Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Герман, Полиэдры Клейна и относительные минимумы решеток, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 546–552

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:10:24

УДК 511.36+511.9

ПОЛИЭДРЫ КЛЕЙНА И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ МИНИМУМЫ РЕШЕТОК

О. Н. Герман

В работе доказывается, что в $\mathbb{R}^3$ относительные минимумы почти всякой решетки лежат на поверхностях соответствующих полиэдров Клейна. Также для почти всякой решетки из $\mathbb{R}^3$ доказывается, что множество относительных минимумов с неотрицательными координатами совпадает с объединением множества экстремальных точек полиэдра Клейна и множества точек специального вида, лежащих на треугольных гранях полиэдра Клейна.

Библиография: 9 названий.

Данная работа посвящена исследованию связи между двумя наиболее известными геометрическими обобщениями понятия цепной дроби. Одно из них восходит к Клейну (см. [1]), а другое — к Вороному (см. [2]) и Минковскому (см. [3]). Дадим соответствующие определения. Будем обозначать через $\mathcal{L}^n$ пространство n -мерных унимодулярных решеток в $\mathbb{R}^n$. Если $\Lambda \in \mathcal{L}^n$, то полугруппу ненулевых точек решетки Λ с неотрицательными координатами будем обозначать $\mathfrak{S}(\Lambda)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$. Тогда выпуклая оболочка множества $\mathfrak{S}(\Lambda)$ называется *полиэдром Клейна* и обозначается K_Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$. Тогда точка $\mathbf{x} \in \Lambda$ называется *относительным минимумом* решетки Λ , если не существует таких ненулевых точек $\mathbf{y} \in \Lambda$, что $|y_i| \leq |x_i|$, $i = 1, \dots, n$, и $|y_1| + \dots + |y_n| < |x_1| + \dots + |x_n|$. Множество всех относительных минимумов решетки Λ будем обозначать $\mathfrak{M}(\Lambda)$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Обозначим через $\Lambda_{1/2}^2$ домноженную на $\sqrt{2}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^2$ и точку $(1/2, 1/2)$. Через $\mathcal{L}_{1/2}^2$ обозначим орбиту решетки $\Lambda_{1/2}^2$ при левом действии группы диагональных унимодулярных матриц 2×2 . Общеизвестно следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $\Lambda \in \mathcal{L}^2 \setminus \mathcal{L}_{1/2}^2$, то множество вершин полиэдра Клейна совпадает с множеством $\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda)$.

В случае $n \geq 3$ аналогичное утверждение уже не верно. Хотя, как показал Быковский (см. [4]), вершины полиэдра Клейна всегда являются относительными минимумами. Кроме того, что в случае $n \geq 3$ относительные минимумы не обязаны быть вершинами полиэдра Клейна, ситуация усложняется еще тем, что в этом случае полиэдр Клейна

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00518, и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

может не быть обобщенным многогранником (т.е. множеством, которое в пересечении с любым ограниченным многогранником дает многогранник). Полиэдр Клейна может вообще оказаться незамкнутым множеством (соответствующий пример и критерий того, когда полиэдр Клейна является обобщенным многогранником, см. [5]). Поэтому мы будем говорить не о вершинах, а об экстремальных точках полиэдра Клейна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть M – выпуклое множество. Точка $\mathbf{v} \in M$ называется *экстремальной точкой* множества M , если она не принадлежит ни одному открытому интервалу, содержащемуся в M . Множество всех экстремальных точек множества M будем обозначать $\text{ext}(M)$.

Для каждой точки $\mathbf{v}$ решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ положим

$$P_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 2v_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \mathfrak{S}_{\mathbf{v}} = \mathfrak{S}(\Lambda) \setminus (\{\mathbf{v}\} \cup \text{ext}(P_{\mathbf{v}})).$$

