Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих, О графах без корон с регулярными μ -подграфами, II, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 396–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:10:26

УДК 519.14

О ГРАФАХ БЕЗ КОРОН С РЕГУЛЯРНЫМИ μ -ПОДГРАФАМИ, II

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Короной называется полный многодольный граф $K_{1,1,3}$. В работе изучаются графы Тервиллигера без корон и графы без 3-клик с регулярными μ -подграфами заданной положительной степени. Как следствие, выяснено локальное строение графов, в которых окрестности вершин являются регулярными графами Тервиллигера диаметра 2, и некоторая из этих окрестностей не содержит 7-лап. Получено описание связанных графов без корон, в которых μ -подграфы являются реберно регулярными графами диаметра, не большего 2, с заданными параметрами.

Библиография: 6 названий.

Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a . Пусть $a^\perp$ – шар радиуса 1 с центром a . Для подграфа A графа Γ через $A^\perp$ обозначим $\bigcap_{a \in A} a^\perp$.

Через k_a обозначим степень вершины a , т.е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ . Для ребра $\{a, c\}$ графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в графе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если Γ – регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках ($\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра $\{a, c\}$). Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем *μ -подграфом*, если вершины a, b находятся на расстоянии 2, а через μ_{ab} обозначим число вершин в этом подграфе. Скажем, что $\mu(\Gamma) = \mu$, если для любых вершин a, b с условием $d(a, b) = 2$ верно равенство $\mu_{ab} = \mu$. *Короберно регулярным графом с параметрами (v, k, μ)* называется регулярный граф степени k диаметра 2 на v вершинах с $\mu(\Gamma) = \mu$. Реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $\mu(\Gamma) = \mu$ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*. Далее, подграф из Γ будет означать индуцированный подграф.

Пусть $K_{m_1, \dots, m_n}$ – полный многодольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m = m_1 = \dots = m_n$, то граф обозначается $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ с $m \geq 3$ называется *m -лапой* (лапой, если $m = 3$). Граф $K_{1, \dots, 1, m}$ с n долями порядка 1 называется *(n, t) -короной* (n -короной, если $t = 3$; короной, если $n = 2$). Граф Γ назовем *слабо*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00772.

редуцированным, если из равенства $a^\perp = b^\perp$ следует $a = b$. Граф Γ назовем *редуцированным*, если из включения $a^\perp \subseteq b^\perp$ следует $a = b$. Через $\Gamma^\perp$ обозначим подграф на множестве всех вершин a таких, что $a^\perp = \Gamma$.

Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $(m \times n)$ -*графом*, если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Иногда $(m \times n)$ -граф называется *прямоугольной решеткой*. При $m = n$ граф называется *решетчатым*. *Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин; $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны только, если они имеют единственный общий элемент.

Граф диаметра d называется *антиподальным*, если отношение – совпадать или находиться на расстоянии d – является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальный граф диаметра 3 на 12 вершинах, у которого окрестность любой вершины пятиугольник, назовем *графом икосаэдра*.

Под *кликовым расширением* графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на клику (a) , причем вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ . Кликовое расширение графа будем называть β -*расширением*, если каждая клика (a) состоит из β вершин.

Граф Тервиллигера – это неполный граф, в котором для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2, подграф $[a] \cap [b]$ является μ -кликой.

В работе [1] М. Нумата получил классификацию графов без корон, в которых μ -подграфы являются изоморфными реберно регулярными графами диаметра 2 (естественно, не имеющими 3-лап). В связи с этим результатом представляет интерес следующая

ПРОБЛЕМА А. *Изучить графы, в которых каждый μ -подграф является реберно регулярным графом без 3-лап с заданными параметрами (v', k', λ') .*

В работе В. В. Кабанова [2] получено обобщение результата Нуматы, опирающееся на описание редуцированных графов без 3-лап с регулярными μ -подграфами заданной положительной степени α (А. А. Махнев [3]) и классификацию графов без 3-лап, в которых μ -подграфы имеют фиксированное число вершин (Махнев, Кабанов [4]).

Связный редуцированный граф без корон, содержащий 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны заданной положительной степени α и имеют диаметр 2, является графом Грассмана, графом Джонсона или его частным, локально треугольным графом или графом Госсета.

Важным этапом в доказательстве этого результата явилась лемма 2.1 [2], в которой доказано, что слабо редуцированный граф без 3-лап, содержащий 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны заданной положительной степени, является редуцированным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если Γ – связный слабо редуцированный граф без 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны степени $\alpha > 0$, то Γ является редуцированным графом или пятиугольной пирамидой.*

