$

Неравенство (5.5) доказано в [13].

Сформулируем основной результат этого пункта.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть

$$\alpha \leq \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)}. \quad (5.6)$$

Тогда для хаусдорфова отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ волнового уравнения (5.1) от глобального аттрактора $\mathcal{A}^0$ “предельного” автономного уравнения (5.2) имеет место оценка

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq C_0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \quad (5.7)$$

где

$$\eta_0(\alpha) = \frac{\nu}{2(r+\nu)}(1-\alpha). \quad (5.8)$$

В (5.6) и (5.8) ν — коэффициент в экспоненциальной оценке (5.5) притяжения решений “предельного” уравнения к аттрактору $\mathcal{A}^0$, число r такое же, как в неравенстве (3.25), показатель β фигурирует в оценке (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на двух следующих фактах.

1) Если решение $\hat{y}^\varepsilon(t) = (\hat{u}^\varepsilon(t), \partial_t \hat{u}^\varepsilon(t))$ уравнения (5.1) с внешней силой

$$\hat{g}^\varepsilon = g_0(x) + \varepsilon^{-\alpha} \hat{g}_1\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где $\hat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$, принадлежит ядру $\mathcal{K}_{\hat{g}^\varepsilon}$ этого уравнения, а решение $y^0(t) = (u^0(t), \partial_t u^0(t))$ “предельного” уравнения (5.2) удовлетворяет начальным условиям $y^0(\tau) = \hat{y}^\varepsilon(\tau)$, то траектории $\hat{y}^\varepsilon(t)$ и $y^0(t)$ уравнений (5.1) и (5.2) отклоняются друг от друга по формуле (4.12)

$$\|\hat{y}^\varepsilon(\tau+t) - y^0(\tau+t)\|_E \leq D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rt} \quad \forall t \geq 0. \quad (5.9)$$

2) Аттрактор $\mathcal{A}^0$ притягивает решения “предельного” уравнения с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow +\infty$ (см. (5.5)), т.е. для любого ограниченного множества $B \subset E$, $\|B\|_E \leq L$,

$$\text{dist}_E(y^0(\tau+t), \mathcal{A}^0) \leq D_2 e^{-\nu t} \quad \forall y^0(\tau) \in B, \quad t \geq 0 \quad (5.10)$$

($D_2 = C(L)$ не зависит от τ).

Приступим к доказательству теоремы 5.1. Пусть y^ε — любая точка $\mathcal{A}^\varepsilon$. Через эту точку проходит некоторая ограниченная полная траектория $\hat{y}^\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, процесса

$\{U_{\widehat{g}_1}(t, \tau)\}$, задаваемого уравнением (5.1) для некоторой функции $\widehat{g}_1 \in \mathcal{H}(g_1)$ (см. (2.19)). Для определенности можно считать, что

$$y_\tau = \widehat{y}^\varepsilon(0). \quad (5.11)$$

Заметим, что $\widehat{y}^\varepsilon(t) \in \mathcal{A}^\varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу условия (5.6) из (4.2) имеем

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(t)\|_E \leq C \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Рассмотрим точку $\widehat{y}^\varepsilon(-M)$, где M будет указано ниже (см. (5.18)). Пусть

$$y^0(-M+t) = (u^0(-M+t), \partial_t u^0(-M+t))$$

— решение задачи Коши для “предельного” уравнения (5.2), которое при $t = 0$ совпадает с $\widehat{y}^\varepsilon(-M)$:

$$y^0(-M) = \widehat{y}^\varepsilon(-M).$$

Из (5.12) получаем, что

$$\|y^0(-M)\|_E \leq C. \quad (5.13)$$

В силу (5.9)

$$\|\widehat{y}^\varepsilon(-M+t) - y^0(-M+t)\|_E \leq D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rt}. \quad (5.14)$$

