Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зуев, О периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 560–570

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:02:31

УДК 517.911.5+517.927.21

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А. В. Зуев

Новый вариант метода сдвига вдоль траекторий, не требующий единственности решения задачи Коши, применяется для доказательства теоремы о существовании периодического решения для векторного обыкновенного дифференциального уравнения первого и второго порядка. Полученный результат применим к уравнениям с разрывной правой частью и дифференциальным включениям. Рассматривается ряд примеров применения доказанных теорем в ситуациях, не покрываемых классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью и теорией уравнений с правой частью, удовлетворяющей условиям Каратеодори.

Библиография: 11 названий.

В этой статье мы продолжаем развитие методов теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и включений с разрывной правой частью. В данном случае предметом исследования является задача о существовании периодического решения для уравнений и включений первого и второго порядка. При этом данная задача рассматривается с точки зрения нового варианта метода сдвига вдоль траекторий (см. [1]–[4]). Благодаря этому удастся перейти от уравнений (включений), удовлетворяющих условиям Каратеодори (Дэви), к значительно более широкому классу уравнений и включений, допускающему сложные разрывы в правой части.

Основными требованиями, накладываемыми на пространство решений уравнения или включения, в таком подходе являются условия (e) , (c) и (h) (см. [5], [6], [1] и [2]). Первое из них означает существование (локального) решения задачи Коши, второе – непрерывность его зависимости от начальных данных, наконец, последнее – это условие гомологической тривиальности множества решений задачи Коши, удовлетворяющих фиксированному начальным данным.

Пусть $U = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, $a < 0 < T < b$. Символом $C_s(U)$ обозначим пространство частичных отображений с графиками в области U (см. [5]). Символом $R_{ceh}(U)$ обозначаем класс пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений и включений, принадлежащих $R(U)$ и удовлетворяющих условиям (c) , (e) и (h) . Более подробное описание этих объектов можно найти в книге [5]. Для скалярного произведения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ используем обозначение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m x_i y_i,$$

а для длины вектора — обычный символ модуля. Символом $C([0, T], \mathbb{R}^m)$ обозначаем пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций, принимающих значения в $\mathbb{R}^m$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|.$$

Пусть V — некоторое подмножество области $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Пусть задана многозначная функция $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, периодичная по первому аргументу (“по времени”) с периодом T . Отметим, что мы не предполагаем ни ее полунепрерывности сверху или снизу, ни компактнозначности. Мы будем рассматривать дифференциальное включение первого порядка

$$x' \in g(t, x) \quad (1)$$

и задачу о существовании периодического решения периода T для него:

$$x(0) = x(T). \quad (2)$$

Пространство решений $Z = D(g)$ дифференциального включения (1) содержит:

- 1) функции $x \in C_s(U)$, области определения $\pi(x)$ которых состоят из единственной точки $t_0 \in (a, b)$, такие, что $(t_0, x(t_0)) \in U$;
- 2) функции $x \in C_s(U)$, определенные на отрезке $\pi(x)$, обобщенно абсолютно непрерывные, аппроксимативная производная которых почти во всех точках $t \in \pi(x)$ удовлетворяет включению $x' \in g(t, x(t))$ (см. [5]).

В частности, для выполнения последнего условия необходимо, чтобы для почти всех $t \in \pi(x)$ функция g была определена в точке $(t, x(t))$, т.е. чтобы $(t, x(t)) \in V$. Решением краевой задачи (2) для уравнения (1) называем функцию $x \in D(g)$, определенную на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющую условию (2).

Отметим также, что теория интегрирования, соответствующая введенному понятию решения дифференциального включения (уравнения), есть теория интеграла Данжуа (см. [5], [7]).