В теореме 1 [4] доказано, что если Γ – связный граф Тервиллигера без 3-лап, то либо Γ является кликовым расширением графа икосаэдра, либо подграф, индуцированный на множестве всех вершин из $\Gamma - \Gamma^\perp$ с некликовыми окрестностями, является кликовым расширением пустого графа, клики или графа с $\mu = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера без корон, Γ' – подграф на множестве вершин с некликовыми окрестностями. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ не содержит 3-клик и является кликовым расширением 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды;
- (2) Γ не содержит 3-лап, но содержит 3-клик, диаметр Γ больше 2 и либо
 - (a) Γ является кликовым расширением графа икосаэдра, либо
 - (b) Γ' является кликой и Γ является кликовым расширением графа Δ , где Δ содержит δ -клику и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами клики, либо
 - (c) Γ' является кликовым расширением графа с $\mu = 1$;
- (3) Γ содержит 3-лапу, $\mu = 1$ и окрестность любой вершины из Γ состоит из изолированных клик.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Γ – связный граф, в котором окрестности вершин являются регулярными графами Тервиллигера диаметра 2. Если окрестность некоторой вершины не содержит 7-лап, то

- (1) либо Γ является кликовым расширением графа икосаэдра, либо окрестность каждой вершины из Γ является кликовым β -расширением графа Петерсена;
- (2) если окрестность некоторой вершины из Γ не содержит корон, то Γ – кликовое расширение графа икосаэдра, граф $\overline{T(7)}$, граф Конвея–Смита на 63 вершинах диаметра 4 (это антиподальное 3-накрытие $\overline{T(7)}$) или граф Доро на 65 вершинах диаметра 3.

Следующий результат является аналогом теоремы 3 из [2] для редуцированных графов без 3-клик.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – связный редуцированный граф без 3-клик, в котором каждый μ -подграф регулярен заданной положительной степени α . Тогда Γ сильно регулярен.

Обратно, если Γ – сильно регулярный граф без 3-клик с параметрами (v, k, λ, μ) , то каждый μ -подграф регулярен степени $\alpha = 2\lambda + 2 - k$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Γ – связный редуцированный регулярный граф без корон, в котором каждый μ -подграф реберно регулярен с заданными параметрами (v', k', λ') , $k' > 0$ и имеет диаметр не больше 2. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ не содержит 3-клик и Γ является либо октаэдром или треугольным графом $T(5)$, либо сильно регулярным графом с параметрами $((s^2 + 3s)^2, (s^2 + 2s - 1)(s^2 + 3s + 1), (s + 2)(s^3 + 2s^2 - 1), (s^2 + 2s)(s^2 + 2s - 1))$, либо нетривиальным кликовым расширением пятиугольника;
- (2) Γ содержит 3-клик, не содержит 3-лап и является кликовым расширением графа икосаэдра, треугольным графом $T(t)$, $t \geq 6$, или графом Шлефли;
- (3) Γ содержит 3-лапу и является графом Грассмана, графом Джонсона или его частным, локально треугольным графом или графом Госсета.

Граф Γ из пункта (2) заключения следствия 2 является дополнительным для сильно регулярного графа Σ без треугольников с параметрами $((s^2 + 3s)^2, s^3 + 3s^2 + s, 0, s^2 + s)$. В этом случае достигается равенство в условии Крейна для Σ и антиокрестность вершины в Σ также является сильно регулярным графом с параметрами $((s^2 + 2s - 1)(s^2 + 3s + 1), s^2(s + 2), 0, s^2)$. Более того, по теореме 2 каждый μ -подграф из Γ является сильно регулярным, поэтому для смежных вершин $a, b \in \Sigma$ подграф $\Sigma - (a^\perp \cup b^\perp)$ является сильно регулярным с параметрами $((s^2 + 2s)(s^2 + 2s - 1), s^3 + s^2 - s, 0, s^2 - s)$. Хорошо известны существование и единственность Σ в случаях $s = 1$ (это дополнительный граф для графа Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$) и $s = 2$ (граф Хигмена–Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$). Граф Σ не существует в случае $s = 3$ (см. главу 8 [6]). Ничего не известно о существовании таких графов для $s \geq 4$. Представляет интерес

ПРОБЛЕМА В. *Существует ли сильно регулярный граф с параметрами $((s^2 + 3s)^2, s^3 + 3s^2 + s, 0, s^2 + s)$ в случае $s = 4$?*

1. Вспомогательные результаты. В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем.

ЛЕММА 1.1. *Пусть Γ – связный граф без 3-лап, $a \in \Gamma$. Тогда верны следующие утверждения:*

- (1) *если b, c – несмежные вершины из $[a]$, то $[a] \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;*
- (2) *если $\{a, b, c, d\}$ – четырехугольник из Γ , то $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;*
- (3) *если $\{a, b, c, d\}$ – четырехугольник из Γ и μ -подграфы $[a] \cap [b]$, $[c] \cap [d]$ являются регулярными графами одинаковой валентности, то $k_a + k_b = k_c + k_d$, $\mu_{ab} = \mu_{cd}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершина $x \in [a]$ не лежит в $b^\perp \cup c^\perp$, то граф $\{a; b, c, x\}$ является 3-лапой и утверждение (1) доказано.

Пусть $\{a, b, c, d\}$ – четырехугольник из Γ . По утверждению (1) $c^\perp$ и $d^\perp$ содержатся в $a^\perp \cup b^\perp$. Симметрично, $a^\perp$ и $b^\perp$ содержатся в $c^\perp \cup d^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Пусть α – валентность указанных μ -графов. По утверждению (1) $k_a = 2 + \lambda_{ac} + \lambda_{ad} - \alpha$, $k_b = 2 + \lambda_{bc} + \lambda_{bd} - \alpha$. Выписав аналогичные выражения для k_c, k_d , получим первое равенство в (3). Число вершин в графе $a^\perp \cup b^\perp$ равно $2 + k_a + k_b - \mu_{ab}$. Это же число по утверждению (2) равно $2 + k_c + k_d - \mu_{cd}$. Отсюда следует второе равенство в (3).

