Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Панюшкин, Обобщенное преобразование Фурье и его применения, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 581–596

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:17:24

УДК 517.55

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

С. В. Панюшкин

В статье рассматривается обобщенное преобразование Фурье как оператор, действующий в пространстве, сопряженном к произвольному локально выпуклому пространству. Дается определение этого оператора и устанавливаются его основные свойства. Особое внимание уделяется описанию случаев, когда множество значений обобщенного преобразования Фурье совпадает с весовыми пространствами целых функций. Полученные результаты применяются для нахождения порядков и типов операторов в различных пространствах.

Библиография: 18 названий.

Введение

В анализе значительная роль принадлежит комплексному преобразованию Фурье и его обобщениям – обобщенному преобразованию Фурье, ядром которого является векторнозначная функция (в классическом случае – экспонента). Это преобразование является эффективным инструментом для решения многих важных задач анализа. Так, в работах Красичкова [1], [2] обобщенное преобразование Фурье применяется для исследования замкнутых идеалов в локально выпуклых алгебрах целых функций. В работах Напалкова и его учеников [3]–[5] с помощью такого преобразования описываются сопряженные пространства. В работе Дубинского [6] преобразование Фурье эффективно используется при развитии комплексного метода решения задачи Коши. Громов [7] использует обобщенное преобразование Фурье для исследования полноты системы значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше. Мишин [8] и Елисеев [9] применяют это преобразование для изучения операторов, коммутирующих с данным, и т. д.

В указанных и многих других случаях в качестве ядра обобщенного преобразования Фурье выступает некоторая целая векторнозначная функция с определенными свойствами. В связи с этим возникает естественная потребность исследования обобщенного преобразования Фурье в достаточно широком классе пространств и с оптимально общими ядрами.

В данной работе изучается обобщенное преобразование Фурье как оператор, действующий в пространстве, сопряженном к данному локально выпуклому пространству, ядром такого оператора служит целая векторнозначная функция. Проведено детальное исследование таких преобразований и их ядер.

В разделе 1 дается определение обобщенного преобразования Фурье и устанавливаются его основные свойства. Особое внимание уделяется описанию случаев, когда множество значений обобщенного преобразования Фурье совпадает с весовыми пространствами целых функций. Получены необходимые и достаточные условия такого совпадения. Результаты иллюстрируются на конкретных функциональных пространствах.

В разделе 2 полученные результаты применяются для нахождения порядков и типов операторов, действующих в локально выпуклых пространствах. В частности, установлены порядки и типы оператора D_f обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева [10] в различных пространствах аналитических функций. Как известно, порядок и тип оператора дают точные двусторонние оценки его итераций. Наши оценки, полученные для оператора D_f с помощью его порядка и типа, дополняют (а в некоторых случаях и уточняют) аналогичные оценки, полученные другим способом Леонтьевым в работе [11].

1. Определение и свойства обобщенного преобразования Фурье

Пусть H – локально выпуклое отделимое линейное топологическое пространство, топология которого определена мультиномой $\{\|\cdot\|_p\}$, и H^* – сопряженное к нему (пространство всех линейных непрерывных комплекснозначных функционалов на H).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow H$ – фиксированная слабо голоморфная вектор-функция. Оператор

$$T: H^* \rightarrow \Lambda, \quad H^* \ni l \rightarrow T(l) = l[f(\lambda)] = \varphi(\lambda),$$

назовем *обобщенным преобразованием Фурье с ядром f* . Здесь Λ – множество значений оператора T , т.е. $\Lambda = \{\varphi = T(l) : l \in H^*\}$.

В данной статье мы ограничимся рассмотрением случая, когда f – целая вектор-функция порядка ρ и типа σ :

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n, \quad x_n \in H, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В этом случае значениями обобщенного преобразования Фурье являются целые скалярные функции

$$l(f(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} l(x_n) \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n = \varphi(\lambda),$$

рост которых легко оценить:

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda)| &= |l(f(\lambda))| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} l(x_n) \lambda^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |l(x_n)| |\lambda|^n \leq C_p \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_p |\lambda|^n \\ &\leq C_p \exp\{(\sigma_p + \varepsilon)|\lambda|^{\rho_p}\} \leq C_p \exp\{(\sigma + \varepsilon)|\lambda|^{\rho}\} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

где p – полунорма, по которой ограничен функционал l , ρ_p и σ_p – соответственно p -порядок и p -тип функции f , $\rho_p \leq \rho$, $\sigma_p \leq \sigma$. Отсюда можно заключить, что функции $\varphi(\lambda)$ имеют порядок роста, не превышающий ρ , а при порядке ρ – тип, не превышающий σ .

ЛЕММА 1.1. Если система векторов $\{x_n\}$ полна в пространстве H , то T представляет собой взаимно-однозначное отображение (биекцию) H^* на Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что существуют $l_1, l_2 \in H^*$ такие, что

$$l_1(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_1(x_n)\lambda^n = \varphi(\lambda), \quad l_2(f) = \sum_{n=0}^{\infty} l_2(x_n)\lambda^n = \varphi(\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты обоих разложений, получим, что для всех n выполнено $l_1(x_n) = l_2(x_n)$. Рассмотрим теперь функционал $l_0 = l_1 - l_2 \in H^*$. Имеем $l_0(x_n) = l_1(x_n) - l_2(x_n) = 0$, т.е. данный функционал на всех векторах системы $\{x_n\}$ принимает значение 0. Так как эта система полна в H , то l_0 является нулевым функционалом, значит, $l_1 = l_2$. Лемма доказана.