Для доказательства существования решения задачи (2) для включения (1) воспользуемся принципом продолжения по параметру в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Z_\lambda \in R_{ceh}(U)$ при любом $\lambda \in [c, d]$ и отображение $\zeta: [c, d] \rightarrow R_{ceh}(U)$, заданное формулой $\zeta(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно; W — открытое ограниченное подмножество пространства $C([0, T], \mathbb{R}^m)$, при $\lambda \in [c, d]$ $H_\lambda = Z_\lambda \cap [W]$ и $G_\lambda = Z_\lambda \cap W$; отображение $f: [W] \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно и при $\lambda \in [c, d]$ для любой функции $z \in H_\lambda \setminus G_\lambda$ $f(z) \neq \vec{0}$. Пусть степень отображения $f_c = f|_{H_c \setminus G_c}$ множества $H_c \setminus G_c$ отлична от нуля. Тогда степень отображения $f_d = f|_{H_d \setminus G_d}$ множества $H_d \setminus G_d$ также отлична от нуля и найдется такая функция $z \in G_d$, что $\pi(z) = [0, T]$ и $f(z) = \vec{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к ссылке на леммы 5.5 и 2.4 из [1].

Ниже доказывается результат, обобщающий (с некоторыми ограничениями) теорему 7.1 из [8] на класс уравнений и включений, пространства решений которых удовлетворяют условиям (e), (c) и (h).

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространство Z решений дифференциального включения (1) принадлежит классу $R_{ceh}(U)$. Пусть функции $\alpha, \beta: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы по Лебегу и положительны,

$$\liminf_{(t,x) \rightarrow (\tau,\xi)} \langle x, g(t, x) \rangle \geq -\alpha(\tau)|\xi|^2, \quad (3)$$

$$\limsup_{(t,x) \rightarrow (\tau,\xi)} \langle x, g(t, x) \rangle \leq \beta(\tau)(|\xi|^2 + 1) \quad (4)$$

при всех $\tau \in [0, T]$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть существует такая постоянная $A > 0$, что для всех непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций x , удовлетворяющих условиям $x(0) = x(T)$ и $\min_{t \in [0, T]} |x(t)| \geq A$, найдется интегрируемая по Лебегу функция $p_x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что почти при всех $t \in [0, T]$ выполнены соотношения

$$\sup \langle x(t), g(t, x(t)) \rangle \leq p_x(t) \quad (5)$$

$$\int_0^T p_x(t) dt \leq 0. \quad (6)$$

Тогда задача (1), (2) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X — пространство решений уравнения $x' = -\alpha(t)x$. Как нетрудно заметить, $X \in R_{ceu}(U) \subset R_{ceh}(U)$. Определим при $\lambda \in (a, b)$ пространства Z_λ посредством подклеивания $Z_\lambda = Z *_\lambda X$: при $a < \lambda < b$ по определению полагаем

$$Z_\lambda = \{z \in C_s(U) : \text{если } \pi(z) \cap [a, \lambda] \neq \emptyset, \text{ то } z|_{\pi(z) \cap [a, \lambda]} \in Z, \\ \text{если } \pi(z) \cap [\lambda, b] \neq \emptyset, \text{ то } z|_{\pi(z) \cap [\lambda, b]} \in X\}$$

(см. [5]). В [5, § 8.7] доказывается, что $Z_\lambda \in R_{ce}(U)$ и отображение $\zeta: (a, b) \rightarrow R_{ce}(U)$, заданное формулой $\zeta(\lambda) = Z_\lambda$, непрерывно. Кроме того, $Z_\lambda \in R_h(U)$. Действительно, пусть $(\alpha, w) \in U$ и любое решение задачи Коши $z \in Z_\lambda^+$, $z(\alpha) = w$ продолжается на отрезок $[\alpha, \beta]$. Множество

$$S_{Z_\lambda}(w, \alpha, \beta) = \{z \in Z_\lambda : \pi(z) = [\alpha, \beta], z(\alpha) = w\}$$

при $\lambda \leq \alpha$ совпадает с множеством $S_X(w, \alpha, \beta)$, при $\lambda \geq \beta$ совпадает с множеством $S_Z(w, \alpha, \beta)$, и потому ациклично. Если же $\lambda \in (\alpha, \beta)$, то множество $S_{Z_\lambda}(w, \alpha, \beta)$ гомеоморфно $S_Z(w, \alpha, \lambda)$. Действительно, отображение $\gamma: S_{Z_\lambda}(w, \alpha, \beta) \rightarrow S_Z(w, \alpha, \lambda)$, заданное формулой $\gamma(z) = z|_{[\alpha, \lambda]}$, взаимно однозначно, непрерывно, и отображение γ^{-1} также непрерывно, поскольку $X \in R_{ceu}(U)$.