ЛЕММА 1.2. *Если Γ является регулярным графом степени k без 3-клик на v вершинах, то Γ кореберно регулярен с $\mu = 2k + 2 - v$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \Gamma$. По условию $\Gamma - a^\perp$ является $(v - k - 1)$ -кликой. Если $b \in \Gamma - a^\perp$, то $[b]$ содержит $v - k - 2$ вершин из $\Gamma - a^\perp$ и $k - (v - k - 2)$ вершин из $[a]$. Поэтому Γ является кореберно регулярным графом с $\mu = 2k + 2 - v$.

ЛЕММА 1.3. *Пусть Γ – связный граф без 3-клик на v вершинах, в котором μ -подграфы регулярны заданной положительной степени α . Тогда выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если $d(a, b) = 2$, то подграф $[a] \cap [b]$ кореберно регулярен с $\mu' = 2\alpha + 2 - \mu$, где $\mu = \mu_{ab}$;*

- (2) если b, c – несмежные вершины из $[a]$, $\mu = \mu_{bc}$, то $[b] \cap [c] \cap \Gamma_2(a)$ является регулярным графом степени $k_b + k_c - k_a$ и $\mu = \mu_{ax}$ для любой вершины x из $\Gamma_2(a) \cap [b] \cap [c]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $[a] \cap [b]$ является регулярным графом степени α на μ вершинах без 3-клик. По лемме 1.2 $[a] \cap [b]$ является кореберно регулярным графом с $\mu' = 2\alpha + 2 - \mu$. Утверждение (1) доказано.

Пусть b, c – несмежные вершины из $[a]$, $\mu = \mu_{bc}$. Для любой вершины x из $\Gamma_2(a) \cap [b] \cap [c]$ по лемме 1.1 верны равенства $k_a + k_x = k_b + k_c$, $\mu = \mu_{ax}$.

ЛЕММА 1.4. Пусть Γ – связный граф без 3-клик, содержащий такой пятиугольник Δ , что $[x] \cap [y]$ является μ -кликой для любых двух несмежных вершин x, y из Δ . Тогда $k_x = k$ и $\lambda_{xz} = (k - 2 + \mu)/2$ для любых смежных вершин x, z из Δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $v = 2 + k_x + k_y - \mu$ для любых двух несмежных вершин x, y из Δ . Пусть $abcde$ является 5-циклом из Δ . Так как $v = 2 - \mu + k_a + k_c = 2 - \mu + k_a + k_d$, то $k_c = k_d$. Двигаясь по циклу, получим, что $k_x = k$ для любой вершины x из Δ .

Теперь $k_a = 2 + \lambda_{ab} + \lambda_{ae} - \mu$, $k_b = 2 + \lambda_{ab} + \lambda_{bc} - \mu$, поэтому $\lambda_{ae} = \lambda_{bc}$. Аналогично $\lambda_{de} = \lambda_{bc}$ и $k = k_e = 2 + \lambda_{ae} + \lambda_{de} - \mu$, поэтому $\lambda_{ae} = (k - 2 + \mu)/2$.

ЛЕММА 1.5. Связный редуцированный граф Тервиллигера без 3-клик является пятиугольником.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию Γ не содержит вершин с кликовыми окрестностями и вершин a таких, что $\Gamma = a^\perp$. Поэтому по теореме 1 [4] Γ является связным графом с $\mu = 1$.

Пусть $a \in \Gamma$, b, c – несмежные вершины из $[a]$. По редуцированности графа $[b] - a^\perp$ содержит вершину d , $[c] - a^\perp$ содержит вершину e . Теперь подграф $\Delta = \{a, b, d, e, c\}$ является пятиугольником. По лемме 1.4 $k_x = k$ для любой вершины x из Δ .

Теперь по связности Γ является регулярным графом. По лемме 1.1.3 [5] Γ является сильно регулярным графом. По теореме Тэйлора–Ливингстона [5, 1.5.3] сильно регулярный граф Тервиллигера без 3-лап является пятиугольником.

ЛЕММА 1.6. Пусть Γ – связный редуцированный граф без 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны заданной положительной степени α . Если Γ содержит четырехугольник $\{a, b; c, d\}$, $\mu = \mu(a, b)$, $\Delta = [a] \cap [b] \cap [c] \cap [d]$, то выполняются следующие утверждения:

- (1) максимальное значение μ равно $2(\alpha + 1)$ и достигается тогда и только тогда, когда Δ пусто;
- (2) если Δ не пусто и $[a] \cap [b] = \{c, d\} \cup \Delta$, то $[a] \cap [b]$ – полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, где $\mu = 2r = \alpha + 2$;
- (3) если $([a] \cap [b]) - (\{c, d\} \cup \Delta)$ содержит вершину e , без ограничения общности $e \in [c] - [d]$, то $k_c = k_e$, $\lambda_{ce} = \lambda_{ac} = \lambda_{ae} = \lambda_{bc} = \lambda_{be}$;
- (4) если $\alpha + 3 \leq \mu \leq 2\alpha + 1$, то степени всех вершин из $\{a, b, c, d\}$ равны k и $\lambda_{xy} = \lambda$ для любых смежных вершин x, y из $\{a, b, c, d\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 $\mu \leq 2\alpha + 2$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Δ пусто. Утверждение (1) доказано.