Далее мы будем рассматривать случай взаимно-однозначного оператора T , т.е. полагать систему $\{x_n\}$ полной. Тогда на Λ с помощью оператора T можно перенести топологию пространства H^* .

В ряде важных случаев оказывается, что Λ в точности совпадает (поэлементно и топологически) с весовыми пространствами целых функций: $[\rho, \sigma]$ или $[\rho, \sigma)$. Здесь $[\rho, \sigma]$ — стандартное обозначение пространства всех целых функций, порядок которых не превосходит ρ , а при порядке ρ тип не превосходит σ . Естественная топология в $[\rho, \sigma]$ задается системой полунорм

$$\|f\|_{\varepsilon} = \sup_{r \geq 0} \left\{ \max_{|z| \leq r} |f(z)| e^{-(\sigma + \varepsilon)r^{\rho}} \right\}, \quad \varepsilon > 0;$$

$[\rho, \sigma)$ — пространство всех целых функций, порядок которых не превосходит ρ , а при порядке ρ тип строго меньше σ . При $\rho > 1$ оно является сопряженным к пространству $[R, \omega]$, где

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} = 1, \quad (R\omega)^{1/R}(\rho\sigma)^{1/\rho} = 1.$$

Топология в $[\rho, \sigma)$ задается системой полунорм

$$\|f\|_M = \sup_{F \in M} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) F^{(n)}(0)}{n!} \right| \right\},$$

где M — всевозможные ограниченные множества пространства $[R, \omega]$.

Одна из основных задач данной работы — изучение условий совпадения Λ с пространствами $[\rho, \sigma]$ и $[\rho, \sigma)$.

1.1. Необходимые условия изоморфизма пространства H^* с $[\rho, \sigma]$, $[\rho, \sigma)$. а) Алгебраический изоморфизм.

ЛЕММА 1.2. Пусть Λ совпадает с $[\rho, \sigma]$ поэлементно. В таком случае система $\{x_n\}$ является минимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что система $\{x_n\}$ не является минимальной, тогда в ней существует вектор x_k , представимый в виде предела последовательности линейных комбинаций остальных векторов:

$$x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} x_m. \quad (1)$$

Зафиксируем произвольную функцию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \in [\rho, \sigma];$$

ей соответствует единственный функционал $l = T^{-1}(\varphi)$, причем $\varphi_n = l(x_n)$. Подействуем функционалом l на обе части равенства (1):

$$l(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} l(x_m), \quad \varphi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} \varphi_m. \quad (2)$$

Теперь определим $\phi(\lambda)$ следующим образом: $\phi(\lambda) = \varphi(\lambda) + \lambda^k$. Эта функция имеет те же характеристики роста, что и $\varphi(\lambda)$, и, следовательно, тоже принадлежит $[\rho, \sigma]$. Ее тейлоровские коэффициенты равны соответствующим коэффициентам функции $\varphi(\lambda)$, за исключением k -го, который равен $\varphi_k + 1$. Функции $\phi(\lambda)$ соответствует функционал $l_1 = T^{-1}(\phi)$; действуя им на равенство (1), получим

$$\varphi_k + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} \varphi_m,$$

что противоречит равенству (2). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Пусть Λ совпадает с $[\rho, \sigma]$ поэлементно; тогда система $\{x_n\}$ является минимальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично предыдущей лемме.

В случае, если наблюдается не только поэлементное, но и топологическое соответствие, можно указать и другие, более содержательные необходимые условия.

б) Топологический изоморфизм.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Lambda = [\rho, \sigma]$. Тогда система $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H :

$$\forall x \in H \quad \exists \{c_n\} \subset \mathbb{C} \quad \forall l \in H^* \quad l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(x_n).$$

При этом выполняется условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} < (\rho\sigma)^{-1/\rho}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\Lambda = [\rho, \sigma]$, то H^* изоморфно $[\rho, \sigma]$ и H^{**} изоморфно $[\rho, \sigma]^*$. Существует сопряженный оператор T^* , линейно и взаимно однозначно отображающий $[\rho, \sigma]^*$ на H^{**} .

В пространстве H^{**} существует подпространство H_0 , алгебраически изоморфное H . Этот изоморфизм устанавливается с помощью так называемого естественного отображения: функционал $s_x \in H^{**}$, соответствующий $x \in H$, определяется таким образом: $s_x(l) = l(x)$ для всех $l \in H^*$.

Для s_x , как и для любого функционала из H^{**} , существует соответствующий ему функционал из $[\rho, \sigma]^*$, который мы будем обозначать через Φ_x . Пользуясь этим, мы можем вывести равенство

$$\langle x, l \rangle = \langle s_x, l \rangle = \langle T^*(\Phi_x), l \rangle = \langle \Phi_x, T(l) \rangle = \langle \Phi_x, \varphi_l \rangle, \quad (4)$$

где $\varphi_l = T(l)$.

