Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Кузьмин, Вложение Магнуса как частный случай одной гомологической конструкции, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 571–576

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 09:04:58

УДК 512

ВЛОЖЕНИЕ МАГНУСА КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ОДНОЙ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Ю. В. Кузьмин

Пусть E – расширение групп с абелевым ядром. Тогда ему можно сопоставить некоторое расширение E' модулей над групповым кольцом факторгруппы. В качестве следствия возникает вложение исходного расширения в некоторое расщепляющееся расширение. Мы доказываем, что известное вложение Магнуса является частным случаем этой общей конструкции.

Библиография: 9 названий.

1. Введение

Говорят, что для математика нет ничего приятнее, чем понять, что две, казалось бы, разные вещи – это на самом деле близкие родственники. Цель этой заметки – установить связь между двумя хорошо известными конструкциями и показать, что одна из них является частным случаем другой.

Итак, более подробно. Рассмотрим расширение групп

$$E: 1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 1 \quad (1)$$

с абелевым ядром A . Сопряжение индуцирует на A структуру модуля над групповым кольцом $\mathbb{Z}B$ (мы будем рассматривать правые модули). Расширению E можно сопоставить некоторое расширение $\mathbb{Z}B$ -модулей

$$E': 0 \rightarrow A \rightarrow P_G \rightarrow \Delta_B \rightarrow 0, \quad (2)$$

где Δ_B – фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}B$, а модуль P_G зависит от расширения E . Именно, P_G – наибольший фактормодуль фундаментального идеала Δ_G , на котором подгруппа A действует тривиально. Другими словами, чтобы получить P_G из Δ_G , надо профакторизовать по идеалу, порожденному произведениями $(g-1)(a-1)$, где $g \in G$, $a \in A$. При вложении $A \rightarrow P_G$ элемент a переходит в смежный класс элемента $a-1$. Конечно, необходимо доказать, что при этом действительно получается вложение. Соответствие $E \rightarrow E'$ позволяет заменить изучение расширений групп изучением расширений модулей. В той или иной форме оно присутствует во всех книгах, имеющих дело с гомологиями групп (см., например, [1, гл. 14, § 4] или [2, гл. 4, § 6]). В разделе 1 мы приведем описание этого соответствия в той форме, которая удобна для наших целей.

Рассмотрим далее полупрямое произведение $W_G = BP_G$. Существует естественное вложение $\mu: G \rightarrow W_G$, при котором элемент g переходит в произведение bs , где b – образ g в B , а s – образ элемента $g - 1 \in \Delta_G$ в модуле P_G . Очевидно, отображение μ индуцирует тождественное отображение на ядре A и в факторгруппе B . Указанное вложение приведено в книге Цассенхауза [3]. Мы докажем, что оно обладает следующим универсальным свойством. Пусть задано некоторое полупрямое произведение $V = BC$, где C – абелева группа, и пусть задан гомоморфизм $\nu: G \rightarrow V$, который индуцирует тождественное отображение на факторгруппе B . Тогда существует единственный гомоморфизм $\varphi: W_G \rightarrow V$ такой, что $\varphi\mu = \nu$, т.е. соответствующая диаграмма коммутативна. Учитывая это универсальное свойство, мы будем называть вложение μ *свободным расщеплением расширения* (1). Эта конструкция разобрана в разделе 1.

Пусть теперь B – произвольная группа, заданная как факторгруппа свободной: $B = F/N$. Группу $\Phi = F/N'$, где $N' = [N, N]$ – коммутант, называют *свободным абелевым расширением* группы B , а нормальную подгруппу $M = N/N' \subseteq \Phi$ – *модулем соотношений группы B* . По определению имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow M \rightarrow \Phi \rightarrow B \rightarrow 1. \quad (3)$$

Это расширение обладает следующим универсальным свойством. Пусть x_α – свободные образующие группы F и y_α – их образы в группе Φ . Если (1) – произвольное расширение группы B с абелевым ядром, то для любых элементов $g_\alpha \in G$ таких, что образы y_α и g_α в группе B совпадают, отображение $y_\alpha \rightarrow g_\alpha$ продолжается до гомоморфизма $\Phi \rightarrow G$ (см. раздел 2). Элементы y_α естественно называть *свободными образующими расширения* (3). Мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Для свободного абелева расширения Φ соответствующий $\mathbb{Z}B$ -модуль P_Φ является свободным. В качестве его свободных образующих можно взять образы в P_Φ элементов $y_\alpha - 1 \in \Delta_\Phi$.*