Пусть Δ не пусто и $[a] \cap [b] = \{c, d\} \cup \Delta$. Тогда $\mu = \alpha + 2$, поэтому $[a] \cap [b]$ – полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, где $\mu = 2r$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $([a] \cap [b]) - (\{c, d\} \cup \Delta)$ содержит вершину e и $e \in [c] - [d]$. Ввиду леммы 1.1 имеем $k_c = k_e$. Так как $k_a + \alpha - 2 = \lambda_{ad} + \lambda_{ac} = \lambda_{ad} + \lambda_{ae}$, то $\lambda_{ac} = \lambda_{ae}$. Аналогично, $k_e + \alpha - 2 = \lambda_{be} + \lambda_{ae} = \lambda_{be} + \lambda_{ce}$, поэтому $\lambda_{ae} = \lambda_{ce}$. Симметрично, $\lambda_{ce} = \lambda_{bc} = \lambda_{be}$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $\alpha + 3 \leq \mu \leq 2\alpha + 1$. Тогда $([a] \cap [b]) - (\{c, d\} \cup \Delta)$ содержит вершину e из $[c] - [d]$ и вершину f из $[d] - [c]$. Ввиду утверждения (3) $\lambda_{ac} = \lambda_{cb} = \lambda$, $\lambda_{ad} = \lambda_{db} = \lambda'$. Симметрично, $([c] \cap [d]) - (\{a, b\} \cup \Delta)$ содержит вершину g из $[a] - [b]$ и $\lambda_{ac} = \lambda_{ad}$. Значит, $\lambda = \lambda'$.

Для $x \in \{a, b, c, d\}$ имеем $k_x = 2\lambda + 2 - \alpha$.

ЛЕММА 1.7. Пусть Γ – сильно регулярный граф с $\mu = 1$. Тогда окрестность каждой вершины из Γ состоит из r изолированных s -клик и выполняются следующие утверждения:

- (1) $s + 1 < r$, $s + 1$ делит $r(r - 1)^2$; для $s = c^2 f$, где f свободно от квадратов, получим $r - 1 = (t + c)tf$ и $2t + c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s - 4)(s^2 - 2s - 4)$, если s не делится на 4, и $R(s) = cs(s - 4)(s^2 + 2s + 4)/16$, если s делится на 4;
- (2) параметр s не равен 2 и если $s = 3$, то $r = 7$;
- (3) если $r \leq 6$, то Γ является пятиугольником или графом Петерсена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ является сильно регулярным графом с $\mu = 1$. Тогда окрестность каждой вершины из Γ состоит из r изолированных s -клик для некоторых натуральных чисел r, s .

По теореме 4 [6] $s + 1 \leq r$ и выполняются оставшиеся утверждения из (1). Покажем, что $s + 1 \neq r$. В противном случае $t(t + c) = c^2$, но это уравнение не имеет целочисленных решений. Утверждение (1) доказано.

Пусть $s = 2$. Тогда $c = 1$, $f = 2$ и $R(2) = 16$. Противоречие с тем, что $2t + 1$ делит $R(s)$. Пусть $s = 3$. Тогда $c = 1$, $f = 3$ и $R(3) = 3$. Так как $2t + 1$ делит $R(s)$, то $t = 1$ и $r - 1 = 6$. Утверждение (2) доказано.

Если $r \leq 6$, то по утверждению (1) $s \leq 4$. Пусть $s = 4$. Тогда $c = 2$, $f = 1$ и $R(4) = 0$. Далее, $r - 1 = t(t + 2) > 4$, поэтому $t \geq 2$ и $r \geq 9$; противоречие. Ввиду утверждения (2) $s = 1$ и Γ является пятиугольником или графом Петерсена.

ЛЕММА 1.8. Пусть Γ – сильно регулярный граф без 3-клик с параметрами (v, k, λ, μ) , $k > \lambda + 1$. Тогда для каждой вершины $c \in \Gamma$ подграф $\Sigma = \Gamma(c)$ редуцирован.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1.3 подграф Σ является кореберно регулярным с $\mu(\Sigma) = 2\lambda + 2 - k$. Поэтому μ -подграфы из Γ регулярны степени $\alpha = 2\lambda + 2 - k$.

Допустим, что граф Σ не редуцирован. Так как Σ – регулярный граф, то в Σ найдутся такие две вершины d, e , что $d^\perp \cap \Sigma = e^\perp \cap \Sigma$. По сильной регулярности Γ подграф $\Gamma(c) \cap \Gamma(d) = \Gamma(d) \cap \Gamma(e)$ содержит ровно λ вершин. Отсюда следует, что подграфы $\Gamma(d) - \Gamma(c)$ и $\Gamma(e) - \Gamma(c)$ не пересекаются, и $\Gamma_2(c)$ содержит не меньше $2b_1$ вершин, где $b_1 = k - \lambda - 1$.