Известно (см. [11]), что любой линейный непрерывный функционал $\Phi \in [\rho, \sigma]^*$ может быть записан в виде

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

где

$$\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \in [\rho, \sigma],$$

а $\{c_n\}$ — определяющая Φ числовая последовательность, удовлетворяющая условию (3).

Подставив выражение для Φ в равенство (4), получим

$$l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_{l_n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(x_n) \quad \forall x \in H, \quad \forall l \in H^*, \quad (5)$$

где коэффициенты $\{c_n\}$ зависят от Φ_x и, следовательно, от x . Таким образом, каждый элемент H разлагается в слабо сходящийся ряд по $\{x_n\}$.

Докажем, что данное разложение единственно. Предположим обратное: пусть для некоторого $x \in H$ существуют два разложения

$$l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n l(x_n) \quad \forall l \in H^*.$$

Согласно теореме 1.1 система $\{x_n\}$ является минимальной; из этого следует (см. [12]) существование в H^* системы функционалов $\{l_n\}$, биортогональной системе $\{x_n\}$, т.е.

$$l_n(x_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Взяв в качестве l функционал l_n , получим $c_n = d_n$ для любого n , что доказывает единственность разложения. Следовательно, система $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H , причем для последовательности коэффициентов любого $x \in H$ выполняется условие (3). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если в условиях теоремы 1.1 H рефлексивно, то $H \approx H^{**} \approx [\rho, \sigma]^*$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. В условиях теоремы 1.1 $\{x_n\}$ всегда является базисом в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть для некоторого x

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} = (\rho e \sigma_1)^{-1/\rho} < (\rho e \sigma)^{-1/\rho}, \quad \sigma_1 > \sigma.$$

Тогда имеем оценки

$$\begin{aligned} |c_n| &< \left(\frac{n}{\rho e (\sigma_1 - \delta)} \right)^{n/\rho} \quad \forall \delta > 0, \\ \|x\|_p &\leq \left(\frac{\rho e (\sigma + \varepsilon)}{n} \right)^{n/\rho} \quad \forall p, \quad \forall \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

из которых следует, что ряд $x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ для любого $x \in H$ сходится по любой полунорме.

Более того, любая числовая последовательность, удовлетворяющая условию (3), является последовательностью коэффициентов некоторого $x \in H$. Так как каждой такой последовательности соответствует единственный элемент пространства $\Lambda^* = H^{**}$ (легко видеть, что это соответствие представляет собой естественное отображение H), то мы получаем взаимно-однозначное отображение H на H^{**} , т.е. H является полурефлексивным.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Lambda = [\rho, \sigma]$. Тогда система $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H , причем для любого $x \in H$ выполняется условие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} \leq (\rho e \sigma)^{-1/\rho}. \quad (6)$$

Доказательство проводится аналогично предыдущей теореме, при этом используется представление линейного непрерывного функционала на $[\rho, \sigma]$: $\Phi(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, где $\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \in [\rho, \sigma]$, а $\{c_n\}$ — определяющая Φ числовая последовательность, удовлетворяющая условию (6) (см. [11]).

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Если в условиях теоремы 1.2 H рефлексивно, то $H \approx H^{**} \approx [\rho, \sigma]^*$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Если в условиях теоремы 1.2 справедливо

$$\forall p \quad \rho_p(f) < \rho \quad \text{или же} \quad \rho_p(f) = \rho, \quad \text{но при этом} \quad \sigma_p(f) < \sigma, \quad (7)$$

то $\{x_n\}$ является базисом H и H — полурефлексивное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично следствию 1.2.

Установим достаточные условия совпадения Λ с пространствами $[\rho, \sigma]$, $[\rho, \sigma]$. Они имеют место лишь для бочечных пространств. Многие рассматриваемые в функциональном анализе линейные топологические пространства принадлежат этому классу (в частности, все банаховы, рефлексивные, пространства Фреше), см. [13].

1.2. Достаточные условия изоморфизма пространства H^* с $[\rho, \sigma], [\rho, \sigma)$. а) Алгебраический изоморфизм.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.1. Если H является бочечным, то при полурефлексивности (вытекающей из условий следствий 1.2 и 1.4) оно является и рефлексивным [13].

ЛЕММА 1.4. Пусть система векторов $\{x_n\}$ – слабый базис в H . В таком случае $\{x_n\}$ полна в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\{x_n\}$ – слабый базис в H , то

$$\forall x \in H \quad \exists \{c_n\} \subset \mathbb{C} \quad \forall l \in H^* \quad l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(x_n).$$