ЛЕММА 1. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ и $\mathbf{v} \in \mathfrak{S}(\Lambda)$. Тогда $\mathbf{v}$ является относительным минимумом в том и только том случае, если $2\mathbf{v} \notin (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что точка $\mathbf{v} \in \mathfrak{S}(\Lambda)$ является относительным минимумом тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}(\Lambda) \cap P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}}) = \{\mathbf{v}\}$. Отсюда сразу следует, что если $\mathbf{v}$ – не относительный минимум, то в множестве $P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}})$ есть точка $\mathbf{u}$ решетки Λ , отличная от $\mathbf{v}$. В силу симметрии $P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}})$ относительно $\mathbf{v}$, точка $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$ также лежит в $P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}})$. Стало быть, $2\mathbf{v} \in (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$. Обратно, пусть $2\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ для некоторых $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathfrak{S}_{\mathbf{v}}$. Тогда $0 \leq u_i \leq 2v_i$ и $0 \leq w_i \leq 2v_i$ для $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}})$ и $\mathbf{v}$ не является относительным минимумом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^n$ имеет место включение

$$\text{ext}(K_{\Lambda}) \subseteq \mathfrak{M}(\Lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{v} \in \text{ext}(K_{\Lambda})$, то $\mathbf{v}$ не представима в виде полусуммы никаких двух точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$, отличных от $\mathbf{v}$. Стало быть, $2\mathbf{v} \notin (\mathfrak{S}_{\mathbf{v}} + \mathfrak{S}_{\mathbf{v}})$ и мы можем применить лемму 1.

Пусть теперь $n = 3$ и $\Lambda \in \mathcal{L}^3$. Рассмотрим произвольную треугольную грань F полиэдра K_{Λ} с вершинами $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Допустим, существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3 \in \Lambda \quad (1)$$

и при этом

$$F \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \cup \left\{ \frac{m}{k}\mathbf{v} + \frac{k-m}{k}\mathbf{u}_3 \right\}_{m=1}^k. \quad (2)$$

Тогда из леммы 1 легко видеть, что $\mathbf{v}$ – относительный минимум. Следовательно, обозначив через $\Xi(K_{\Lambda})$ множество точек $\mathbf{v}$, удовлетворяющих (1) и (2), получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^3$ имеет место включение

$$\Xi(K_\Lambda) \subset \mathfrak{M}(\Lambda).$$

Таким образом, в случае $n = 3$ множества $\text{ext}(K_\Lambda)$ и $\Xi(K_\Lambda)$ заведомо содержатся в $\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda)$. Ниже мы покажем, что почти всегда выполнено и обратное включение (см. следствие из теоремы 2).

Обозначим через $\Lambda_{1/2}^3$ домноженную на $2^{1/3}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^3$ и точку $(1/2, 1/2, 1/2)$. Через $\mathcal{L}_{1/2}^3$ обозначим орбиту решетки $\Lambda_{1/2}^3$ при левом действии группы диагональных унимодулярных матриц 3×3 . Множество внутренних точек полиэдра K_Λ будем обозначать $\text{int}(K_\Lambda)$. Симплекс с вершинами в Λ будем называть *пустым* (относительно Λ), если он не содержит точек решетки Λ , отличных от вершин.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Lambda \in \mathcal{L}^3 \setminus \mathcal{L}_{1/2}^3$, то $\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \text{int}(K_\Lambda) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $\mathbf{v} \in \text{int}(K_\Lambda)$. Тогда по теореме Штейница (см. [6], [7]) найдутся такие шесть точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$, что $\mathbf{v}$ лежит во внутренней их выпуклой оболочке. Отсюда легко видеть, что среди точек множества $\mathfrak{S}(\Lambda)$ можно найти точки $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ таким образом, что

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3$$

с неотрицательными λ_i , а симплекс $\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ пуст.

Если найдется такое i , что $\lambda_i > 1/2$, то точка $\mathbf{u}_i$ обязана будет содержаться в $P_{\mathbf{v}} \setminus \text{ext}(P_{\mathbf{v}})$ и тогда $\mathbf{v}$ не будет относительным минимумом. Поэтому мы можем считать, что $\lambda_i \leq 1/2$, $i = 1, 2, 3$. С другой стороны, из теоремы Уайта о ширине пустого целочисленного симплекса (см. [8], [9]) следует, что с точностью до перестановки индексов $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Но тогда из пустоты симплекса $\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ легко следует, что $\lambda_3 = 1/2$. Таким образом,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_1}{2} + \frac{\mathbf{u}_2}{2} + \frac{\mathbf{u}_3}{2},$$

откуда видим, что $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in P_{\mathbf{v}}$. Стало быть, $\mathbf{v}$ будет относительным минимумом лишь в том случае, когда $\mathbf{u}_i$ лежат на координатных осях, т.е. когда Λ лежит в $\mathcal{L}_{1/2}$.

