Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Лексин, Метод Лаппо–Данилевского и тривиальность пересечения радикалов членов нижнего центрального ряда некоторых фундаментальных групп, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 577–580

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:05:10

УДК 512.54

МЕТОД ЛАППО–ДАНИЛЕВСКОГО И ТРИВИАЛЬНОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ РАДИКАЛОВ ЧЛЕНОВ НИЖНЕГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДА НЕКОТОРЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП

В. П. Лексин

В работе доказано, что пересечение радикалов нильпотентных вычетов обобщенных групп крашенных кос, отвечающих всем неприводимым конечным группам Коксетера и неприводимым импримитивным конечным комплексным группам отражений, всегда есть тривиальная группа. Доказательство использует разрешимость методом Лаппо–Данилевского проблемы Римана–Гильберта для аналитических семейств точных линейных представлений. Определяются также обобщенные представления Бурау обобщенных групп кос, отвечающих конечным комплексным группам отражений, у которых граф Дынкина–Коэна есть дерево. Дано описание фуксовых связностей, для которых представление монодромии эквивалентно ограничению обобщенного представления Бурау на группу крашенных кос. Ставится вопрос о точности обобщенных представлений Бурау и их ограничений на группы крашенных кос.

Библиография: 8 названий.

В работе [1] был обоснован многомерный метод Лаппо–Данилевского для фуксовых систем на комплексных линейных пространствах $\mathbb{C}^n$ или комплексных проективных пространствах $\mathbb{C}P^n$ и с логарифмическими полюсами на конечных конфигурациях гиперплоскостей $\mathcal{H} = \bigcup_{i=1}^N H_i$. Условия интегрируемости Фробениуса фуксовых систем прямо выводятся из коммутационных соотношений на матрицы монодромии, которые являются следствием коммутационных соотношений для образующих в фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}, z_0)$ дополнения $\mathbb{C}^n$ к дивизору особенностей.

Этот метод был применен для решения многомерной проблемы Римана–Гильберта для аналитических семейств линейных представлений фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}, z_0)$, равных единичному представлению при нулевых значениях параметра. Следствием разрешимости проблемы Римана–Гильберта для аналитического семейства представлений и описания условий разрешимости проблемы Римана–Гильберта в [2] является утверждение, что ядро естественного гомоморфизма

$$j: \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}, z_0) \rightarrow (\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}, z_0))^\wedge$$

фундаментальной группы в нильпотентное пополнение групповой алгебры всегда содержится в ядре представления из семейства при достаточно малом значении параметра.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы РФ”, грант № НШ-457.2003.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-22000.

Из результатов [3] и [2] следует, что ядро $\text{Ker } j$ содержит пересечение $r_\infty(\pi_1)$ радикалов (радикал подгруппы – это нормальная подгруппа, порожденная элементами группы, некоторая степень которых принадлежит подгруппе) членов нижнего центрального ряда

$$\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_2(G) = [G, G], \quad \dots, \quad \gamma_p(G) = [G, \gamma_{p-1}], \quad \dots$$

фундаментальной группы $G = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{H}, z_0)$.

Самый известный пример однопараметрического аналитического семейства линейных представлений связан с представлением Бурау. Точнее, рассматривается ограничение представления Бурау на группу крашенных кос. Группа крашенных кос P_n , как хорошо известно, изоморфна фундаментальной группе дополнения к объединению диагональных гиперплоскостей $H_{ij} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}$ в комплексном линейном пространстве. С другой стороны, эта конфигурация является конфигурацией зеркал отражения группы Коксетера типа A_{n-1} . В работе определяется обобщение этого аналитического семейства представлений для обобщенных крашенных групп кос, отвечающих конфигурациям зеркал отражения конечных неприводимых комплексных групп отражений. От комплексной группы отражений только требуется, чтобы граф Дынкина–Коэна являлся деревом. Такие семейства – это ограничение обобщенного представления Бурау обобщенной группы кос. *Обобщенное представление Бурау, ассоциированное с заданной системой корней R* , определяется как деформация стандартного действия комплексной группы отражений, отвечающей заданной системе корней R . А именно, рассмотрим “матрицу Картана”

$$K = \left((1 - \zeta_m) \frac{(\alpha_k, \alpha_m)}{(\alpha_m, \alpha_m)} \right)_{k, m=1, \dots, n},$$