В таком случае из равенства $l(x_n) = 0$ для всех n следует $l(x) = 0$ для всех $x \in H$, что является признаком полноты системы. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.5. Пусть система векторов $\{x_n\}$ – слабый базис в H . В таком случае $\{x_n\}$ минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: существует вектор x_k , представимый в виде предела последовательности линейных комбинаций остальных векторов:

$$x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} x_m.$$

На это равенство действуем произвольным функционалом l из H^* :

$$l(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{M_n} a_{nm} l(x_m).$$

То есть x_k представляется в виде предела последовательности линейных комбинаций остальных векторов и по слабой топологии, следовательно, и по ней система $\{x_n\}$ не минимальна. Но как базис она должна быть минимальной. Полученное противоречие доказывает лемму.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.2. Будучи минимальной системой, слабый базис обладает биортонгальной системой функционалов $\{l_n\}$. Приняв в разложении (5) $l = l_n$, получим, что коэффициенты этого разложения могут быть найдены из равенства $c_n = l_n(x)$. Таким образом, оператор, обратный обобщенному преобразованию Фурье $T^{-1}: \Lambda \rightarrow H^*$, записывается в виде

$$\forall \varphi \in \Lambda \quad (T^{-1}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n l_n(x).$$

В частности, если H – функциональное пространство, а ядром обобщенного преобразования Фурье является экспонента, то $l_n = \delta^{(n)}$ и обратное преобразование имеет вид

$$\forall \varphi \in \Lambda \quad (T^{-1}\varphi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \delta^{(n)}(x).$$

В некоторых работах (например, в работе Дубинского [6]) именно этот оператор называется преобразованием Фурье.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть H – бочечное пространство и система векторов $\{x_n\}$ представляет слабый базис в H , причем для всех $x \in H$ выполняется условие (6) и существует $x' \in H$, для которого выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} = (\rho\sigma)^{-1/\rho}. \quad (8)$$

Тогда оператор T осуществляет алгебраический изоморфизм пространств H^* и $[\rho, \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.3 система $\{x_n\}$ полна, и по лемме 1.1 оператор T является взаимно-однозначным отображением H^* и Λ .

Покажем, что для любой функции $\varphi \in [\rho, \sigma)$ найдется функционал $l_\varphi \in H^*$ такой, что $T(l_\varphi) = \varphi$. Зафиксируем произвольную $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n \in [\rho, \sigma)$ и определим функционал $l_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$. Установим сходимость этого ряда. Для достаточно больших n справедливы вытекающая из условия (6) оценка

$$|c_n| \leq \left(\frac{n}{\rho e(\sigma - \delta)} \right)^{n/\rho} \quad \forall \delta > 0$$

и оценка для коэффициентов

$$|\varphi_n| \leq \left(\frac{\rho_1 e(\sigma_1 + \varepsilon)}{n} \right)^{n/\rho} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где ρ_1 – порядок, σ_1 – тип функции φ . Оценим

$$|l_\varphi(x)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |\varphi_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\rho e(\sigma - \delta)} \right)^{n/\rho} \left(\frac{\rho_1 e(\sigma_1 + \varepsilon)}{n} \right)^{n/\rho_1}.$$

При $\rho_1 < \rho$ этот ряд, очевидно, сходится. При $\rho_1 = \rho$ выполняется $\sigma_1 < \sigma$ и, выбрав ε и δ такими, что $\varepsilon + \delta < \sigma - \sigma_1$, мы получим, что ряд мажорируется сходящейся геометрической прогрессией и также сходится.

Таким образом, функционал l_φ определен на всем H . Его линейность очевидна, а непрерывность следует из бочечности H по теореме Банаха–Штейнгауза [14].

Мы показали, что для любой функции $\varphi \in [\rho, \sigma)$ найдется функционал $l_\varphi \in H^*$ такой, что $T(l_\varphi) = \varphi$. Покажем теперь, что таких функционалов не существует для функций φ , имеющих в точности порядок ρ и тип σ .

Предположим, что для функции φ с такими характеристиками роста существует функционал $l_\varphi \in H^*$ такой, что $T(l_\varphi) = \varphi$. Тогда для всех n $\varphi_n = l_\varphi(x_n)$, и данный функционал должен иметь вид $l_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$. Возьмем в качестве x вектор x' ; тогда для его коэффициентов, начиная с некоторого, выполняется оценка

$$|c_n| \geq \left(\frac{n}{\rho e(\sigma - \varepsilon)} \right)^{n/\rho} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

а для любого $\delta > 0$ существует последовательность n_k такая, что

$$|\varphi_{n_k}| \geq \left(\frac{\rho e(\sigma - \delta)}{n_k} \right)^{n_k/\rho}.$$

Приняв $\delta < \varepsilon$, получим, что подпоследовательность членов ряда $l_\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ с номерами n_k не стремится к нулю, значит, данный ряд расходится и функционал l_φ не определен на векторе x' . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть H – бочечное пространство и система векторов $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H , причем для всех $x \in H$ выполняется условие (3). Тогда оператор T осуществляет алгебраический изоморфизм пространств H^* и $[\rho, \sigma]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично предыдущей теореме.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.3. Условие (8) теоремы 1.3 (отсутствующее в теореме 1.4) является существенным. При его невыполнении наблюдается промежуточный случай $[\rho, \sigma) \subset \Lambda \subset [\rho, \sigma]$.