Чтобы воспользоваться теоремой 1, необходимо указать ограниченное подмножество W пространства $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, на границе которого нет решений краевой задачи $x \in Z_\lambda$, $x(0) = x(T)$ ни при одном $\lambda \in (a, b)$ (“априорная оценка”), и показать, что степень отображения $f_\alpha = f|_{[W] \cap Z_\alpha}$, заданного формулой $f(x) = x(T) - x(0)$, отлична от нуля.

Возьмем произвольно $\lambda \in [0, T]$ и функцию $x \in Z_\lambda$ такую, что $x(0) = x(T)$. Последняя удовлетворяет дифференциальному включению $x' \in g_\lambda(t, x)$, где

$$g_\lambda(t, x) = \begin{cases} g(t, x), & a < t < \lambda, \\ \{-\alpha(t)x\}, & \lambda \leq t < b. \end{cases}$$

Докажем, что существует такая постоянная $M > 0$, не зависящая от функции x , что справедливо неравенство

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, T]} |x(t)| < M. \quad (7)$$

Пусть минимум и максимум модуля функции x достигаются в точках μ и ν отрезка $[0, T]$ соответственно. Если $|x(\mu)| > A$, то

$$\langle x(t), x'(t) \rangle \leq \sup \langle x(t), g_\lambda(t, x(t)) \rangle \leq \sup \langle x(t), g(t, x(t)) \rangle \leq p_x(t)$$

при почти всех $t \in [0, T]$ в силу неравенств (3) и (5). Кроме того,

$$\langle x(t), x'(t) \rangle = -\alpha(t)|x(t)|^2 < 0$$

почти всюду на отрезке $[\lambda, T]$. Интегрируя эти неравенства и принимая во внимание периодичность функции x и соотношение (6), получаем

$$0 = \int_0^T \langle x(t), x'(t) \rangle dt < 0$$

при $\lambda \neq T$. Противоречие. Следовательно, $|x(\mu)| \leq A$.

Заметим, что неравенство (4) выполнено для правой части g_λ . Поэтому

$$\frac{\langle x(t), x'(t) \rangle}{|x(t)|^2 + 1} \leq \beta(t)$$

почти всюду на отрезке $[0, T]$. Интегрируя это неравенство, получаем оценки

$$\log \frac{|x(T)|^2 + 1}{|x(\mu)|^2 + 1} \leq 2\|\beta\|_{L_1}, \quad \log \frac{|x(\nu)|^2 + 1}{|x(0)|^2 + 1} \leq 2\|\beta\|_{L_1},$$

где

$$\|\beta\|_{L_1} = \int_0^T \beta(t) dt.$$

Так как $x(0) = x(T)$, то

$$|x(\nu)|^2 + 1 \leq (|x(\mu)|^2 + 1) \exp(4\|\beta\|_{L_1}), \quad \|x\| \leq (A^2 + 1)^{1/2} \exp(2\|\beta\|_{L_1}).$$

Положим $M = (A^2 + 1)^{1/2} \exp(2\|\beta\|_{L_1})$. Тем самым, существование такой постоянной M , что неравенство (7) справедливо для $x \in Z_\lambda$ и $\lambda \in [0, T]$, доказано.

Наконец, для уравнения $x' = -\alpha(t)x$ и краевых условий (2) отображение *сдвига* выписывается явно:

$$f(x) = x(0) \left(\exp \left(- \int_0^T \alpha(t) dt \right) - 1 \right).$$

Нам достаточно вычислить степень отображения $\Psi = f \cdot \gamma^{-1}$ множества $\gamma(X \cap \partial W)$, где W — подмножество функций из $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих неравенству $\|x\| < M$, а $\gamma: X^+(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, ставящее в соответствие максимально продолженному вправо решению $x \in X^+$ с $\inf \pi(x) = 0$ его значение $x(0)$ в начальной точке. Отображение Ψ тождественное, умноженное на отрицательную постоянную $\exp(-\int_0^T \alpha(t) dt) - 1$, поэтому его степень равна $(-1)^n$.

