Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Хабиров, Задача Гурса о непрерывном сопряжении радиальных прямолинейных движений газа, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 601–606

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 04:41:11

УДК 517.944+533

ЗАДАЧА ГУРСА О НЕПРЕРЫВНОМ СОПРЯЖЕНИИ РАДИАЛЬНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

С. В. Хабиров

Уравнения газовой динамики имеют изэнтропическое решение, описывающее радиальное прямолинейное движение частиц к центру и от центра с постоянными скоростями. Два таких решения можно непрерывно сопрячь, если решить задачу Гурса в пространственно подобной области с согласованными данными на характеристиках. Доказаны существование и единственность гладкого решения задачи Гурса в малом шаре для политропного газа с показателем $5/3$.

Библиография: 4 названия.

При групповом анализе уравнений газовой динамики выявлено множество точных решений, описывающих коллапсирование газа, когда размерность многообразия, занятого газом, уменьшается в некоторый момент времени, а плотность стремится к бесконечности. За коллапсом происходит взрывное расширение газа. Таковыми, например, являются барахронные решения [1].

При коллапсировании газа работа сил давления бесконечна, поэтому физически коллапс не реализуется. Особенность можно отсечь ударной волной, а за волной рассчитывать движение газа общего вида.

Возникает вопрос о возможности непрерывного сопряжения коллапсирующего движения и взрывного расширения. Это важно для приложений потому, что непрерывное сжатие не ограничено. С математической точки зрения получается пространственно подобная задача Гурса, для которой необходимо требовать согласование данных на характеристиках. Поэтому возникают условия разрешимости краевой задачи.

Доказательство разрешимости задачи Гурса о сопряжении простейшего коллапсирующего в точку радиального движения газа позволяет установить существование периодических радиальных движений газа под действием поршня.

Радиальное изэнтропическое движение газа описывается уравнениями

$$\begin{aligned} U_t + UU_r + 3aa_r &= 0, \\ a_t + Ua_r + 3^{-1}a(U_r + 2r^{-1}U) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где U – радиальная скорость, a – скорость звука, t – время, r – радиус сферы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 05-01-00775а, № 05-01-00080.

Уравнения (1) допускают перенос по времени (∂_t) , два растяжения $(t\partial_t + r\partial_r, r\partial_r + U\partial_U + a\partial_a)$ и проективное преобразование $(t^2\partial_t + tr\partial_r + (r - Ut)\partial_U + ta\partial_a)$. Кроме того допускается дискретное преобразование-отражение: $t' = -t, U' = -U$ [3].

Система (1) имеет решение

$$U = \frac{r}{t - t_0}, \quad a = \frac{a_0}{|t - t_0|}, \quad t_0 > 0, \quad (2)$$

которое описывает радиальное прямолинейное движение.

Движение частицы (сферы радиуса r) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dr}{dt} = U.$$

Мировая линия частицы есть прямая $r = r_1(t - t_0)(t_1 - t_0)^{-1}$, соединяющая события (t_1, r_1) , $t_1 < 0$, $(t_0, 0)$. Все частицы $0 \leq r_1 < \infty$ при $t = t_1 < t_0$ стремятся попасть в центр $r = 0$ при $t = t_0$. Происходит сжатие.

Характеристики $C_{\pm}$ системы (1) на решении (2) определяются из уравнений

$$\frac{dr}{dt} = U \pm a.$$

При $t < t_0$, $t_0 > 0$, характеристика C_- , приходящая в точку $(0, 0)$, задается равенством $rt_0 = -a_0t$.

Решение (2) с $t_0 > 0$ при $t < 0$ с помощью отражения от прямой $t = 0$ переходит в решение

$$U = \frac{r}{t + t_0}, \quad a = \frac{a_0}{t + t_0}, \quad t > 0,$$

с мировыми линиями $r = r_1(t + t_0)(t_0 - t_1)^{-1}$, которые расходятся из точки $(-t_0, 0)$. Характеристика C_+ на отраженном решении, приходящая в точку $(0, 0)$, есть прямая $t_0r = a_0t$.

В работе строится гладкое решение системы (1) в области между характеристиками C_- и C_+ , непрерывно примыкающее к характеристикам решения (2) и его отражения. Решение этой задачи Гурса в пространственно подобной области симметрично относительно отражения, поэтому вдоль мировой линии, пересекающей область, условия на характеристиках согласуются, а при $t = 0$ скорость $U = 0$. Скорость $U = 0$ также и при $r = 0$ [4].