б) Топологический изоморфизм.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть H – бочечное пространство и система векторов $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H , причем для всех $x \in H$ выполняется условие (6), существует $x' \in H$, для которого справедливо (8), а f удовлетворяет условию (7) и имеет порядок $\rho > 1$. Тогда оператор T осуществляет топологический изоморфизм пространств H^* и $[\rho, \sigma]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в условиях теоремы H – рефлексивное пространство и $\{x_n\}$ – его базис (согласно примечанию 1.1 и следствию 1.4).

Проведем доказательство по следующей схеме.

Пусть H_1 и H_2 – пространства, обладающие указанными в условии теоремы свойствами, причем ядра обобщенного преобразования Фурье в соответствующих пространствах имеют одинаковые характеристики роста ρ и σ .

Согласно теореме 1.3 обобщенные преобразования Фурье T_1 и T_2 устанавливают алгебраический изоморфизм пространств H_1^* и H_2^* с $[\rho, \sigma]$, значит, H_1^* и H_2^* алгебраически изоморфны и между собой. Этот изоморфизм устанавливается оператором $T_0 = T_2^{-1}T_1$, $T_0: H_1^* \rightarrow H_2^*$.

Если оператор T_0 , а также обратный к нему, непрерывны, то T_0 осуществляет топологический изоморфизм между H_1^* и H_2^* . Так как в качестве H_1 и H_2 можно брать любые пространства, удовлетворяющие условиям теоремы, то все сопряженные к ним изоморфны между собой и, в частности, изоморфны пространству $[R, \omega]^* = [\rho, \sigma]$, где

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} = 1, \quad (R\omega)^{1/R}(\rho\sigma)^{1/\rho} = 1.$$

Покажем, что этот оператор непрерывен.

Согласно следствию 1.4 для каждой последовательности $\{c_n\}$, удовлетворяющей условию (6), найдется соответствующий вектор и в H_1 , и в H_2 . Установим соответствие между векторами пространств H_1 и H_2 : пусть $x_1 \in H_1$ соответствует $x_2 \in H_2$, если эти векторы определяются одной и той же последовательностью $\{c_n\}$. Легко видеть, что это соответствие является взаимно-однозначным и линейным.

Топология в H_1^* задается системой полунорм $\|\cdot\|_L^1$ таких, что $\|l\|_L^1 = \sup_{x \in L} l(x)$, $l \in H_1^*$, L – ограниченное подмножество H_1 . В H_2^* топология определяется аналогично с помощью системы полунорм $\|\cdot\|_M^2$. Зафиксируем произвольное ограниченное множество $M_0 \subset H_2$ (тем самым, фиксируется полунорма $\|\cdot\|_{M_0}^2$ на H_2^*) и определим

множество $L_0 \subset H_1$ как множество, состоящее из векторов, соответствующих векторам из M_0 . Ввиду ограниченности M_0 оно является слабо ограниченным; значит, слабо ограничено и L_0 (так как соответствующие друг другу функционалы из H_1^* и H_2^* принимают равные значения на соответствующих друг другу векторах из H_1 и H_2). Из слабой ограниченности L_0 вытекает его ограниченность по топологии H_1 ; значит, в H_1^* имеется полунорма $\|\cdot\|_{L_0}^1$. Эта полунорма обладает следующим свойством:

$$\forall l_1 \in H_1^* \quad \|l_1\|_{L_0}^1 = \|l_2\|_{M_0}^2,$$

где $l_2 = T_0(l_1)$. Так как M_0 бралось произвольно, можно сделать вывод о непрерывности оператора T_0 (см. [12]).

Аналогично можно показать, что оператор, обратный T_0 , также непрерывен. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть H – бочечное пространство и система векторов $\{x_n\}$ представляет собой слабый базис в H , причем для всех $x \in H$ выполняется условие (3) и f имеет порядок $\rho > 1$. Тогда оператор T осуществляет топологический изоморфизм пространств H^* и $[\rho, \sigma]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично предыдущей теореме.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.4. Теоремы 1.5, 1.6 дают достаточные условия топологического изоморфизма пространства H^* с $[\rho, \sigma]$ или $[\rho, \sigma)$. От необходимых условий (сформулированных в теоремах 1.1, 1.2) их отличает требование бочечности H , а во втором случае и требование условий (7), (8).

ПРИМЕЧАНИЕ 1.5. При $\sigma = \infty$ может выполняться равенство $\Lambda = [\rho, \infty)$. Здесь справедливы все теоремы, доказанные для случая $\Lambda = [\rho, \sigma]$ (при условии $\rho \geq 1$). Доказательства проводятся аналогично, лишь условие (6) следует заменить условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/\rho} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \quad (9)$$

Полученные результаты проиллюстрируем примерами.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $H = H(\mathbb{C})$ – пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, и пусть $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция порядка ρ и типа σ , причем существует $C > 0$,

$$|a_n| \geq \left(\frac{C}{n}\right)^{n/\rho} \quad \forall n. \quad (10)$$

Рассмотрим целую векторнозначную функцию

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \lambda^n: \mathbb{C} \rightarrow H(\mathbb{C}).$$

Согласно примечанию 1.5 оператор T с ядром $f(\lambda) = f_1(\lambda z)$ осуществляет топологический изоморфизм $H(\mathbb{C})^*$ и $[\rho, \infty)$.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $H = H_R$ – пространство функций, аналитических в круге радиуса R , с топологией равномерной сходимости на компактах и

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \neq 0 \quad \forall n,$$

– целая функция порядка ρ и типа σ , причем справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\rho\sigma)^{1/\rho}. \quad (11)$$

Рассмотрим целую векторнозначную функцию

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \lambda^n: \mathbb{C} \rightarrow H_R.$$

Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1.5 выполнены и оператор T с ядром $f(\lambda) = f_1(\lambda z)$ осуществляет топологический изоморфизм H_R^* и $[\rho, \sigma R^\rho]$.