отвечающую системе “простых корней” $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в R и корням из единицы $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, определяющих порядки соответствующих комплексных отражений

$$s_{\alpha_i}(v) = v - (1 - \zeta_i) \frac{(v, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i.$$

При выбранном наборе простых корней комплексной системе корней можно также сопоставить, к сожалению, не всегда однозначно, граф Дынкина–Коэна, по которому полностью восстанавливается задание образующими и соотношениями соответствующей комплексной группы отражений. В терминах простых корней и матрицы Картана K для R любое порождающее отражение s_{α_j} записывается в следующем виде:

$$s_{\alpha_j}(v) = v - (v^t K \alpha_j^*) \alpha_j,$$

где верхний индекс t обозначает транспонирование вектора-столбца, а верхний индекс $*$ обозначает комплексное сопряжение координат вектор-столбца.

Представим матрицу Картана в виде $K = K^- + K^+$, где матрица K^- является нижнетреугольной с единицами на диагонали, а матрица K^+ – верхнетреугольная с комплексными числами $-\zeta_1, \dots, \zeta_n$ на диагонали. Рассмотрим деформацию K_q матрицы K : $K_q = K^- + qK^+$, где q – комплексный или формальный параметр. Рассмотрим свободный модуль $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}[q, q^{-1}] = \mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n}$ ранга n над кольцом многочленов Лорана $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Будем полагать, что операция сопряжения $*$ включает замену $q^{\pm 1} \rightarrow q^{\mp 1}$. Определим обратимые преобразования модуля $\mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n}$ следующим образом:

$$\rho_B(\sigma_j)(v) = v - (v^t K_q \alpha_j^*) \alpha_j.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для неприводимой комплексной системы корней R , у которой существует граф Дынкина–Коэна, являющийся деревом, преобразования $\rho_B(\sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$, определяют представление обобщенной группы кос $B_n(W(R))$ в группу автоморфизмов свободного модуля $\text{Aut}(\mathbb{C}[q, q^{-1}]^{\oplus n})$.

В следующей теореме используется понятие циклотомической алгебры Гекке, определение которой можно найти в [4]. Алгебра Гекке – это фактор-алгебра групповой алгебры обобщенной группы кос по соотношениям, которые являются деформациями степенных соотношений в соответствующей группе комплексных отражений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимая комплексная система корней и $W(R)$ – соответствующая неприводимая порожденная n отражениями комплексная группа отражений, граф Дынкина–Коэна которой является деревом. Пусть

$$\nabla_R(h) = d - h \sum_{\alpha \in R} \frac{d(z, \alpha)}{(z, \alpha)} \alpha^* \otimes \alpha$$

– фуксова R -связность в тривиальном расслоении на $\mathbb{C}^n$ со слоем $\mathbb{C}^n$, ассоциированная с корневой системой R . Мы положим также, что параметры $q_k = \exp(2\pi i h / p(\alpha_k))$ общего положения, т.е. циклотомическая алгебра Гекке $H_n(q_k)$, $k = 1, \dots, n$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}[W(R)]$. Тогда представление монодромии $\rho_R(h)$ R -связности $\nabla_R(h)$ эквивалентно ограничению обобщенного представления Бурау ρ_B на группу обобщенных крашенных кос со значением параметра $q = \exp(2\pi i h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Связности $\nabla_R(h)$, по-видимому, обладают свойством жесткости. Любые деформации в классе таких связностей (т.е. деформация конфигурации векторов R с сохранением интегрируемости связности $\nabla_R(h)$) с сохранением комбинаторной структуры решетки пересечений гиперплоскостей из дивизора особенностей сохраняют диффеоморфный тип дополнения к дивизору особенностей. Это следует из хорошо известной теоремы Рэндала об изотопии. Действие коэффициентов системы в слое также восстанавливается по линеаризации того же диффеоморфизма, который восстанавливает диффеоморфный тип базы. Таким образом, монодромия деформированной системы будет эквивалентна обобщенному представлению Бурау в силу сформулированной теоремы.