По теореме 1 для любого $\lambda \in [0, T)$ существует функция $z \in W \cap Z_\lambda$ такая, что $f(z) = \vec{0}$, т.е. $z(0) = z(T)$. Поскольку последовательность пространств $\{Z_{T-1/k} : k = k_0, k_0 + 1, \dots\}$ сходится к пространству $Z_T = Z$, из последовательности периодических функций, существующих, как показано выше, в каждом из пространств $Z_{T-1/k}$, равномерно ограниченной постоянной $M = (A^2 + 1)^{1/2} \exp(2\|\beta\|_{L_1})$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к искомому периодическому решению периода T из пространства Z . Теорема доказана.

Еще один вариант условий, обеспечивающих существование периодического решения, рассмотрен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство Z решений дифференциального включения (1) принадлежит классу $R_{сех}(U)$. Пусть, кроме того, существует такая постоянная $A > 0$, что

$$\limsup_{(t,x) \rightarrow (\tau,\xi)} \langle x, g(t, x) \rangle \leq 0 \quad (8)$$

при всех $\tau \in [0, T]$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|\xi| \geq A$. Тогда задача (1), (2) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим пространства Z_λ при $\lambda \in (a, b)$ формулой $Z_\lambda = Z *_\lambda X$, где X — пространство решений уравнения $x' = -x$. Возьмем произвольно периодическую с периодом T функцию $x \in Z_\lambda$ при некотором $\lambda \in [0, T)$ и докажем существование такой постоянной $M > 0$, не зависящей от функции x , что справедливо неравенство (7).

Функция x удовлетворяет дифференциальному включению $x' \in g_\lambda(t, x)$, где

$$g_\lambda(t, x) = \begin{cases} g(t, x), & a < t < \lambda, \\ \{-x\}, & \lambda \leq t < b. \end{cases}$$

Рассмотрим скалярную функцию $\sigma(t) = |x(t)|^2/2$. Поскольку неравенство (8) остается справедливым для правой части g_λ , то при почти всех $t \in [0, T]$ таких, что $|x(t)| > A$, выполнено неравенство $\sigma'(t) \leq 0$. Следовательно, график функции x не выходит из множества $U_A = \{(t, x) \in U : |x| \leq A\}$. Действительно, иначе нашлись бы $\theta \in [0, T)$ и $\delta > 0$ такие, что $|x(\theta)| = A$ и $|x(t)| > A$ при всех $t \in (\theta, \theta + \delta)$. Но тогда $\sigma'(t) \leq 0$ почти всюду на интервале $(\theta, \theta + \delta)$, противоречие.

Итак, для функции x , удовлетворяющей условию $\|x\| > A$, имеются две возможности. В первом случае график функции x целиком лежит вне множества U_A . Отсюда, а также из неравенства (8) получаем, что

$$\langle x(t), x'(t) \rangle \leq 0$$

при почти всех $t \in [0, \lambda]$ и

$$\langle x(t), x'(t) \rangle = -|x(t)|^2 < 0$$

при почти всех $t \in [\lambda, T]$. Интегрируя данные неравенства, получаем, что

$$\int_0^T \langle x(t), x'(t) \rangle dt < 0$$

при $\lambda \neq T$, что противоречит периодичности x . Во втором случае функция x удовлетворяет неравенствам $|x(0)| > A$, $|x(T)| \leq A$ и также не является периодичной. Полученное противоречие означает, что неравенство (7) выполнено при $M = A + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно.