Сделаем замену независимых переменных $s = t/r, r$. Система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} U_s + U(rU_r - sU_s) + 3a(ra_r - sa_s) &= 0, \\ a_s + U(ra_r - sa_s) + 3^{-1}a(rU_r - sU_s + 2U) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия на характеристиках записываются так:

$$C_{\pm}: s = \pm s_0, \quad U = \frac{\pm r}{s_0(r + a_0)}, \quad a = \frac{a_0}{s_0(r + a_0)}, \quad (4)$$

где $t_0 = s_0a_0$. Растяжение переменных $s/s_0 \rightarrow s, r/a_0 \rightarrow r, s_0U \rightarrow U, s_0a \rightarrow a$ приводит к задаче (3), (4) с $a_0 = s_0 = 1$, значит, параметры a_0, s_0 суть несущественные постоянные задачи.

В силу симметрии можно искать решение в области $-1 < s < 0$, тогда вместо краевого условия на C_+ выполняется условие $U = 0$ при $s = 0$. Кроме того, требуем $U = 0$ при $r = 0$.

Решение задачи разыскивается в виде степенных рядов

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(s)r^k, \quad a = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s)r^k. \quad (5)$$

Подстановка (5) в (3) и (4) с $a_0 = s_0 = 1$ и приравнивание к нулю коэффициентов при степенях переменной r дает рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов рядов (5)

$$\begin{aligned} U'_k - 3sa'_k + 3ka_k &= A_k(s), \\ -sU'_k + 3a'_k + (k+2)U_k &= 3B_k(s); \\ U_k &= (-1)^k, \quad a_k = (-1)^k \quad \text{при } s = -1; \\ U_k &= -(-1)^k, \quad a_k = (-1)^k \quad \text{при } s = 1; \\ U_k &= 0 \quad \text{при } s = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $A_1 = B_1 = 0$,

$$\begin{aligned} A_k(s) &= \sum_{j=1}^{k-1} [(sU'_j - jU_j)U_{k-j} + 3(sa'_j - ja_j)a_{k-j}], \\ 3B_k(s) &= \sum_{j=1}^{k-1} [3(sa'_j - ja_j)U_{k-j} + (sU'_j - (j+2)U_j)a_{k-j}], \end{aligned} \quad k = 2, 3, \dots \quad (8)$$

При $k = 1$ получаем ограниченное решение $U_1 = 2^{-1}s(3 - s^2)$, $a_1 = -2^{-1}(s^2 + 1)$.

В системе (6) правые части выражаются через функции U_j , a_j , $j < k$, поэтому уравнения (6) образуют неоднородную линейную систему для функций U_k , a_k . Общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{aligned} U_k &= 3(k+2)^{-1}[(s-k-1)(s+1)^{k+1}C_{1k} + (s+k+1)(1-s)^{k+1}C_{2k}], \\ a_k &= (s+1)^{k+1}C_{1k} + (1-s)^{k+1}C_{2k}. \end{aligned}$$

Варьируя постоянные C_{1k} , C_{2k} , получим представление решения системы (6) в области $-1 < s < 0$:

$$\begin{aligned} 2(k+2)U_k &= \int_s^0 \left[\left(3B_k(q) - \frac{q+k+2}{k+1}A_k(q) \right) \frac{(s-k-1)(s+1)^{k+1}}{(q+1)^{k+2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(3B_k(q) - \frac{q-k-2}{k+1}A_k(q) \right) \frac{(s+k+1)(1-s)^{k+1}}{(1-q)^{k+2}} \right] dq \\ &\quad + 2C_{1k0}(s-k-1)(1+s)^{k+1} + 2C_{2k0}(s+k+1)(1-s)^{k+1}, \\ 6a_k &= \int_s^0 \left[\left(3B_k(q) - \frac{q+k+2}{k+1}A_k(q) \right) \frac{(s+1)^{k+1}}{(q+1)^{k+2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(3B_k(q) - \frac{q-k-2}{k+1}A_k(q) \right) \frac{(1-s)^{k+1}}{(1-q)^{k+2}} \right] dq \\ &\quad + 6C_{1k0}(1+s)^{k+1} + 6C_{2k0}(1-s)^{k+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия $U_k = 0$ при $s = 0$ следует $C_{1k0} = C_{2k0} = C_{k0}$.