Возьмем теперь две несмежные вершины $f, g \in \Sigma$. Поскольку Γ не содержит 3-клик, имеет место равенство $\Gamma = f^\perp \cup g^\perp$. Но тогда подграфы $\Gamma(f) - \Gamma(c)$ и $\Gamma(g) - \Gamma(c)$ покрывают $\Gamma_2(c)$, и в $\Gamma_2(c)$ содержится не больше $2b_1$ вершин. Из доказанного в предыдущем

абзаце теперь следует, что $|\Gamma_2(c)| = 2b_1$, и подграфы $\Gamma(f) - \Gamma(c)$, $\Gamma(g) - \Gamma(c)$ не пересекаются. Это означает, что μ -подграф $\Gamma(f) \cap \Gamma(g)$ содержится в $c^\perp$ и $\alpha = \mu - 1$. Последнее равенство означает, что Γ – граф Тервиллигера. Но по лемме 1.5 сильно регулярный граф Тервиллигера без 3-клик – это пятиугольник. Противоречие с тем, что граф Σ не редуцирован. Лемма доказана.

2. Доказательство предложения. Пусть Γ является слабо редуцированным графом без 3-клик, в котором μ подграфы регулярны степени α , $\alpha > 0$. До конца раздела предполагаем, что $b^\perp \subset a^\perp$ для некоторых вершин $a, b \in \Gamma$. Среди вершин x со свойством $x^\perp \subset a^\perp$ выберем вершину b наибольшей степени.

ЛЕММА 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если вершина x из $[b] - \{a\}$ смежна с вершиной вне $a^\perp$, то $[x]$ не пересекает $[a] - b^\perp$;*
- (2) *подграф $[b]$ не является кликой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если вершина x смежна с вершиной c вне $a^\perp$ и вершиной d из $[a] - b^\perp$, то c, d смежны. Далее, в графе $[b] \cap [c]$ степень вершины x равна α . Противоречие с тем, что в графе $[a] \cap [c]$ вершина x смежна еще с d . Утверждение (1) доказано.

Пусть $[b]$ – клика. Тогда для любой вершины d из $[a] - b^\perp$ подграф $[b] \cap [d]$ является $(\alpha + 1)$ -кликой. Пусть $x \in ([b] \cap [d]) - \{a\}$. В силу выбора вершины b подграф $[x]$ не содержится в $a^\perp$; противоречие с утверждением (1).

ЛЕММА 2.2. *Для любых двух несмежных вершин c, d из $[b]$ подграфы $[c]$ и $[d]$ пересекают $[a] - b^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что c, d – несмежные вершины из $[b]$ и $[d]$ не пересекают $[a] - b^\perp$. Тогда $[a] - b^\perp \subset [c]$. Для $e \in [a] - b^\perp$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\alpha + 1$ вершин из $a^\perp$, попадающих в $[b]$. Противоречие с тем, что в графе $[b] \cap [e]$ вершина a смежна еще с вершиной c .

ЛЕММА 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $\Gamma^\perp = \{a\}$ и Γ является графом Тервиллигера;
- (2) *если c, d – несмежные вершины $[b]$, то $[b] = \{a, c, d\}$;*
- (3) Γ является пятиугольной пирамидой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по лемме 2.2 окрестности любых двух несмежных вершин из $[b]$ попадают в $a^\perp$. Поэтому $\Gamma = a^\perp$. Из слабой редуцированности следует, что $\Gamma^\perp = \{a\}$. Теперь степень вершины a в μ -подграфе равна α , поэтому указанный μ -подграф является $(\alpha + 1)$ -кликой. Утверждение (1) доказано.

Пусть c, d – несмежные вершины $[b]$, $e \in [c] \cap ([a] - b^\perp)$, $f \in [d] \cap ([a] - b^\perp)$. Так как Γ – граф Тервиллигера, то $[c] \cap [d]$ не пересекает $[a] - b^\perp$. Далее, для любой вершины x из $[e] \cap ([b] - \{a\})$ верно включение $[e] \subset c^\perp$. Действительно, $[c] \cap ([a] - b^\perp) = [x] \cap ([a] - b^\perp)$, и если $y \in [b] - c^\perp$, то $[f] \cap [x]$ не является кликой. По слабой редуцированности графа имеем $[e] \cap ([b] - \{a\}) = \{c\}$. Симметрично, $[f] \cap ([b] - \{a\}) = \{d\}$ и степень вершины b равна 3. Утверждение (2) доказано.

Теперь $f^\perp = g^\perp$ для любой вершины g из $[d] \cap ([a] - b^\perp)$, поэтому $|[d] \cap ([a] - b^\perp)| = 1$. Симметрично, $|[c] \cap ([a] - b^\perp)| = 1$ и $[a]$ является пятиугольником. Лемма, а вместе с ней и предложение доказаны.

3. Графы Тервиллигера без коронок. В этом разделе будут доказаны теорема 1 и следствие 1.