Доказательство носит категорный характер. Оно состоит в непосредственном применении универсальных свойств свободного расщепления и свободного абелева расширения. Подробности приводятся в разделе 2. Сопоставляя эту теорему с вложением Цассенхауза, как частный случай получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть Φ – свободное абелево расширение группы B со свободными образующими y_α . Обозначим z_α их образы в группе B , и пусть P – свободный $\mathbb{Z}B$ -модуль со свободными образующими e_α (в том же количестве, что и у расширения). Пусть, наконец, $W = BP$ – полупрямое произведение, построенное с помощью модуля P . Тогда*

- (i) *отображение $y_\alpha \rightarrow z_\alpha e_\alpha$ продолжается до вложения $\nu: \Phi \rightarrow W$;*
- (ii) *ядро M свободного абелева расширения можно включить в точную последовательность*

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow \Delta_B \rightarrow 0, \quad (4)$$

где вложение $M \rightarrow P$ получается как ограничение ν на нормальную подгруппу M , а при эпиморфизме $P \rightarrow \Delta_G$ образующие e_α переходят в $z_\alpha - 1$.

Утверждение (i) следует из теоремы, так как ν с точностью до изоморфизма совпадает со свободным расщеплением, а (ii) получается как частный случай последовательности (2).

Отображение ν — это вложение Магнуса. Самое короткое доказательство утверждения (i) принадлежит Шмелькину [4]. Утверждение (ii) было независимо доказано Блекберном [5], а также Ремесленниковым и Соколовым [6]. Оно дает критерий принадлежности элемента модуля P образу $\nu(M)$. Очевидно, его можно переписать в виде

$$\sum e_\alpha r_\alpha \in \nu(M) \iff \sum (z_\alpha - 1)r_\alpha = 0.$$

Наш подход к доказательству утверждений (i) и (ii) показывает, что они являются частными случаями более общих конструкций, которые описаны в монографиях, где вложение Магнуса даже не упоминается.

Дальнейшее посвящено доказательству сформулированных утверждений. Мы также обсудим, как, пользуясь точной последовательностью (4), можно получать информацию гомологического характера о группе B и ее модуле соотношений M .

2. Соответствие между расширениями групп и модулей и свободное расщепление

2.1. Точность последовательности (3). Будем пользоваться обозначениями введения. Кроме того, пусть Δ_A — идеал кольца $\mathbb{Z}G$, порожденный элементами вида $a - 1$, где $a \in A$. Тогда $P_G = \Delta_G / \Delta_G \Delta_A$ и, очевидно, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \Delta_A / \Delta_G \Delta_A \rightarrow P_G \rightarrow \Delta_B \rightarrow 0.$$

По этой причине для доказательства точности последовательности (2) нам достаточно проверить, что отображение $\mu: A \rightarrow \Delta_A / \Delta_G \Delta_A$, определенное равенством $\mu(a) = (a - 1) + \Delta_G \Delta_A$, — изоморфизм B -модулей. Если $a_1, a_2 \in A$, то $\mu(a_1 a_2) = a_1 a_2 - 1$ и

$$a_1 a_2 - 1 = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_1 - 1)(a_2 - 1) = (a_1 - 1) + (a_2 - 1) \bmod \Delta_G \Delta_A,$$

т.е. μ — гомоморфизм абелевых групп. Если $a \in A, g \in G$, то

$$g^{-1} a g - 1 = g^{-1} (a - 1) g = (a - 1) g + (g^{-1} - 1)(a - 1) g = (a - 1) g \bmod \Delta_G \Delta_A,$$

т.е. μ — гомоморфизм B -модулей. Любой элемент $r \in \Delta_A$ имеет вид $r = \sum (a_i - 1) g_i$, но из двух предыдущих равенств следует, что по модулю $\Delta_G \Delta_A$ $r = a - 1$, где $a = \prod g^{-1} a_i g$, поэтому μ — эпиморфизм. Чтобы доказать, что μ — изоморфизм, мы построим обратное отображение. Для этого выберем в каждом смежном классе gA по представителю $\bar{g} \in G$, считая, что представителем в A выбрана 1. Любой элемент $g \in G$ можно однозначно представить в виде $g = \bar{g} a_g$, где $a_g \in A$. Так как элементы $g - 1$ линейно

независимы в Δ_G , то отображение $g - 1 \rightarrow a_g$ продолжается до гомоморфизма абелевых групп $\mu': \Delta_G \rightarrow A$, причем $\mu'(a - 1) = a$. Легко проверить, что $\Delta_G \Delta_A \subseteq \text{Ker } \mu'$. Действительно,

$$(g - 1)(a - 1) = (ga - 1) - (g - 1) - (a - 1) \xrightarrow{\mu'} (a_g a) a_g^{-1} a^{-1} = 1.$$

Таким образом, μ' индуцирует гомоморфизм $\mu'': \Delta_A / \Delta_G \Delta_A \rightarrow A$. Так как $\mu'(a - 1) = a$, то μ и μ'' взаимно обратны.