Согласно свойству (5.10) экспоненциального притяжения аттрактором $\mathcal{A}^0$ имеем, что при $t \geq 0$

$$\text{dist}_E(y^0(-M+t), \mathcal{A}^0) \leq D_2 e^{-\nu t}. \quad (5.15)$$

Отсюда и из (5.14) вытекает, что при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{dist}_E(\widehat{y}^\varepsilon(-M+t), \mathcal{A}^0) &\leq \|\widehat{y}^\varepsilon(-M+t) - y^0(-M+t)\|_E + \text{dist}_E(y^0(-M+t), \mathcal{A}^0) \\ &\leq D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rt} + D_2 e^{-\nu t}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Выберем теперь число M так, чтобы

$$\varepsilon^{1/2-\alpha/2} e^{rM} = e^{-\nu M}. \quad (5.17)$$

Логарифмируя обе части этого равенства, получим

$$M = \frac{1-\alpha}{2(r+\nu)} \log \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5.18)$$

Подставив теперь $t = M$ в (5.16), находим

$$\begin{aligned} \text{dist}_E(\widehat{y}^\varepsilon(0), \mathcal{A}^0) &\leq D_1 \varepsilon^{1/2-\alpha/2} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r(1-\alpha)/(2(r+\nu))} + D_2 \varepsilon^{\nu(1-\alpha)/(2(r+\nu))} \\ &= (D_1 + D_2) \varepsilon^{\nu(1-\alpha)/(2(r+\nu))} = C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $C^0 = D_1 + D_2$ и

$$\eta_0(\alpha) = \nu \frac{1-\alpha}{2(r+\nu)}. \quad (5.20)$$

Так как y^ε — произвольная точка $\mathcal{A}^\varepsilon$, то из (5.19) заключаем, что

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq C^0 \varepsilon^{\eta_0(\alpha)}, \quad (5.21)$$

и оценка (5.7) доказана.

6. Равномерный глобальный аттрактор с экспоненциальным притяжением для семейства неавтономных волновых уравнений. Пусть функция $g_0(x, t)$ в предельном волновом уравнении (2.21) является трансляционно компактной в $L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; H)$. Рассматривается семейство уравнений

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + g(t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.1)$$

где $g \in \mathcal{H}(g_0)$. Предполагается, что $f(u)$ удовлетворяет неравенствам (2.2)–(2.4) при $\rho = 0$ и, как обычно, $\gamma > 0$. Пусть $\mathcal{K}_g$ – ядро уравнения (6.1), т.е.

$$\mathcal{K}_g = \{y_g(x, t) = (u_g(x, t), \partial_t u_g(x, t)), t \in \mathbb{R} \mid u_g(x, t) \text{ — решение (6.1) и } \|y_g(\cdot, t)\|_E \leq L < +\infty \forall t \in \mathbb{R}\}. \quad (6.2)$$

Отметим, что число L можно выбрать не зависящим от $g \in \mathcal{H}(g_0)$. Как уже отмечалось, семейство процессов $\{U_g(t, \tau)\}$, $g \in \mathcal{H}(g_0)$, действующих в E , порожденное семейством уравнений (6.1), имеет равномерный (по $g \in \mathcal{H}(g_0)$) глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$, причем

$$\mathcal{A}^0 = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} \mathcal{K}_g(0). \quad (6.3)$$

(Доказательство приведено в [14].) Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f'(v)| \leq K \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (6.4)$$

И, кроме того, пусть

$$K < \lambda_1, \quad \gamma^2 > \gamma_0^2 := 2(\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - K^2}), \quad (6.5)$$

где λ_1 – первое собственное значение оператора $\{-\Delta u, u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Тогда при любом $g \in \mathcal{H}(g_0)$ уравнение (6.1) имеет (единственное) глобальное решение $z_g(x, t) = (\tilde{u}_g(x, t), \partial_t \tilde{u}_g(x, t))$, ограниченное в E , т.е. ядро $\mathcal{K}_g$ состоит из одного элемента z_g . Траектория z_g притягивает при $t \rightarrow +\infty$ любое решение $y_g(x, t) = (u_g(x, t), \partial_t u_g(x, t))$, $t \geq \tau$, уравнения (6.1), точнее, имеет место неравенство

$$\|y_g(t) - z_g(t)\|_E \leq C \|y_g(\tau) - z_g(\tau)\|_E \cdot e^{-\varkappa(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau, \quad (6.6)$$