ЛЕММА 3.1. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера без 3-клик. Тогда Γ является кликовым расширением одного из следующих графов:

- (1) 2-пути или 3-пути, причем порядок клики, заменяющей не концевую вершину пути, равен μ ;
- (2) пятиугольника или пятиугольной пирамиды, причем порядок клики, заменяющей вершину пятиугольника, равен μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 [4] либо $\Gamma - \Gamma^\perp$ содержит вершину a с кликовой окрестностью, либо $\Gamma - \Gamma^\perp$ является кликовым расширением редуцированного графа.

В первом случае либо диаметр Γ равен 3 и Γ является кликовым расширением 3-пути, либо диаметр Γ равен 2 и Γ является кликовым расширением 2-пути. Ясно, что порядок клики, заменяющей не концевую вершину пути, равен μ , и утверждение (1) выполняется.

Во втором случае по лемме 1.5 $\Gamma - \Gamma^\perp$ является кликовым расширением пятиугольника, и утверждение (2) выполняется.

ЛЕММА 3.2. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера без 3-лап, содержащий 3-клику, Γ' – подграф на множестве вершин из Γ с некликовыми окрестностями. Тогда диаметр Γ больше 2 и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ является кликовым расширением графа икосаэдра;
- (2) Γ' – клика и Γ является кликовым расширением графа Δ , где Δ содержит δ -клику и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами клики;
- (3) Γ' является кликовым расширением графа с $\mu = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 [4] диаметр Γ больше 2. По условию $\Gamma^\perp$ – пустой граф. Пусть Γ' – подграф на множестве вершин из Γ с некликовыми окрестностями.

По теореме 1 [4] либо Γ является кликовым расширением графа икосаэдра, либо Γ' является кликовым расширением клики или графа с $\mu = 1$. По лемме 3.1 для $b \in \Gamma'$ подграф $[b]$ является кликовым расширением 2-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды.

Пусть Γ' является кликой. Тогда Γ содержит две несмежных вершины a, c с кликовыми окрестностями. Если $[a] \cap [c]$ содержит вершину b , то $\Gamma' \subset a^\perp \cup c^\perp$ и $\Gamma - b^\perp$ содержит вершину d с кликовой окрестностью. Заметим, что $[a] \cap [d]$ и $[c] \cap [d]$ содержатся в b , и если указанные μ -подграфы не пусты, то они совпадают с $[b] \cap [d]$. Противоречие с тем, что окрестность вершины из $[b] \cap [d]$ содержит 3-клик a, c, d . Поэтому один из этих подграфов, скажем, $[c] \cap [d]$, пуст и $\Gamma' \subset [a]$.

Пусть подграфы $[a], [c]$ не пересекаются для любых несмежных вершин $a, c \in \Gamma - \Gamma'$. Тогда $[b] \cap [c]$ является μ -кликой из Γ' для $b \in \Gamma' - [c]$.

Итак, если Γ' является кликой, то Γ является кликовым расширением графа Δ , где Δ содержит δ -клику и δ или $\delta - 1$ вершин степени 1, смежных с различными вершинами клики.

ЛЕММА 3.3. Пусть Γ – связный граф Тервиллигера без корон, содержащий 3-лапу. Тогда $\mu = 1$ и окрестность каждой вершины из Γ состоит из изолированных клик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu > 1$, то окрестность каждой вершины из Γ является графом Тервиллигера диаметра 2 без 3-лап, причем окрестность некоторой вершины содержит 3-клик. Противоречие с леммой 3.2.

Значит, $\mu = 1$. Теперь окрестность каждой вершины состоит из изолированных клик. Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 3.1–3.3.

ЛЕММА 3.4. Пусть Γ – связный граф, в котором окрестности вершин являются регулярными графами Тервиллигера диаметра 2. Если окрестность некоторой вершины не содержит 7-лап, то либо Γ является кликовым расширением графа икосаэдра, либо окрестность любой вершины из Γ является β -расширением графа Петерсена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \Gamma$, $\Sigma_0 = [a]$. По предложению 1.16.2 [5] Σ_0 является β_0 -расширением сильно регулярного графа Тервиллигера Σ_1 .

Допустим, что Σ_0 не содержит 7-лап. Снова по предложению 1.16.2 [5] окрестность любой вершины в графе Σ_1 является β_1 -расширением сильно регулярного графа Тервиллигера Σ_2 , и так далее. Таким образом, для некоторого $l \geq 0$ граф Σ_l является β_l -расширением сильно регулярного графа с $\mu = 1$. Так как Σ_l не содержит 7-лап, по лемме 1.7 Σ_l является кликовым расширением пятиугольника или графа Петерсена.

Если $l > 0$, то по теореме 1.16.3 [5] $s = \beta_l \leq 1$, поэтому Σ_l является пятиугольником или графом Петерсена. Связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра и имеет диаметр 3. По теореме 1.16.5 [5] связный локально Петерсеновский граф является дополнительным графом для треугольного графа $T(7)$, графом Конвея–Смита на 63 вершинах диаметра 4 (это антиподальное 3-накрытие $T(7)$) или графом Доро на 65 вершинах диаметра 3. Противоречие с тем, что Σ_{l-1} является графом Тервиллигера диаметра 2. Значит, $l = 0$.