Итак, имея расширение групп (1), т.е. некоторый элемент E второй группы когомологий $H^2(B, A)$, мы построили расширение модулей (2), т.е. элемент группы $\text{Ext}_{\mathbb{Z}B}(\Delta_B, A)$. Несложные дополнительные рассуждения позволяют доказать, что соответствие $E \rightarrow E'$ определяет изоморфизм этих групп. Мы не будем останавливаться на подробностях, так как этот факт нам не понадобится.

2.2. Свободное расщепление. Напомним, что мы обозначили через W_G полупрямое произведение модуля P_G и группы B . Чтобы записать аддитивную группу модуля P_G мультипликативно, используем экспоненциальное обозначение e^c , $c \in P_G$. Если элемент c имеет вид $c = (g - 1) + \Delta_G \Delta_A$, где $g \in G$, то будем для краткости писать просто e^{g-1} . Пусть $\pi: G \rightarrow B$ — естественный эпиморфизм. Во введении мы определили отображение $\mu: G \rightarrow W_G$, которое в выбранных теперь обозначениях имеет вид $\mu(g) = b e^{g-1}$, где $b = \pi(g)$. Проверим, что это отображение действительно является мономорфизмом. Пусть $\pi(g_1) = b_1$, $\pi(g_2) = b_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(g_1)\mu(g_2) &= b_1 e^{g_1-1} b_2 e^{g_2-1} = b_1 b_2 e^{(g_1-1)g_2 + (g_2-1)} \\ &= b_1 b_2 e^{g_1 g_2 - 1} = \mu(g_1 g_2), \end{aligned}$$

т.е. μ — гомоморфизм. Очевидно, что $\text{Ker } \mu \subseteq A$, но если $a \in A$, то $\mu(a) = e^{a-1}$, поэтому из точности последовательности (2) следует, что $\text{Ker } \mu = 1$.

Проверим универсальное свойство отображения μ . Пусть $V = BC$ — некоторое полупрямое произведение и $\nu: G \rightarrow V$ — гомоморфизм такой, что $\nu(g) = \pi(g) \bmod C$. Покажем, что существует единственный гомоморфизм $\varphi: W_G \rightarrow V$ такой, что $\varphi\mu = \nu$. Пусть $g \in G$, $b = \pi(g)$. Тогда $\nu(g) = b c_g$, где $c_g \in C$. Если гомоморфизм φ существует, то $\varphi(b e^{g-1}) = \varphi(\mu(g)) = \nu(g) = b c_g$. С другой стороны, $\varphi(b e^{g-1}) = b \varphi(e^{g-1})$, поэтому $\varphi(e^{g-1}) = c_g = b^{-1} \nu(g)$. Отсюда следует единственность гомоморфизма φ . Теперь понятно, как доказать и существование. Положим по определению $\varphi(e^{g-1}) = b^{-1} \nu(g)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что тем самым мы получим гомоморфизм модулей $P_G \rightarrow C$. Считая, что φ действует тождественно на B , получим нужное отображение $\varphi: W_G \rightarrow V$.

3. Свободное абелево расширение и вложение Магнуса

Используем обозначение (3) для свободного абелева расширения. Напомним, что группа B представлена как факторгруппа свободной группы F со свободными образующими x_α , а их образы в группах Φ и B обозначены соответственно y_α и z_α . Если задано произвольное расширение (1) группы B и некоторые элементы $g_\alpha \in G$, то отображение $x_\alpha \rightarrow g_\alpha$ продолжается до гомоморфизма $f: F \rightarrow G$. Пусть образы элементов g_α

в B равны z_α . Тогда гомоморфизм f индуцирует тождественное отображение на факторгруппе $B = F/N = G/A$ и, следовательно, $f(N) \subseteq A$. Так как группа A абелева, то $N' \subseteq \text{Ker } f$, поэтому имеется индуцированный гомоморфизм $F/N' = \Phi \rightarrow G$, что доказывает универсальное свойство свободного абелева расширения. Используя его, докажем теорему, сформулированную во введении.