Итак, если $\Lambda \in \mathcal{L}^3 \setminus \mathcal{L}_{1/2}^3$, то все относительные минимумы с неотрицательными координатами лежат на поверхности полиэдра Клейна. Для $n \geq 4$ подобное утверждение неверно. Более того, имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Множество решеток $\Lambda \in \mathcal{L}^4$, для которых $\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \text{int}(K_\Lambda) \neq \emptyset$, имеет положительную меру.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Lambda_{1/3}^4$ домноженную на $3^{1/4}$ минимальную (по включению) решетку, содержащую $\mathbb{Z}^4$ и точку $\mathbf{a} = (1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$. Векторы стандартного базиса $\mathbb{R}^4$ обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Легко видеть, что

$$\Lambda \cap P_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, 2\mathbf{a}\}$$

и при этом $\mathbf{a}$ содержится во внутренности полиэдра Клейна, соответствующего решетке $\Lambda_{1/3}^4$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{A = (A_{ij}) \in SL_4(\mathbb{R}) \mid 0 \leq A_{ij} \leq \varepsilon \text{ для всех } i \neq j \text{ и } |A_{ii} - 1| \leq \varepsilon \text{ для всех } i\}.$$

Пусть ε достаточно мало и A — произвольный оператор из $\mathcal{A}_\varepsilon$. Тогда

$$A(\Lambda_{1/3}^4) \cap P_{A(\mathbf{a})} = \{\mathbf{0}, A(\mathbf{a}), 2A(\mathbf{a})\},$$

откуда в силу леммы 1 следует, что $A(\mathbf{a}) \in \mathfrak{M}(A(\Lambda_{1/3}^4))$. Кроме того, точки $A(\mathbf{e}_1)$, $A(\mathbf{e}_2)$, $A(\mathbf{e}_3)$ и $A(\mathbf{e}_4)$ имеют неотрицательные координаты и, стало быть, $A(\mathbf{a})$ лежит во внутренности полиэдра Клейна, соответствующего решетке $A(\Lambda_{1/3}^4)$. Остается заметить, что множество $\mathcal{A}_\varepsilon(\Lambda_{1/3}^4)$ имеет положительную меру в $\mathcal{L}^4$ при $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda)$ и $\text{ext}(P_{\mathbf{v}}) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{v}\}$. Тогда

$$\mathbf{v} \in \text{ext}(K_\Lambda) \cup \Xi(K_\Lambda).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если на всех координатных осях или хотя бы на одной координатной плоскости нет ненулевых точек решетки $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, то

$$\mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda) = \text{ext}(K_\Lambda) \cup \Xi(K_\Lambda).$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}^3$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \Lambda$ линейно независимы и

$$\partial(\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)) \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}.$$

Пусть $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, и пусть к тому же

$$\nexists \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \Lambda \cap \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) : \quad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \quad \text{и} \quad 2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \quad (3)$$

Тогда $\lambda_2 \geq 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что $\mathbf{v}$ не содержится в области