где $\varkappa > 0$ и $C > 0$ не зависят от y_g и от $g \in \mathcal{H}(g_0)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1]. Кроме того, в этой работе показано, что при выполнении неравенств (6.5) глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{A}^0 = \bigcup_{g \in \mathcal{H}(g_0)} z_g(0) = \left[\bigcup_{t \in \mathbb{R}} z_{g_0}(t) \right]_E, \quad (6.7)$$

где z_{g_0} – единственное ограниченное полное решение уравнения (6.1) с исходной внешней силой $g_0(x, t)$; $[\cdot]_E$ обозначает замыкание множества, стоящего внутри этих скобок. Из (6.6) и (6.7) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. При выполнении условий (6.4) и (6.5) глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$ притягивает любое решение $y_g(x, t) = (u_g(x, t), \partial_t u_g(x, t))$, $t \geq \tau$, уравнения (6.1) с экспоненциальной скоростью, т.е. при

$$\|y_g(\tau)\|_E \leq M_1 \quad (6.8)$$

имеет место неравенство

$$\text{dist}_E(y_g(\tau + t), \mathcal{A}^0) \leq C(M_1)e^{-\kappa t} \quad \forall t \geq 0, \quad (6.9)$$

где κ и C не зависят от y_g и $g \in \mathcal{H}(g_0)$.

7. Оценка отклонения равномерного глобального аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathcal{A}^0$ (неавтономный случай “предельного” уравнения). Рассматривается семейство уравнений вида (2.15)

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + \widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.1)$$

где $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $\widehat{g}_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} \widehat{g}_1(t/\varepsilon) \in \mathcal{H}(g_0(t) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(t/\varepsilon))$. Функции $g_0(t), g_1(z)$ те же, что и в уравнении (2.1), т.е. они трансляционно компактны в $L_2(\mathbb{R}; H)$. Наряду с (7.1) рассматривается соответствующее “предельное” семейство уравнений

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u = \Delta u - f(u) + \widehat{g}_0(t), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7.2)$$

где $\widehat{g}_0 \in \mathcal{H}(g_0)$.

Предполагается, что функция $f(v)$ удовлетворяет неравенству (6.4) и выполнено условие (6.5). При выполнении перечисленных условий в предыдущем пункте было показано, что семейство процессов $\{U_{\widehat{g}_0}(t, \tau)\}$, $\widehat{g}_0 \in \mathcal{H}(g_0)$, отвечающее (7.2), имеет равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^0$, который представим в виде (6.7), и $\mathcal{A}^0$ притягивает любые решения уравнения (7.2) с экспоненциальной скоростью, что отражено в неравенстве (6.9).

Для уравнений (7.1) помимо перечисленных свойств предполагается, что для любой функции $\widehat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ существует ее первообразная $\widehat{G}_1(x, z)$ по z , которая удовлетворяет условиям (3.8) и (3.9). Рассмотрим теперь при любом фиксированном ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}^\varepsilon$ семейства уравнений (7.1), который был построен в п. 2. Множество $\mathcal{A}^\varepsilon$ представимо в виде (2.19)

$$\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcup_{\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(\cdot/\varepsilon))} \mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0), \quad (7.3)$$

где $\mathcal{K}_{\widehat{g}^\varepsilon}(0)$ – сечение (в момент $t = 0$) ядра уравнения (7.1) с внешней силой $\widehat{g}^\varepsilon \in \mathcal{H}(g_0(\cdot) + \varepsilon^{-\alpha} g_1(\cdot/\varepsilon))$.

Из указанных выше свойств следует теорема об отклонении аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathcal{A}^0$ “семейства” предельных уравнений (7.2).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть для функции $f(v)$ имеет место неравенство (6.4) и выполнено условие (6.5), а функции $g_0(t)$ и $g_1(z)$ являются трансляционно компактны в $L_2(\mathbb{R}; H)$, причем для любой функции $\hat{g}_1(x, z) \in \mathcal{H}(g_1)$ существует первообразная $\hat{G}_1(x, z)$ по z (т.е. $\partial_z \hat{G}_1(x, z) = \hat{g}_1(x, z)$), которая равномерно ограничена в $C_b(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$, т.е. выполнено (3.9). Если выполнено неравенство

$$\alpha \leq \alpha_0 = \frac{1}{2(1+r/\beta)},$$

то для отклонения аттрактора $\mathcal{A}^\varepsilon$ от аттрактора $\mathcal{A}^0$ справедлива оценка

$$\text{dist}_E(\mathcal{A}^\varepsilon, \mathcal{A}^0) \leq \tilde{C}_\varepsilon \eta_1(\alpha), \quad (7.4)$$