При $s = -1$ имеем

$$U_k = (-1)^k = \frac{k2^k}{k+2}N - \frac{1}{2}L, \quad a_k = (-1)^k = \frac{2^k}{3}N + \frac{1}{6}L, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} N &= 6C_{k0} + \int_{-1}^0 (3B_k(q) - (q-k-2)(k+1)^{-1}A_k(q))(1-q)^{-k-2} dq, \\ L &= \lim_{s \rightarrow -1} (1+s)^{k+1} \int_s^0 (3B_k(q) - (k+1)^{-1}(q+k+2)A_k(q))(1+q)^{-k-2} dq. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда следует необходимое условие существования решения задачи (3), (4):

$$L = 2(-1)^k(k-1)(k+1)^{-1}. \quad (12)$$

Покажем, что (12) выполняется. Для этого в выражениях (8) исключим производные в силу (6):

$$\begin{aligned} A_k(s) &= \sum_{j=1}^{k-1} [(P_j - jU_j)U_{k-j} + 3(Q_j - ja_j)a_{k-j}], \\ B_k(s) &= \sum_{j=1}^{k-1} [(Q_j - ja_j)U_{k-j} + 3^{-1}(P_j - (j+2)U_j)a_{k-j}], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} P_j &= s(1-s^2)^{-1}(A_j + 3sB_j - 3ja_j - (j+2)sU_j), \\ Q_j &= s(1-s^2)^{-1}(B_j + 3^{-1}sA_j - jsa_j - 3^{-1}(j+2)U_j). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда при $s \rightarrow -1$ в силу (7) следуют равенства

$$\begin{aligned} (-1)^k A_k(-1) &= -2^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (A_j + 3B_j) - (k-1)^2, \\ (-1)^k B_k(-1) &= -6^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j (A_j + 3B_j) - 3^{-1}(k-1)(k+1), \end{aligned}$$

которые приводят к рекуррентному уравнению

$$\sum_{j=1}^k D_j = -2k(k-1), \quad D_j = (-1)^j (A_j + 3B_j), \quad D_1 = 0.$$

Рекуррентное уравнение имеет решение $D_j = -4(j-1)$. Следовательно, из (13) вытекает

$$A_k(-1) = -(-1)^k(k-1) = B_k(-1)$$

и асимптотическое поведение подынтегрального выражения в пределе (11) имеет вид

$$3B_k(q) - (k+1)^{-1}(q+k+2)A_k(q) = -2(-1)^k(k-1) + O(q+1) \quad \text{при } q \rightarrow -1.$$

Выполняя интегрирование и переходя к пределу, получим (12). Из (10) получим значение постоянной

$$C_{k0} = (-1)^k 3^{-1} 2^{-k} (k+2)(k+1)^{-1} - 6^{-1} \int_{-1}^0 (3B_k(q) - (k+1)^{-1}(q-k-2)A_k(q))(1-q)^{-k-2} dq. \quad (15)$$

С такой постоянной формулы (5), (9) дают формальное решение краевой задачи (3), (4) с $a_0 = s_0 = 1$ в области $-1 \leq s \leq 0$.

Остается показать, что ряды (5) сходятся равномерно по s в некоторой области переменной r .

Пусть величины $a_j, U_j, A_j, B_j, j < k$, ограничены в области $-1 \leq s \leq 0$. Покажем, что величины A_k, B_k , вычисляемые по формулам (13), ограничены. Величины $P_j(s), Q_j(s)$ могут иметь особенность при $s \rightarrow -1$. Вычисляя предел, получим

$$P_j(-1) = 3Q_j(-1) = \frac{1}{2}(-1)^j(4j-1).$$

Значит, $\max\{|A_k|, 3|B_k|\} = \alpha_k$, где α_k — некоторое число.