Примеры 1.1, 1.2 пересекаются с результатами Красичкова, полученными в работах [1], [2].

ПРИМЕР 1.3. Рассмотрим в H_R дифференциальный оператор

$$D_m(y) = y^{(m)} + Q_0(z)y^{(m-1)} + \dots + Q_{m-1}(z)y,$$

где $Q_k(z) \in H_R$. Пусть функция $y(z, \lambda)$ – решение уравнения $D_m(y) = \lambda^m y$ с начальными условиями $y^{(k)}(0, \lambda) = \lambda^k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Известно (см. [9]), что $y(z, \lambda)$ представляет собой целую функцию по λ , а по z является аналитической в круге $|z| < R$. Кроме того, $y(z, \lambda)$ можно представить в виде ряда

$$y(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z) \lambda^k,$$

где функции $A_k(z)$ представляют собой базис в H_R .

По теореме 1.5 оператор T с ядром $y(z, \lambda)$ осуществляет топологический изоморфизм H_R^* и $[1, R]$. Отметим, что такой же результат был получен другим способом Елисеевым (см. [9]).

ПРИМЕР 1.4. Пусть $H = [R, \omega]$ и

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \neq 0 \quad \forall n,$$

– целая функция порядка ρ и типа σ , причем $\rho < R$ и справедливо условие (11). Рассмотрим целую векторнозначную функцию

$$f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \lambda^n: \mathbb{C} \rightarrow [R, \omega].$$

Все условия теоремы 1.5 выполнены, значит, оператор T с ядром $f(\lambda) = f_1(\lambda z)$ осуществляет топологический изоморфизм $[R, \omega]^*$ и $[\rho_0, \sigma_0]$, где ρ_0, σ_0 сопряжены с R, ω относительно ρ и σ :

$$\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}, \quad (\rho_0 \sigma_0)^{1/\rho_0} (R\omega)^{1/R} = (\rho\sigma)^{1/\rho}.$$

Другим способом этот результат ранее был получен Леонтьевым в монографии [11].

ПРИМЕЧАНИЕ 1.6. Отметим, что в работе Тейлора [15] с помощью классического преобразования Фурье найдено представление пространств, сопряженных с весовыми пространствами целых функций. Пользуясь обобщенным преобразованием Фурье с ядром $f(\lambda) = f_1(\lambda z)$ и опираясь на доказанные выше теоремы, получаем представление, обобщающее некоторые результаты Тейлора.

2. Применение обобщенного преобразования Фурье к нахождению порядков и типов операторов

Обобщенное преобразование Фурье пространства H^* позволяет изучать H и H^* , опираясь на известные свойства весовых пространств целых функций. Его можно применять, в частности, для определения порядков и типов операторов, действующих в пространстве H .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть в отделимом локально-выпуклом пространстве H действует линейный непрерывный оператор A и $f(\lambda)$ – его собственная вектор-функция ($A(f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$), имеющая порядок ρ и тип σ . Тогда, если обобщенное преобразование Фурье с ядром $f(\lambda)$ устанавливает топологический изоморфизм между H^* и $[\rho, \sigma]$ (см. теорему 1.5), то порядок оператора A равен $1/\rho$, а тип бесконечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор A^* , сопряженный данному: $A^*: H^* \rightarrow H^*$. Выясним, какому оператору в $[\rho, \sigma]$ соответствует A^* . Пусть $A^*(l) = l_1$, $l, l_1 \in H^*$; тогда

$$T(l_1) = \langle l_1, f(\lambda) \rangle = \langle A^*(l), f(\lambda) \rangle = \langle l, A(f(\lambda)) \rangle = \langle l, \lambda f(\lambda) \rangle = \lambda \langle l, f(\lambda) \rangle.$$

То есть A^* в H^* действует как оператор умножения на λ в $[\rho, \sigma]$. В работе Мишина [8] показано, что порядок оператора умножения в $[\rho, \sigma]$ равен $1/\rho$, а тип бесконечен. Далее, в той же работе [8] показано, что если пространство H рефлексивно (что в данном случае следует из условий теоремы согласно примечанию 1.1), то порядок и тип A равны соответственно порядку и типу A^* , т.е. $1/\rho$ и ∞ . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть в отделимом локально-выпуклом пространстве H действует линейный непрерывный оператор A и $f(\lambda)$ – его собственная вектор-функция порядка ρ и типа σ . Тогда если обобщенное преобразование Фурье с ядром $f(\lambda)$ устанавливает топологический изоморфизм между H^* и $[\rho, \sigma]$ (см. теорему 1.6), то порядок оператора A равен $1/\rho$, а тип бесконечен.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть в отделимом локально-выпуклом пространстве H действует линейный непрерывный оператор A и $f(\lambda)$ – его собственная вектор-функция порядка ρ и бесконечного типа. Тогда если обобщенное преобразование Фурье с ядром $f(\lambda)$ устанавливает топологический изоморфизм между H^* и $[\rho, \infty)$ (см. примечание 1.3), то порядок оператора A равен $1/\rho$, а тип – нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА этих теорем полностью аналогичны доказательству теоремы 2.1. Значения порядка и типа оператора умножения в соответствующих весовых пространствах целых функций приведены в статье [8].