$$\Omega = \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 < \mu_3 \leq \mu_2 < \frac{1}{3} \right\}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid \mu_1 \geq \frac{1}{2}, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0 \right\}, \\
\mathbf{v}_1^{(1)} &= \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2^{(1)} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1 = (2\lambda_1 - 1)\mathbf{u}_1 + 2\lambda_2\mathbf{u}_2 + 2\lambda_3\mathbf{u}_3, \\
\Omega_2 &= \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid \mu_1 > \mu_2 \geq \mu_3 \geq \frac{1}{4} \right\}, \\
\mathbf{v}_1^{(2)} &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 2\mathbf{v} = \sum (1 - 2\lambda_i)\mathbf{u}_i, \\
\mathbf{v}_2^{(2)} &= 4\mathbf{v} - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = \sum (4\lambda_i - 1)\mathbf{u}_i, \\
\Omega_3 &= \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid \frac{2}{5} \leq \mu_1 \leq \frac{3}{5}, \frac{1}{5} \leq \mu_2 \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \leq \mu_3 \leq \frac{1}{3} \right\}, \\
\mathbf{v}_1^{(3)} &= 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 3\mathbf{v} = (2 - 3\lambda_1)\mathbf{u}_1 + (1 - 3\lambda_2)\mathbf{u}_2 + (1 - 3\lambda_3)\mathbf{u}_3, \\
\mathbf{v}_2^{(3)} &= 5\mathbf{v} - 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = (5\lambda_1 - 2)\mathbf{u}_1 + (5\lambda_2 - 1)\mathbf{u}_2 + (5\lambda_3 - 1)\mathbf{u}_3, \\
\Omega_4 &= \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid \frac{3}{7} \leq \mu_1 \leq \frac{4}{7}, \frac{2}{7} \leq \mu_2 \leq \frac{2}{5}, \frac{1}{7} \leq \mu_3 \leq \frac{1}{5} \right\}, \\
\mathbf{v}_1^{(4)} &= 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 - 5\mathbf{v} = (3 - 5\lambda_1)\mathbf{u}_1 + (2 - 5\lambda_2)\mathbf{u}_2 + (1 - 5\lambda_3)\mathbf{u}_3, \\
\mathbf{v}_2^{(4)} &= 7\mathbf{v} - 3\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = (7\lambda_1 - 3)\mathbf{u}_1 + (7\lambda_2 - 2)\mathbf{u}_2 + (7\lambda_3 - 1)\mathbf{u}_3.
\end{aligned}$$

С одной стороны, $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^4 \Omega_i$. С другой, если $\mathbf{v} \in \Omega_i$, то $\mathbf{v}_1^{(i)}, \mathbf{v}_2^{(i)} \in \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ и $\mathbf{v}_1^{(i)} \neq \mathbf{v}_2^{(i)}$. И при этом для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ выполняется $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1^{(i)} + \mathbf{v}_2^{(i)}$. Следовательно, $\mathbf{v} \notin \Omega$ и $\lambda_2 \geq 1/3$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ удовлетворяют условию леммы 2. Тогда

$$\left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 \leq \mu_2 \leq 2\lambda_2, 0 \leq \mu_3 \leq 2\lambda_3 \right\} \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Delta = \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ и

$$Q = \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 \leq \mu_2 \leq 2\lambda_2, 0 \leq \mu_3 \leq 2\lambda_3 \right\}.$$

Из условия (3) следует, что $\Lambda \cap \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta) = \{\mathbf{v}\}$. Стало быть, $Q \cap \Lambda \cap \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta) = \{\mathbf{v}\}$. Далее, $Q \setminus (\Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta)) = \Delta' \cup (2\mathbf{v} - \Delta')$, где

$$\Delta' = \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 2\lambda_1 \leq \mu_1 \leq 1, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0 \right\}.$$

Поскольку $\lambda_1 \geq 1/3$ (так как $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$), то имеет место включение

$$\Delta' + \mathbf{v} - \mathbf{u}_1 \subset \Delta \cap (2\mathbf{v} - \Delta),$$

следовательно, $\Delta' \cap \Lambda = \mathbf{u}_1$. Остается заметить, что $2\mathbf{v} - \Delta'$ симметрично Δ' относительно точки $\mathbf{v}$ и, стало быть, $\Lambda \cap (2\mathbf{v} - \Delta') = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1$.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ удовлетворяют условию леммы 2. Тогда треугольник $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$Q = \left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 \leq \mu_2 \leq 2\lambda_2, 0 \leq \mu_3 \leq 2\lambda_3 \right\}.$$

По лемме 3 $Q \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1\}$. При этом $\lambda_2 \geq 1/3$, как следует из леммы 2. Стало быть, в слое

$$\left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 \leq \mu_2 \leq 1, \lambda_3 \leq \mu_3 \leq 2\lambda_3 \right\}$$