Пусть $b \in \Sigma_0$, $\Sigma' = \Gamma(b)$. Если Σ_0 содержит 3-лапу, то $\Sigma'(a)$ является кликовым расширением 3-лапы и Σ' является кликовым расширением графа Петерсена. По связности графа окрестность любой вершины является β_0 -расширением графа Петерсена.

Если же Σ_0 не содержит 3-лап, то $\Sigma'(a)$ является кликовым расширением 2-пути и Σ' является кликовым расширением пятиугольника. Снова по связности графа окрестность каждой вершины из Γ является кликовым расширением пятиугольника и по теореме 1 Γ является β -расширением графа икосаэдра. Лемма доказана.

Допустим, что окрестность некоторой вершины из Γ не содержит корон. По теореме 1.16.5 [5] связный локально Петерсеновский граф является дополнительным графом для треугольного графа $T(7)$, графом Конвея–Смита на 63 вершинах диаметра 4 или графом Доро на 65 вершинах диаметра 3. Следствие 1 доказано.

4. Редуцированные графы без 3-клик. В этом разделе мы докажем теорему 2 и следствие 2. Пусть Γ – связный редуцированный граф без 3-клик, в котором каждый μ -подграф регулярный заданной положительной степени α . Допустим, что Γ не является сильно регулярным графом. Если Γ – граф Тервиллигера, то по теореме 1 Γ является пятиугольником. Значит, Γ содержит четырехугольник.

ЛЕММА 4.1. Γ не содержит несвязных μ -подграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $[a] \cap [b]$ несвязен. Тогда он состоит из двух изолированных клик C, D порядка $\alpha + 1$. Пусть c, e – две вершины из C . Тогда графы $c^\perp, e^\perp$ совпадают вне $d^\perp$ для любой вершины $d \in D$. Выберем вершину $x \in [c] - e^\perp$. Без ограничения общности, $x \in [a] \cap D^\perp$. Заметим, что $[x] \cap [b]$ содержит изолированную клику D , поэтому $[x] \cap [b] \cap c^\perp$ лежит в $e^\perp$. Но тогда в графе $[e] \cap [x]$ вершина c смежна еще с a и валентность c в этом графе не меньше $\alpha + 1$. Значит, $c^\perp = e^\perp$, что противоречит редуцированности графа.

ЛЕММА 4.2. Для любых двух несмежных вершин a, b получим $\mu_{ab} = \alpha + 1$ или $\alpha + 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mu_{ab} > \alpha + 2$. Выберем несмежные вершины c, d из $[a] \cap [b]$. Из лемм 1.6, 4.1 следует, что степени всех вершин из $\{a, b, c, d\}$ равны k и $\lambda = \lambda_{xy}$ для любых смежных вершин x, y из $\{a, b, c, d\}$.

Покажем, что степень любой вершины x из Γ равна k . Если $x \in [c] \cap [d]$, то $k_x = k$ по лемме 1.1. Пусть $e \in ([c] - [d]) - a^\perp$ и $k \neq k_e$.

Ввиду леммы 1.6 $\mu_{ae} = \alpha + 1$ или $\alpha + 2$. Пусть Γ' – подграф, индуцированный на множестве всех вершин из Γ степени k . Тогда $\mu(\Gamma') = \mu_{ab}$ и Γ' является сильно регулярным графом, содержащим геодезический 5-цикл $a_1 \dots a_5$. Пусть $e \in \Gamma - \Gamma'$. Тогда $[e] \cap \Gamma'$ является кликой. Без ограничения общности, e не смежна с a_1 . Тогда $e \in [a_3] \cap [a_4]$. Поэтому вершины a_2, a_5 не смежны с e ; противоречие.

ЛЕММА 4.3. Подграф Γ' , индуцированный на множестве всех вершин a из Γ таких, что $\mu(a, b) = \alpha + 2$ для некоторой вершины $b \in \Gamma_2(a)$, является полным многодольным графом $K_{s \times 2}$, где $2s = \alpha + 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как Γ не является графом Тервиллигера, найдутся несмежные вершины a, b с $\mu_{ab} = \alpha + 2$. Тогда $k_a + k_b - \alpha = v$ и $\mu_{cd} = \alpha + 2$ для любых двух несмежных вершин $c, d \in [a] \cap [b]$.

Пусть Γ' – подграф, индуцированный на множестве всех вершин a из Γ таких, что $\mu(a, b) = \alpha + 2$ для некоторой вершины $b \in \Gamma_2(a)$. Если Γ' содержит пятиугольник, то Γ' является сильно регулярным графом. Повторив рассуждения из последнего абзаца леммы 4.2, получим противоречие.

Значит, Γ' не содержит пятиугольников. Без ограничения общности, вершина a из Γ' имеет наименьшую степень в Γ . Допустим, что $\Gamma'(a) - [b]$ содержит вершину c . Тогда $[a] \cap [b] \cap [c]$ является $(\alpha/2 + 1)$ -кликой и $([b] \cap [c]) - [a]$ содержит вершину d . Так как Γ' не содержит пятиугольников, то $([a] \cap [b]) - [c] \subset [d]$. Поэтому $[b] \cap [c]$ не пересекает $[a]$ и является $(\alpha + 1)$ -кликой. Отсюда $k_a = k_c + 1$; противоречие.