Рассмотрим свободное расщепление $\mu: \Phi \rightarrow BP_\Phi$. По определению $\mu(y_\alpha) = z_\alpha c_\alpha$, где c_α — образ элемента $y_\alpha - 1 \in \Delta_\Phi$ в модуле P_Φ . С другой стороны, так как Φ — свободное абелево расширение, то для любого $\mathbb{Z}B$ -модуля P и его элементов e_α существует гомоморфизм $\nu: \Phi \rightarrow BP$ такой, что $\nu(y_\alpha) = z_\alpha e_\alpha$. В частности, это верно, если P — свободный модуль со свободными образующими e_α . Далее, по универсальному свойству свободного расщепления существует гомоморфизм $\varphi: BP_\Phi \rightarrow BP$ (тождественный на подгруппе B) такой, что $\varphi\mu = \nu$. Тогда элементы c_α переходят при отображении φ в свободные образующие e_α . Отсюда, очевидно, следует, что P_Φ — свободный модуль со свободными образующими c_α . Тем самым, теорема и ее следствие доказаны.

В заключение приведем несколько результатов гомологического характера, которые могут быть получены с помощью утверждений (i) и (ii) следствия.

3.1. Теорема редукции Маклейна. Сращивая точную последовательность (4) с последовательностью

$$0 \rightarrow \Delta_B \rightarrow \mathbb{Z}B \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

построим точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow \mathbb{Z}B \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

в которой два средних модуля свободны. Как хорошо известно, тогда группы гомологий с коэффициентами в крайних (ненулевых) модулях получают друг из друга сдвигом размерности на 2, поэтому справедлива следующая формула: при $n > 2$

$$H_n(B, \mathbb{Z}) \cong H_{n-2}(B, M).$$

3.2. Формула Хопфа. При $n = 2$ сдвиг в предыдущей формуле происходит в размерность 0 и принимает вид

$$H_2(B, \mathbb{Z}) \cong \text{Ker}(M \otimes_{\mathbb{Z}B} \mathbb{Z} \rightarrow P \otimes_{\mathbb{Z}B} \mathbb{Z}).$$

Очевидно, что $P \otimes_{\mathbb{Z}B} \mathbb{Z} \cong F/F'$ (при изоморфизме $e_\alpha \rightarrow x_\alpha$), а так как $M = N/N'$, то тривиализация модуля M дает $N/[N, F]$. Следовательно,

$$H_2(B, \mathbb{Z}) \cong \text{Ker}(N/[N, F] \rightarrow F/F') = N \cap F'/[N, F].$$

Это классическая формула, дающая интерпретацию второй группы гомологий.

3.3. Свободная резольвента для групп с одним соотношением. Если группа B может быть задана одним соотношением, то модуль M порождается одним элементом — образом этого соотношения. Как доказал Линдон [7], если соотношение не является степенью, то модуль M свободный циклический. Это означает, что имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}B \rightarrow P \rightarrow \mathbb{Z}B \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

которая является свободной резольventой тривиального $\mathbb{Z}B$ -модуля $\mathbb{Z}$. В частности, группа B имеет гомологическую размерность 2.

3.4. Гомологии групп вида F/N' . С помощью вложения Магнуса и техники спектральных последовательностей можно изучить целочисленные гомологии групп Φ вида F/N' . Мы не будем приводить результаты и обсуждать способы их получения. Это увело бы слишком далеко от основной темы заметки. Сошлемся лишь на две работы [8], [9] (полный список содержит около двадцати наименований).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [2] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.
- [3] Zassenhaus H. The Theory of Groups. New York, 1958.
- [4] Шмелькин А. Л. Замечание к работе Шмелькина “Сплетения и многообразия групп” // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. С. 443–444.
- [5] Blackburn N. Note on a theorem of Magnus // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. P. 469–474.
- [6] Ремесленников В. Н., Соколов И. Г. Некоторые свойства вложения Магнуса // Алгебра и логика. 1960. Т. 9. С. 566–578.
- [7] Lyndon R. Cohomology theory of groups with a single defining relation // Ann. of Math. 1950. V. 52. P. 650–665.
- [8] Kuzmin Yu. Homology theory of free Abelianized extensions // Comm. Algebra. 1988. V. 16. P. 2447–2533.
- [9] Ковач Л. Г., Кузьмин Ю. В., Штер Р. Гомология свободных абелевых расширений групп // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 4. С. 526–542.