Отличие от нуля степени сдвига f_0 множества $Z_0 \cap \partial W$, где $W = \{x \in C([0, T], \mathbb{R}^n) : \|x\| < M\}$, показано в доказательстве предыдущей теоремы. По теореме 1 для любого $\lambda \in [0, T]$ в пространстве Z_λ существует периодическая функция x_λ периода T . Вследствие сходимости последовательности пространств $\{Z_{T-1/k} : k = k_0, k_0 + 1, \dots\}$ к пространству $Z_T = Z$ из последовательности функций $\{x_{T-1/k} : k = k_0, k_0 + 1, \dots\}$, равномерно ограниченной постоянной $M = A + \varepsilon$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к искомому периодическому решению периода T из пространства Z . Теорема доказана.

Следствием теоремы 3 для уравнений с непрерывной правой частью является утверждение 7.2 в [8]. Отметим, что в нашем доказательстве не использовалось никаких предположений об ограниченности скалярного произведения $\langle x, g(t, x) \rangle$ на множестве $\{(t, x) \in U : |x| < A\}$.

Заметим также, что теоремы 2 и 3 остаются справедливыми при одновременной смене знаков в неравенствах (3)–(6) (соответственно в неравенстве (8)) с заменой при этом нижнего предела верхним, точной верхней грани точной нижней гранью, и наоборот.

ПРИМЕР 1. Пусть V – открытое подмножество области U , множество $E = U \setminus V$ не более чем счетно, функция $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна и для некоторого $A > 0$ удовлетворяет условию $\langle x, g(t, x) \rangle \leq 0$ при всех $t \in [0, T]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| \geq A$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = g(t, x).$$

Пусть $Z = D(g)$ – пространство его решений.

Пространство $Z_V = \{z \in Z : \text{Gr}(z) \subseteq V\}$ решений дифференциального уравнения с непрерывной правой частью принадлежит классу $R_{ceh}(V)$ (см. [5], [4]). Множество E не более чем счетно относительно пространства Z (см. [5, § 6.4]), отсюда по теореме 6.6.6 из [5] с учетом следствия теоремы 6.3.1 из [5] получаем, что $Z \in R_c(U)$.

Выполнение условий (e) и (h) проверяется с использованием того факта, что множество $R_{ceh}(U)$ замкнуто в топологическом пространстве $R_c(U)$ (см. [2], [4]). Для каждого $j = 1, 2, \dots$ определим функцию $p_j : U \rightarrow [0, +\infty)$ формулой

$$p_j(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho(u, E) \leq \frac{1}{j}, \\ j \rho(u, E) - 1 & \text{при } \frac{1}{j} < \rho(u, E) < \frac{2}{j}, \\ 1 & \text{при } \rho(u, E) \geq \frac{2}{j}, \end{cases}$$

для $u = (t, x) \in U$, где $\rho(u, E)$ обозначает расстояние от точки u до замкнутого множества E . Функции $g_j(t, x) = p_j(t, x)g(t, x)$ непрерывны, следовательно, пространства $Z_j = D(g_j)$ принадлежат классу $R_{ceh}(U)$. Сходимость последовательности пространств $\{(Z_j)_V : j = 1, 2, \dots\}$ к пространству Z_V очевидна. Отсюда и из теоремы 6.6.2 в [5] вытекает сходимость последовательности пространств $\{Z_j : j = 1, 2, \dots\}$ к пространству Z (во всей области U). Следовательно, по теореме 6.2.1 из [5] $Z \in R_{ce}(U)$, а по утверждению 2.2 из [4] $Z \in R_h(U)$.

Таким образом, по теореме 3 рассматриваемое уравнение имеет периодическое решение периода T .

В данном примере правая часть уравнения может иметь разрывы и по пространственным переменным. В таком случае условия Каратеодори не будут выполнены и классические результаты (например, теорему 7.1 в [8]) нельзя будет применить.