ПРИМЕЧАНИЕ 2.2. В работе Громова [16] доказано утверждение, связывающее порядок $\beta(A)$ оператора A с порядком роста ρ его собственной вектор-функции, имеющее вид: $\beta(A) \geq 1/\rho$. На практике, однако, часто имеет место равенство $\beta(A) = 1/\rho$. Теоремы 2.1–2.3 описывают условия, когда оно справедливо.

Применим данные теоремы для установления порядка и типа некоторых операторов в конкретных пространствах.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим в пространстве $H(\mathbb{C})$ оператор дифференцирования. Он имеет собственную вектор-функцию $e^{\lambda z}$. Согласно примеру 1.1 обобщенное преобразование Фурье с таким ядром устанавливает топологический изоморфизм между $H(\mathbb{C})^*$ и $[1, \infty)$. По теореме 2.3 данный оператор имеет порядок 1 и нулевой тип.

ПРИМЕР 2.2. В том же пространстве $H(\mathbb{C})$ рассмотрим оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева D_f (см. [10], [11]). Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция порядка ρ и конечного типа, тейлоровские коэффициенты которой удовлетворяют условию (11). *Оператором обобщенного дифференцирования, порожденным функцией f* , называется оператор, который ставит в соответствие каждой целой функции $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ функцию

$$D_f g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1}.$$

Его собственная вектор-функция — $f(\lambda z)$. Согласно примеру 1.1 обобщенное преобразование Фурье с данным ядром устанавливает топологический изоморфизм между $H(\mathbb{C})^*$ и $[\rho, \infty)$. По теореме 2.3 оператор D_f имеет порядок $1/\rho$ и нулевой тип. При $f(z) = e^z$ оператор обобщенного дифференцирования совпадает с оператором обычного дифференцирования, таким образом, данный пример обобщает предыдущий.

ПРИМЕР 2.3. Исследование этого же оператора в H_R с помощью теоремы 2.1 дает следующий результат: порядок $1/\rho$ и бесконечный тип.

ПРИМЕР 2.4. Оператор обобщенного дифференцирования можно рассмотреть и в пространстве $[R, \omega]$, требуя при этом $\rho < R$. Согласно примеру 1.4 обобщенное преобразование Фурье с ядром $f(\lambda z)$ осуществляет топологический изоморфизм пространств $[R, \omega]$ и $[\rho_0, \sigma_0]$, где

$$\rho_0 = \frac{R\rho}{R-\rho} \quad \text{и} \quad \sigma_0 = (R\omega)^{-\rho_0/R} (\rho\sigma)^{\rho_0/\rho} \rho_0^{-1}.$$

По теореме 2.1 оператор обобщенного дифференцирования имеет порядок $\beta(D_f) = 1/\rho_0$ и бесконечный тип.

ПРИМЕР 2.5. Обратимся к примеру 1.3. Для упомянутого в нем базиса $A_k(z)$ можно определить оператор обобщенного сдвига D : пусть функция $g(z) \in H_R$ разлагается в ряд $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A_k(z)$; тогда $Dg(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k A_{k-1}(z)$. Очевидно, что собственной функцией этого оператора является функция $y(z, \lambda)$, порождающая данный базис. Согласно примеру 1.3 обобщенное преобразование Фурье с данным ядром устанавливает топологический изоморфизм между H_R^* и $[1, R)$. Следовательно, оператор D имеет порядок 1 и бесконечный тип. Так как в [9] установлено, что рассмотренный в примере 1.3 оператор $D_n(y)$ является n -й степенью оператора D , то получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Оператор $D_n(y)$ имеет порядок n и бесконечный тип.*

В связи с примерами 2.2–2.4 отметим, что в монографии Леонтьева [11] детально изучались последовательности $|D_f^n(F)|$ в различных пространствах аналитических функций. В частности, получены верхние оценки величин $|D_f^n(F)|$, связанные с топологией того или иного пространства (см. [11, теоремы 1.4.4, 1.4.6, 1.4.8]). Порядок и тип оператора D_f , установленные в примерах 2.2–2.4, дают точные двусторонние оценки величин $|D_f^n(F)|$, дополняющие оценки Леонтьева и уточняющие некоторые из них. Так, например, в [11] имеется следующая оценка:

$$|D_f^n(F)| \leq C(\varepsilon) \frac{\exp[(\tau_2 + \varepsilon)|z|^R]}{d_n} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $F \in [R, \omega]$, d_n – последовательность положительных чисел такая, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho_1} \sqrt[n]{d_n} = (\rho_1 e \tau_1)^{1/\rho_1}, \quad \tau_1 < \sigma_1, \quad (12)$$

где ρ_1, σ_1 сопряжены с R, ω , а тип τ_2 сопряжен с типом $\sigma_1 - \tau_1$.