Таким образом, Γ' является полным многодольным графом $K_{s \times 2}$, где $2s = \alpha + 4$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Для вершины a из Γ' через a^* обозначим единственную вершину из $\Gamma' - a^\perp$. Заметим, что для $e \in \Gamma - \Gamma'$ подграф $[e] \cap \Gamma'$ является s -кликой. Если $a \in \Gamma' - [e]$, то $k_a + k_e + 1 - \alpha = v$. Поэтому $k_b = k_e + 1$ для $b \in [e] \cap \Gamma'$ и $[a] \cap [e]$ содержит $\alpha/2$ вершин из $\Gamma - \Gamma'$. Пусть $f \in [e] \cap (\Gamma - \Gamma')$. Тогда $[f] \cap \Gamma'$ содержит a и $s - 1$ вершин из $[e]$. Поэтому $k_e = k_f = k_a - 1$, подграф Γ' является регулярным степени k и подграф $\Gamma - \Gamma'$ является регулярным степени $k - 1$. В частности, подграф $\Gamma - \Gamma'$ является кликой.

Положим $\beta = |\Gamma - \Gamma'|$. Тогда $k_a = \alpha + 2 + \beta/2$, $k_e = \alpha/2 + 2 + (\beta - 1)$, поэтому $\beta = \alpha + 2$. Как показано выше, если $a \in \Gamma'$, $e \in (\Gamma - \Gamma') - [a]$, то $([e] \cap \Gamma') - \{a^*\} \subset [f]$ для любой вершины $f \in (\Gamma - \Gamma') \cap [a]$. Симметрично, $([f] \cap \Gamma') - \{a\} \subset [g]$ для любой вершины $g \in (\Gamma - \Gamma') \cap [a^*]$. Противоречие с тем, что $\alpha \geq 1$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть Γ – связный редуцированный граф без корон, в котором каждый μ -подграф Δ реберно регулярен с заданными параметрами (v', k', λ') , $k' > 0$, и имеет диаметр не больше 2. Если Γ является регулярным графом Тервиллигера, то следствие 2 выполняется ввиду теоремы 1. Если Γ не является графом Тервиллигера и содержит 3-клик, то следствие выполняется по теоремам 1, 3 [2]. Допустим, что Γ не содержит 3-клик. По теореме 2 Γ является сильно регулярным графом без 3-клик. Ввиду леммы 1.3 каждый μ -подграф Δ сильно регулярен с $\mu(\Delta) = 2k' + 2 - v'$. По лемме 1.8 окрестности вершин в Γ являются редуцированными графами. Пусть $\lambda' > 0$, $a \in \Gamma$, $\Sigma = \Gamma(a)$. Тогда Σ является редуцированным графом без 3-клик, в котором μ -подграфы регулярны положительной степени λ' . По теореме 2 Σ является сильно регулярным графом. По теореме 8.8 [6] Γ – граф из заключения следствия. Пусть $\lambda' = 0$. Тогда окрестности вершин в Δ являются 2-кликами, поэтому Δ является m -угольником для $m = 4$ или 5. Пусть Σ является дополнительным графом для Γ .

Если Δ является четырехугольником, то либо Γ является октаэдром, либо Σ имеет параметры $(v, k, 0, \mu)$, где $v - 2k = 4$. В последнем случае по прямоугольному соотношению $(k + 3)\mu = k(k - 1)$ и $k + 3$ делит 12. Поэтому $k = 3$ или 9; соответственно, $\mu = 1$ или 6. Если $\mu = 1$, то Σ – граф Петерсена. Если же $\mu = 6$, то $\mu^2 + 4(k - \mu)$ не является квадратом натурального числа; противоречие. Итак, если Δ является четырехугольником, то Γ является октаэдром или треугольным графом $T(5)$.

Пусть Δ является пятиугольником. Тогда Σ имеет параметры $(v, k, 0, \mu)$, где $v - 2k = 5$. В этом случае по прямоугольному соотношению $(k + 4)\mu = k(k - 1)$ и $k + 4$ делит 20. Поэтому $k = 6$ или 16; соответственно $\mu = 3$ или 12. Противоречие с тем, что $\mu^2 + 4(k - \mu)$ должно быть квадратом натурального числа.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Numata M. A characterization of Grassman and Johnson graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1990. V. 48. P. 178–190.
- [2] Кабанов В. В. О графах без корон с регулярными μ -подграфами // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 6. С. 874–881.
- [3] Махнев А. А. Об одном классе графов без 3-лап // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 407–413.
- [4] Кабанов В. В., Махнев А. А. Графы без 3-лап с равномошными μ -подграфами // Изв. Урал. гос. ун-та. Матем., мех. 1998. № 10. С. 44–68.
- [5] Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. Springer-Verlag, 1989.
- [6] Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links // London Math. Soc. Student Texts 22. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1981.