ПРИМЕР 2. Пусть $U = (a, b) \times \mathbb{R}$ или, иными словами, $n = 1$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(x) + h(t, x),$$

где функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и ограничена при всех $x \in \mathbb{R}$ сверху и снизу положительными постоянными c_1 и c_2 , а функция $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори: при почти всех $t \in (a, b)$ функция $h(t, \cdot)$ аргумента x непрерывна, при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $h(\cdot, x)$ аргумента t измерима и существует такая интегрируемая по Лебегу неотрицательная функция $H(t)$, что $|h(t, x)| \leq H(t)$ для каждого $x \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \in (a, b)$. Потребуем также, чтобы для некоторого $A > 0$ при всех $\tau \in (a, b)$ и $\xi \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|\xi| \geq A$, было выполнено условие (8).

Условия (c), (e) и (h) носят локальный характер, т.е. их достаточно проверить в какой-нибудь окрестности произвольной точки $(t_0, x_0) \in U$. Для условия (e) это очевидно, для условия (c) следует из следствия теоремы 6.6.4 в [5], а для условия (h) – из утверждения 2.3 в [4].

Пусть окрестность V точки (t_0, x_0) имеет вид $(a, b) \times (x_1, x_2)$. По теореме Егорова (см. [7, §1.9]) для любых $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ найдется замкнутое подмножество H такое, что $\mu((x_1, x_2) \setminus H) < \eta\varepsilon$ и функция f непрерывна на множестве H . Определим при произвольном $\eta > 0$ функцию $f_\eta: (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. На множестве H полагаем $f_\eta \equiv f$. Если же $x_0 \notin H$, пусть J – компонента связности множества $(x_1, x_2) \setminus H$, содержащая точку x_0 . Если $J = (x_1, \xi_2)$, полагаем $f_\eta(x_0) = f(\xi_2)$, аналогично, если $J = (\xi_1, x_2)$, полагаем $f_\eta(x_0) = f(\xi_1)$. Если же $J = (\xi_1, \xi_2)$, $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$, то однозначно определено число $\nu \in (0, 1)$ такое, что $x_0 = \nu\xi_1 + (1 - \nu)\xi_2$, и полагаем $f_\eta(x_0) = \nu f(\xi_1) + (1 - \nu)f(\xi_2)$. Построенная функция f_η непрерывна на интервале (x_1, x_2) .

Пусть Z_η – пространство решений уравнения $x' = f_\eta(x) + h(t, x)$ в области V . Из теоремы Дэви (см. [5, теорема 7.2.1]) следует, что $Z_\eta \in R_{ceh}(V)$. Согласно утверждению 3.1 из [9] $Z_\eta \rightarrow Z_V$ при $\eta \rightarrow 0$. Следовательно, $Z_V \in R_{ceh}(V)$.

По теореме 3 данное уравнение имеет периодическое решение периода T .

В данном примере правая часть уравнения может иметь разрывы “типа Каратеодори”, но уже по пространственным переменным. В таком случае также не будет возможности применить к данному уравнению классические результаты.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ дифференциальное уравнение

$$x' = \frac{x}{|x|^2} \sin\left(t - \frac{T}{2}\right),$$

полагая правую часть равной нулю при $x = 0$ и всех $t \in [0, T]$, с искомой функцией $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Множество особенностей правой части данного уравнения лежит на графике одного решения $x_0 \equiv 0$. Следовательно, пространство решений Z рассматриваемого уравнения принадлежит классу $R_c(U)$ (см. [10]). После элементарной проверки условий (3)–(6) по теореме 2 получаем существование периодического решения данного уравнения периода T .

Данный пример иллюстрирует ситуацию, когда правая часть дифференциального уравнения удовлетворяет соотношениям (5), (6), однако при этом неравенство (8) не выполнено.