Из формулы (15) оценивается постоянная $|C_{k0}| \leq 3^{-1}(2^{1-k} + k^{-1}\alpha_k)$. Поскольку $(1+s)^{k+1} + (1-s)^{k+1} \leq 2^{k+1}$, то из (9) следует неравенство

$$M_k = \max\{|a_k|, |U_k|\} \leq \frac{4}{3}(1 + k^{-1}2^k\alpha_k).$$

Оценим величину α_k как функцию переменной k . Для этого оценим функции $P_j(s)$ и $3Q_j(s)$, заданные формулами (14). Найдется такое число $\delta, 0 < \delta < 1$, не зависящее от j , что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |P_j(s)| &\leq \max_{-1 \leq s \leq \delta-1} |P_j(s)| + \max_{\delta-1 \leq s \leq 0} |P_j(s)| \\ &\leq 2^{-1}(4j-1) + \delta + \delta^{-1} \left[\alpha_j + \frac{8}{3}(2j+1)(1+j^{-1}2^j\alpha_j) \right]. \end{aligned}$$

Справедливо аналогичное неравенство для величины $3|Q_j|$.

Из формул (13) следует оценка

$$\begin{aligned} \alpha_k &\leq \frac{8}{3} \sum_{j=1}^{k-1} \left(1 + \frac{2^{k-j}\alpha_{k-j}}{k-j} \right) \left[\frac{4j-1}{2} + \delta + \delta^{-1} \left(\alpha_j + \frac{8(2j+1)}{3}(1+j^{-1}2^j\alpha_j) \right) \right] \\ &\leq \lambda \sum_{j=1}^{k-1} (2j+1)(1+j^{-1}2^j\alpha_j)(1+(k-j)^{-1}2^{k-j}\alpha_{k-j}), \end{aligned}$$

где $\lambda = 1 + \delta^{-1}$. Отсюда следует система неравенств

$$\beta_k \leq \sum_{j=1}^{k-1} (2j+1)\beta_j\beta_{k-j}, \quad \text{где } \beta_j = \frac{8}{3}\lambda(1+j^{-1}2^j\alpha_j), \quad \alpha_1 = 0.$$

Неравенства имеют решение $\beta_j = (3/5)(2j+1)^{-1}$. Отсюда следует

$$\alpha_j \leq \frac{8}{3}(1+j^{-1}2^j\alpha_j) \leq \frac{3}{5}\lambda^{-1}(2j+1)^{-1} \implies M_k \leq 2^k(\lambda k(k+1))^{-1}$$

и, значит, ряды (5) сходятся при $r < 1/2$.

Итак, существует единственное непрерывное сопряжение прямолинейного радиального сжатия с прямолинейным радиальным расширением.

Задача о сопряжении прямолинейного радиального расширения

$$U = r(t+t_0)^{-1}, \quad a = a_0(t+t_0)^{-1}, \quad -t_0 < t < 0,$$

с отраженным ($t \rightarrow -t$, $U \rightarrow -U$) прямолинейным радиальным сжатием

$$U = r(t-t_0)^{-1}, \quad a = a_0(t-t_0)^{-1}, \quad 0 < t < t_0,$$

решается так же, как предыдущая задача.

В переменных r , $s = t/r$ основные уравнения совпадают с (3), а краевые условия имеют вид $U = rs_0^{-1}(a_0 - r)^{-1}$, $a = a_0s_0^{-1}(a_0 - r)$ при $s = -s_0$; $U = 0$ при $s = 0$. После растяжения всех переменных сделаем $a_0 = s_0 = 1$. Для рядов (5) краевые условия принимают вид $U_k = a_k = 1$ при $s = -1$; $U_k = 0$ при $s = 0$. Нахождение коэффициентов рядов и доказательство сходимости доказывается без затруднений.

Пользуясь переносом по времени, решение второй задачи можно гладко сопрячь с решением первой задачи. С помощью отражений и переносов строится периодическое решение, описывающее непрерывное радиальное движение газового шара под действием сферического поршня.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чупахин А. П. Барохронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1, 2) и (1, 1) // Препринт № 4-98: Институт гидродинамики им. Лаврентьева, 1998.
- [2] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [3] Хабиров С. В. Непрерывное радиальное ограниченное движение газа под действием поршня // Прикл. мех. и техн. физ. 2004. Т. 45. № 2.
- [4] Крайко А. Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. матем. и мех. 1996. Т. 60. № 6. С. 1000–1007.

Институт механики Уфимского научного центра РАН
E-mail: habirov@anrb.ru

Поступило
30.01.2004
Исправленный вариант
07.07.2005