где

$$\eta_1(\alpha) = \frac{\varkappa}{2(r+\varkappa)}(1-\alpha). \quad (7.5)$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент из экспоненциальной оценки (6.6) притяжения решений “предельного” уравнения к аттрактору $\mathcal{A}^0$, а число r такое же, как в (3.25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 5.1. Действительно, предельное уравнение (7.2) имеет экспоненциально притягивающий аттрактор $\mathcal{A}^0$, причем справедлива формула (6.9), где в показательной функции имеется коэффициент $\varkappa$. (На месте $\varkappa$ в аналогичной формуле (5.10) экспоненциального притяжения регулярным аттрактором $\mathcal{A}^0$ автономного уравнения стоит коэффициент ν . Поэтому формула (7.5) для $\eta_1(\alpha)$ отличается от формулы (5.8) для $\eta_0(\alpha)$ лишь тем, что число ν заменено на $\varkappa$.) Далее следует повторить все рассуждения из доказательства теоремы 5.1, начиная с формулы (5.9) (с заменой ν на $\varkappa$). В итоге получится требуемая оценка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., Wendland W. L. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging // *Discr. Cont. Dynamic Systems*. 2005. V. 12. №1. P. 27–38.
- [2] Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Averaging in infinite dimensions // *J. Integral Equations Appl.* 1990. V. 2. №4. P. 463–494.
- [3] Ильин А. А. Усреднение диссипативных динамических систем с быстро осциллирующими правыми частями // *Матем. сб.* 1996. Т. 187. №5. С. 15–58.
- [4] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. №1. С. 16–53.
- [5] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems // *Electr. J. ESAIM: COCV.* 2002. V. 8. P. 467–487.
- [6] Вишик М. И., Фидлер Б. Количественное усреднение глобальных аттракторов гиперболических волновых уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами // *УМН.* 2002. Т. 47. №4. С. 75–94.
- [7] Efendiev M., Zelik S. Attractors of the reaction-diffusion systems with rapidly oscillating coefficients and their homogenization // *Ann. Inst. Poincaré.* 2002. V. 19. №6. P. 961–989.
- [8] Chepyzhov V. V., Goritsky A. Yu., Vishik M. I. Integral manifolds and attractors with exponential rate for nonautonomous hyperbolic equations with dissipation // *Russ. J. Math. Phys.* 2005. №1. P. 17–39.

- [9] Вишик М. И., Чепыжов В. В. Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 9. С. 3–30.
- [10] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [11] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Appl. Math. Sci. V. 68. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [12] Hale J. K. Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. Math. Survey Monographs. V. 25. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988.
- [13] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
- [14] Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for Equations of Mathematical Physics. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
- [15] Raugel G. Global attractors in partial differential equations // Handbook of Dynamical Systems, Vol. 2 / ed. B. Fiedler. Amsterdam: North-Holland, 2002. P. 885–982.
- [16] Haraux A. Two remarks on dissipative hyperbolic problems // Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications / ed. H. Brezis, J. L. Lions. Collège de France Seminar № 7. Research Notes in Math. V. 112. Boston: Pitman, 1985. P. 161–179.
- [17] Ball J. M. Global attractors for damped semilinear wave equations // Discr. Cont. Dynamic Systems. 2004. V. 10. № 1–2. P. 31–62.
- [18] Боголюбов Н. Н., Митропольский Я. А. Асимптотические методы в теории нелинейных осцилляций. М.: Физматгиз, 1963.
- [19] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд. МГУ, 1978.
- [20] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: ИЛ, 1961.
- [21] Fiedler B., Vishik M. I. Quantative homogenization of global attractors for reaction-diffusion systems with rapidly oscillating terms // Preprint № A-18-2000. Berlin: Free Univ. Berlin, 2000.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: vishik@iitp.ru, chep@iitp.ru

Поступило
31.03.2005