Пусть теперь $U = (a, b) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $a < 0 < T < b$, $\nu \in \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и задана многозначная функция $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, периодичная по первому аргументу с периодом T . Рассмотрим дифференциальное включение второго порядка вида

$$x'' \in \nu x' + g(t, x). \quad (9)$$

Переписав его в виде дифференциального включения первого порядка в пространстве вдвое большего числа измерений, получим *нормальную форму* включения (9):

$$z' \in h(t, z),$$

где $z = (x, y)$ и $h(t, z) = (y, \nu y + g(t, x))$. Рассмотрим задачу нахождения периодического решения включения (9) периода T :

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть пространство Z решений нормальной формы дифференциального включения (9) принадлежит классу $R_{ceh}(U)$. Пусть функция g ограничена на компактных подмножествах области U , $A > 0$ и

$$\liminf_{(t, x) \rightarrow (\tau, \xi)} \langle x, g(t, x) \rangle > 0 \quad (11)$$

при всех $\tau \in [0, T]$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|\xi| \geq A$. Тогда задача (9), (10) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в качестве пространства X пространство решений нормальной формы уравнения $x'' = \nu x' + x$. Определим при $\lambda \in (a, b)$ пространства Z_λ формулой $Z_\lambda = Z *_\lambda X$, как сделано выше в доказательстве теоремы 2, и воспользуемся принципом продолжения по параметру.

Для этого возьмем произвольно $\lambda \in [0, T]$ и функцию $z = (x, x') \in Z_\lambda$ такую, что $z(0) = z(T)$, и докажем, что существуют такие постоянные $M_0, M_1 > 0$, не зависящие от функции z , что справедливы неравенства

$$\|x\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)| < M_0, \quad \|x'\| = \max_{t \in [0, T]} |x'(t)| < M_1. \quad (12)$$

Функция x удовлетворяет дифференциальному включению

$$x'' \in \nu x' + g_\lambda(t, x), \quad (13)$$

где

$$g_\lambda(t, x) = \begin{cases} g(t, x), & a < t < \lambda, \\ \{x\}, & \lambda \leq t < b. \end{cases}$$

Докажем, что первое из неравенств (12) выполняется для $M_0 = A$. Предположим противное, пусть максимум модуля функции x достигается в точке $t_0 \in [0, T]$ и $|x(t_0)| \geq A$. В силу периодичности функций x и x' справедливо равенство $\langle x(t_0), x'(t_0) \rangle = 0$, даже если t_0 находится на границе отрезка $[0, T]$. Поскольку функция x удовлетворяет почти всюду на $[0, T]$ дифференциальному включению (13), при почти всех $t \in [0, T]$ выполнено включение

$$\langle x(t), x''(t) \rangle \in \nu \langle x(t), x'(t) \rangle + \langle x(t), g_\lambda(t, x(t)) \rangle.$$

Далее, так как скалярное произведение $\langle x(t), x'(t) \rangle$ обращается в нуль в точке t_0 , а функция g_λ удовлетворяет неравенству (11), то почти всюду в некоторой окрестности точки t_0 скалярное произведение $\langle x(t), x''(t) \rangle$ положительно, что противоречит тому, что в точке t_0 функция $|x|$ имеет локальный максимум. Следовательно, $|x(t_0)| < A$.

Далее, имеют место неравенства

$$|x''(t)|^2 \leq \nu \langle x'(t), x''(t) \rangle + G|x''(t)|$$

при почти всех $t \in [0, \lambda]$, при этом

$$G = \sup_{t \in [0, T], |x| \leq M_0} |g(t, x)| < \infty,$$

а также

$$|x''(t)|^2 \leq \nu \langle x'(t), x''(t) \rangle + M_0|x''(t)|$$

при почти всех $t \in [\lambda, T]$.

Интегрируя данные неравенства, заметим, что интеграл по отрезку $[0, T]$ первого слагаемого в правой части обоих неравенств равен нулю, поскольку $x'(T) = x'(0)$. Используя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$\int_0^T |x''(t)|^2 dt \leq G \left(\int_0^T |x''(t)|^2 dt \right)^{1/2} + M_0 \left(\int_0^T |x''(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^T |x''(t)|^2 dt \leq (G + M_0)^2.$$

Для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$

$$\int_{t_1}^{t_2} x''(t) dt = x'(t_2) - x'(t_1).$$

С другой стороны, снова используя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x''(t) dt \right| \leq |t_2 - t_1|^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} |x''(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq T^{1/2} (G + M_0). \quad (14)$$