нет точек решетки Λ , за исключением точек $\mathbf{v}$ и $2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1$, поскольку этот слой содержится в множестве $Q \cup (\mathbf{v} + Q)$. Отсюда видим, что в слое

$$\left\{ \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mid 0 \leq \mu_2 \leq 1, 0 \leq \mu_3 \leq \lambda_3 \right\}$$

также нет точек решетки Λ , за исключением точек $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}$. Следовательно, треугольник $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ пуст.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ удовлетворяют условию леммы 2. Тогда существует такое $k \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что треугольник $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ является базисным для решетки $\Lambda \cap \text{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Отсюда, учитывая условие (3), легко видеть, что точка $\mathbf{v}$ обязана лежать на медиане треугольника $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ удовлетворяют условию леммы 2. Пусть

$$\mathbf{w} \in \Lambda \cap \text{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \setminus \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Тогда найдутся такие точки $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w})$, что $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ и $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5 точка $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. И при этом треугольник $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ является базисным для решетки $\Lambda \cap \text{aff}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ (см. лемму 4). Отсюда нетрудно видеть, что как минимум одна из точек

$$2\mathbf{v} - \mathbf{u}_1, \quad 2\mathbf{v} - \mathbf{u}_2, \quad \frac{k}{2k+1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - \frac{1}{2k+1}\mathbf{u}_3$$

лежит в $\text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{w})$.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}(\Lambda) \cap \mathfrak{S}(\Lambda) \setminus \text{ext}(K_\Lambda)$. Покажем, что $\mathbf{v} \in \Xi(K_\Lambda)$. Из теоремы 1 следует, что $\mathbf{v} \in \partial K$. При этом $\mathbf{v} \notin \text{ext}(K)$, стало быть, найдутся точки $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2 \in \partial K$, отличные от $\mathbf{v}$, такие, что $2\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. По теореме Каратеодори (см. [6]) каждая из точек $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ представима в виде выпуклой комбинации (т.е. комбинации с положительными коэффициентами, сумма которых равна 1) не более, чем четырех точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$. Следовательно, точка $\mathbf{v}$ представима в виде выпуклой комбинации не более, чем восьми точек из $\mathfrak{S}(\Lambda)$, отличных от $\mathbf{v}$. Поскольку $\mathbf{v} \in \partial K$, то все эти точки обязаны лежать в некоторой плоскости, опорной к K . Значит, среди них найдутся точки $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ такие, что $\mathbf{v} \in \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Из леммы 1 и того, что $\text{ext}(P_{\mathbf{v}}) \cap \Lambda = \{\mathbf{0}, 2\mathbf{v}\}$, следует, что треугольник $\Delta = \text{conv}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ невырожден и точка $\mathbf{v}$ лежит в его внутренности. Стало быть, мы можем считать, не ограничивая общности, что $\partial\Delta \cap \Lambda = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Пусть

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

В силу леммы 1 точка $\mathbf{v}$ не представима в виде полусуммы никаких двух различных точек $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из $\Delta \cap \Lambda$, т.е. для $\mathbf{v}$ выполнено условие (3). Значит, по лемме 5 точка $\mathbf{v}$ удовлетворяет условию (1). В силу леммы 6 и леммы 1 условие (2) также выполняется. Таким образом, $\mathbf{v} \in \Xi(K)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Klein F. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1895. V. 3. P. 357–359.
- [2] Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
- [3] Minkowski H. Généralisation de la théorie des fractions continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1896. V. 13. №2. P. 41–60.
- [4] Быковский В. А. Локальные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна // Функцион. анализ и его прилож. (в печати).
- [5] Moussaïf J.-O. Convex hulls of integral points // Записки научных семинаров ПОМИ. 2000. Т. 266. С. 188–217.
- [6] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
- [7] Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, I, II, III // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 143. P. 128–175; 1914. V. 144. P. 1–40; 1916. V. 146. P. 1–52.
- [8] Герман О. Н. Паруса и базисы Гильберта // Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 98–105.
- [9] White G. K. Lattice tetrahedra // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 389–396.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: german@mech.math.msu.su

Поступило
04.11.2004