Без потери общности можно положить

$$d_n = \left(\frac{n}{\rho_1 e \tau_1} \right)^{-n/\rho_1}.$$

Тогда оценку Леонтьева можно преобразовать к виду

$$\|D_f^n(F)\|_\varepsilon^{\tau_2} \leq C(\varepsilon) \left(\frac{n}{\rho_1 e \tau_1} \right)^{n/\rho_1} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где $\{\|\cdot\|^{\tau_2}\}$ – система норм, индуцирующая топологию пространства $[R, \tau_2]$.

Согласно примеру 2.4 в пространстве $[R, \omega]$ $\beta(D_f) = 1/\rho_0$, откуда вытекает оценка (см. [8])

$$\|D_f^n(F)\|_{\varepsilon_1} \leq C(\varepsilon) n^{(1/\rho_0 + \varepsilon)n} \|F\|_{\varepsilon_2}. \quad (13)$$

Так как топологии, по которым производится оценка, не совпадают, невозможно заключить, что какое-либо из этих неравенств сильнее. Но полученная оценка дополняет известную, являясь в некотором смысле ее предельным случаем: при приближении τ_2 к ω , что правая часть оценки, полученной с помощью порядка оператора, приближается к правой части оценки Леонтьева.

ПРИМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что возможности применения обобщенного преобразования Фурье не ограничиваются нахождением порядков и типов операторов. С помощью этого оператора могут быть исследованы в общей постановке и многие другие задачи.

Так, например, обобщенное преобразование Фурье позволяет также получать слабое (а в ряде случаев и сильное) представление векторов пространства H с помощью соотношения двойственности:

$$\forall x \in H \quad \forall l \in H^* \quad \langle x, l \rangle = \langle s_x, l \rangle = \langle T^*(\Phi_x), l \rangle = \langle \Phi_x, T(l) \rangle = \langle \Phi_x, \varphi_l \rangle, \quad (14)$$

которое справедливо в рассмотренных условиях.

Действительно, известно, что в пространстве $[\rho, \sigma]$ (см. [2]) любой линейный непрерывный функционал представляется в виде

$$\Phi(\varphi) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\lambda) dm\lambda}{k(\lambda)} \quad \forall \varphi \in [\rho, \sigma],$$

где m — комплексная счетно-аддитивная мера ограниченной вариации на $\mathbb{C}$, $k(\lambda)$ — положительная функция, определяющая функционал Φ .

Отсюда в силу (14) следует слабое равенство

$$x = \langle \Phi_x, f(\lambda) \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\lambda) dm\lambda}{k(\lambda)} \quad \forall x \in H.$$

Если при этом $S = \{\lambda_j\}$ — дискретное достаточное множество пространства Λ (см. [17]), то получаем слабое представление векторов пространства H рядом вида

$$x = \sum_{(\lambda_j)} c_j f(\lambda_j) \quad \forall x \in H.$$

В частности, если H — пространство целых функций, а $f(\lambda) = f_1(\lambda z)$ — ядро, то получаем представление

$$F(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{f_1(\lambda z) dm\lambda}{k(\lambda)} \quad \forall F \in H,$$

обобщающее известное представление целой функции из работы Эренпрайса [18]:

$$F(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{\lambda z} dm\lambda}{k(\lambda)} \quad \forall F \in H(\mathbb{C}).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красичков И. Ф. О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. №1. С. 37–60.
- [2] Красичков И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. 1. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. №4. С. 459–489.
- [3] Напалков В. В. (мл.), Юлмухаметов Р. С. О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №1. С. 68–78.
- [4] Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №10. С. 57–86.
- [5] Мусин И. Х. Теорема Пэли–Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №6. С. 181–204.
- [6] Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области. М.: Изд-во МЭИ, 1996.
- [7] Громов В. П. О полноте значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №6. С. 827–840.
- [8] Мишин С. Н. Порядок и тип оператора и последовательности операторов, действующих в локально выпуклых пространствах // Ученые записки (Орел: ОГУ). 2002. №3. С. 47–98.
- [9] Елисеев И. С. Перестановочность с линейным дифференциальным оператором // Матем. заметки. 1979. Т. 23. №5. С. 719–738.
- [10] Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. 1951. Т. 29. №3. С. 477–500.
- [11] Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981.
- [12] Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1967.
- [13] Робертсон А., Робертсон В. Функциональный анализ. М.: Наука, 1979.
- [14] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.
- [15] Taylor B. A. Some locally convex spaces of entire functions // Proc. Symp. Pure Math. XI. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. P. 431–467.
- [16] Громов В. П. Аналоги разложения Тейлора // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №3. С. 801–808.
- [17] Напалков В. В. О дискретных достаточных множествах в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250. №4. С. 809–812.
- [18] Ehrenpreis L. Analytically uniform spaces and some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101. №1. P. 52–74.