Для периодической функции x по теореме о среднем $\vec{0}$ принадлежит *замкнутой выпуклой оболочке* $\text{сс}\{x'(t) : t \in [0, T]\}$. Следовательно, для произвольного $t \in [0, T]$ имеет место неравенство $|x'(t)| \leq T^{1/2}(G + M_0) = M_1$. Действительно, предположим противное, т.е. что найдется такая точка y_0 в множестве $Y = \{x'(t) : t \in [0, T]\}$, что $|y_0| > M_1$. Но тогда в силу неравенства (14) множество Y целиком лежит по одну сторону от гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, проходящей через начало координат и ортогональной вектору y_0 , что противоречит включению $\vec{0} \in \text{сс } Y$. Второе из неравенств (12) также обосновано.

Отображение *сдвига* для задачи (10) задается формулой

$$f(z) = (x(T) - x(0), x'(T) - x'(0)),$$

где $z = (x, x')$. Посчитаем степень такого отображения для пространства решений дифференциального уравнения $x'' = \nu x' + x$. Его решения задаются формулой

$$x(t) = A \exp(\lambda_1 t) + B \exp(\lambda_2 t),$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{\nu \mp \sqrt{\nu^2 + 4}}{2}$$

(корни характеристического уравнения). Отождествляя каждое максимально продолженное вправо решение $z = (x, x') \in X^+$, начинающееся в точке $t = 0$, с парой n -мерных векторов A, B , получаем для отображения сдвига $\Psi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ явную формулу

$$\Psi(A, B) = (A(\exp(\lambda_1 T) - 1) + B(\exp(\lambda_2 T) - 1), A\lambda_1(\exp(\lambda_1 T) - 1) + B\lambda_2(\exp(\lambda_2 T) - 1)).$$

Это отображение линейное, и его степень равна знаку определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T} - 1 & & & e^{\lambda_2 T} - 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & e^{\lambda_1 T} - 1 & & & e^{\lambda_2 T} - 1 \\ \hline \lambda_1(e^{\lambda_1 T} - 1) & & & \lambda_2(e^{\lambda_2 T} - 1) & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \lambda_1(e^{\lambda_1 T} - 1) & & & \lambda_2(e^{\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix}$$

(см. [11, § 78]). Для вычисления определителя выполним элементарные преобразования: при $i = 1, \dots, n$ к $(n+i)$ -й строке прибавим i -ю, умноженную на $-\lambda_1$; получим матрицу с блоком нулей. Теперь ясно, что искомым определитель равен

$$(\exp(\lambda_1 T) - 1)^n (\exp(\lambda_2 T) - 1)^n (\lambda_2 - \lambda_1)^n.$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$, искомая степень сдвига равна $(-1)^n$ и, тем самым, отлична от нуля.

По теореме 1 существует периодическое решение включения (9) периода T . Теорема доказана.

Примеры, аналогичные приведенным выше примерам 1 и 2, строятся и для уравнения второго порядка вида (9).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Филиппов В. В. Что лучше в теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, метод Лерэ–Шаудера или сдвиг вдоль траекторий? // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. №8. С. 1049–1061.
- [2] Филиппов В. В. О гомологических свойствах множеств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. №6. С. 139–160.
- [3] Филиппов В. В. О теореме Ароншайна // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №1. С. 75–79.
- [4] Филиппов В. В. О существовании периодических решений // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №5. С. 769–784.
- [5] Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.
- [6] Filippov V. V. Basic Topological Structures of Ordinary Differential Equations. Dordrecht: Kluwer, 1998.
- [7] Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
- [8] Granas A., Guenther R. B., Lee J. W. Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems // J. Math. Pures Appl. 1991. V. 70. №2. P. 153–196.
- [9] Филиппов В. В. О теории задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1994. Т. 185. №11. С. 95–118.
- [10] Филиппов В. В. Замечание о непрерывности зависимости решений дифференциального включения $y' \in F(t, y)$ от правой части // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1995. №3. С. 16–21.
- [11] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.–Л.: ГОНТИ, 1937.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: azuyev@rambler.ru

Поступило
23.12.2004