Обычные представления Бурау являются неточными представлениями при $n \geq 5$, для $n = 2, 3$ представление Бурау является точным, а для $n = 4$ ответ неизвестен. Является точным или нет его ограничение на группу крашенных кос, этот вопрос, а также вопрос о точности обобщенных представлений Бурау и их ограничений на обобщенные группы крашенных кос – эти вопросы пока остаются, в общем случае, открытыми. Хотя для неприводимых групп Косетера, действующих в двумерных пространствах, обобщенные представления Бурау обобщенных групп кос являются точными линейными представлениями [5].

Другие аналитические семейства линейных представлений, можно получить из рационального двупараметрического семейства представлений Лоуренс–Краммера для обобщенных групп кос типа A, D, E и соответственно для обобщенных групп крашенных кос (см. [6] и ссылки в этой работе). Эти представления обладают замечательным

свойством: они точные в векторном пространстве над полем рациональных функций от выбранных параметров. Причем при достаточно малых трансцендентных и алгебраически независимых значениях параметров соответствующие представления остаются точными линейными представлениями над $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 3. *Радикал нильпотентных вычетов $r_\infty(\pi_1)$ фундаментальной группы дополнения к набору зеркал отражения любой неприводимой конечной группы Кокстера или к набору зеркал отражения любой конечной комплексной импримитивной группы отражений $G(de, e, n)$, $d, e, n \in \mathbb{N}$, является единичной группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разрешимости проблемы Римана–Гильберта для аналитических семейств представлений при достаточно малых значениях параметров, а следовательно, и для представлений близких к единичному представлению, и утверждения о том, что $r_\infty(\pi_1)$ содержится в ядре соответствующего линейного представления из семейства, а также из точности линейного представления получаем, что $r_\infty(\pi_1) = 1$. Существуют точные представления обобщенных групп кос, отвечающих неприводимым конечным вещественным группам Кокстера, в обобщенные группы кос типа A , D , E (см. [6]) и обобщенных групп кос, отвечающих бесконечной серии конечных импримитивных комплексных групп отражений $G(de, e, n)$, в группы кос Артина B_{n+1} (см. [4]), причем эти представления отображают крашенные косы в крашенные и соответствующие квадраты из гомоморфизмов коммутативны. Эти факты влекут, что радикал $r_\infty(\pi_1)$ нильпотентных вычетов равен единице для комплексных зеркал отражения всех конечных неприводимых групп Кокстера и указанных комплексных групп отражений.

Для конфигураций типа A такой результат доказан Коно [7]. Ранее для конфигураций гиперплоскостей расслоенного типа Фальк и Рэнделл [8] доказали, что пересечение членов нижнего центрального ряда фундаментальной группы дополнения к такой конфигурации, есть единичная группа. Наш результат обобщает эти утверждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лексин В. П. О задаче Римана–Гильберта для аналитических семейств представлений // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №2. С. 89–97.
- [2] Hain R. On a generalization of Hilbert's 21st problem // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1986. V. 19. P. 609–627.
- [3] Kohno T. Holonomy Lie algebras, logarithmic connections and the lower central series of fundamental groups // Contemp. Math. 1989. V. 90. P. 171–182.
- [4] Broué M., Malle G., Rouquier R. Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras // J. Reine Angew. Math. 1998. V. 500. P. 127–190.
- [5] Squier C. C. Matrix representations of Artin groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103. P. 49–53.
- [6] Cohen A. M., Wales D. B. Linearity of Artin groups of finite type // Israel J. Math. 2002. V. 101. P. 101–123.
- [7] Kohno T. Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 339–363.
- [8] Falk M., Randell R. The lower central series of a fiber-type arrangement // Invent. Math. 1985. V. 82. P. 77–88.

Коломенский государственный педагогический институт,
г. Коломна, Московская обл.
E-mail: lexine@mccme.ru

Поступило
15.06.2005