Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля на графах, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 4, 619–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:57:13

УДК 517.984

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФАХ

В. А. Юрко

Исследуются дифференциальные операторы Штурма–Лиувилля на компактных графах. Указаны свойства спектральных характеристик и изучаются три обратные задачи восстановления оператора: по так называемым функциям Вейля, по дискретным спектральным данным и по системе спектров. Для этих обратных задач доказаны теоремы единственности и получены процедуры построения решений методом спектральных отображений.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Статья посвящена решению обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на компактных графах. Дифференциальные операторы на графах (сетях, деревьях) часто встречаются в естествознании и технике (см. [1]–[8] и литературу в них). Большинство работ по спектральной теории на графах посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций. Обратные спектральные задачи в силу их нелинейности являются более трудными для исследования, и в настоящее время в теории обратных задач для дифференциальных операторов на графах имеются лишь отдельные фрагменты, не составляющие общей картины. Некоторые аспекты теории обратных задач на графах изучались в [4]–[8] и других работах, но в основном рассматривались только очень частные случаи. Отметим важную работу [8], в которой была первая попытка предложить глобальную постановку обратной задачи на компактных деревьях и дать подход к ее решению. Но к сожалению постановка обратной задачи в [8] оказалась переопределенной, и вопрос как правильно ставить обратную задачу остается открытым.

В данной статье мы даем постановки обратных задач для операторов Штурма–Лиувилля на компактных графах, которые не являются переопределенными и которые являются естественными обобщениями хорошо известных обратных задач для классических операторов Штурма–Лиувилля на интервале [9]–[11]. Мы вводим спектральные характеристики, которые однозначно определяют потенциал на графе, изучаем их свойства, доказываем соответствующие теоремы единственности и даем конструктивную процедуру для решения. Для исследования обратных задач на графах мы развиваем идеи метода спектральных отображений [12], [13]. Этот метод позволяет решать обратные

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00007, и программы “Университеты России”, грант № 04.01.042.

задачи для широкого класса графов. Так как различные классы графов требуют различной техники, мы ограничиваемся уравнениями Штурма–Лиувилля на деревьях (т.е. на графах без циклов). Отметим, что полученные результаты верны не только в самосопряженном случае, но также и в несамосопряженном, когда потенциал является комплекснозначной функцией на дереве.

2. Основные понятия. Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbb{R}^m$ с корнем v_0 , множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется *граничной*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b ; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Отношение ' $<$ ' определяет частичную упорядоченность на T . Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то мы будем называть v его *начальной точкой*, w его *конечной точкой* и будем говорить, что e *выходит из v и заканчивается в w* . Для каждой внутренней вершины v мы обозначим через $R(v) := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], w \in V\}$ множество ребер, выходящих из v . Для любой $v \in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется *порядком v* . Для $e \in \mathcal{E}$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1, r}} |v_j|$ называется *высотой* дерева T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$, – множество вершин порядка μ , и пусть $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$, – множество ребер порядка μ .

Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, 1]$ и параметризуется параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e = [v, w] \in \mathcal{E}$: если $z = z(x) \in e$, то $z(0) = w$, $z(1) = v$, т.е. $x = 0$ соответствует конечной точке w , а $x = 1$ соответствует начальной точке v . Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j , $j > p+1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно: $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

3. Уравнение Штурма–Лиувилля на дереве. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j \in J}$, $x \in [0, 1]$, где $J := \{j : j = \overline{1, r}\}$ и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j . Пусть $q = [q_j]_{j \in J}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T , которая называется *потенциалом*. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля на T :

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $j \in J$, λ – спектральный параметр, функции $y_j(x)$, $y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k ,

$k = \overline{p+1, r}$:

$$\begin{aligned} y_j(1) &= y_k(0) \quad \text{для всех } e_j \in R(v_k) \quad (\text{условие непрерывности}), \\ \sum_{e_j \in R(v_k)} y'_j(1) &= y'_k(0) \quad (\text{условие Кирхгофа}). \end{aligned} \quad (2)$$

Условия склейки (2) называются *стандартными условиями*. В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей (2) выражает баланс напряжений и т.д. Отметим, что в (2) мы имеем $2r - p - 1$ условий. Для того, чтобы определить краевую задачу для (1) нам нужно дополнительно $p+1$ условий в граничных вершинах $v_j, j = \overline{0, p}$. Для этого мы введем следующие линейные формы в граничных вершинах $v_j, j \in \Gamma$:

$$U_{js}(Y) := \sum_{\nu=0}^1 h_{js}^\nu Y_{|v_j}^{(\nu)}, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{0, p},$$

где h_{js}^ν – вещественные числа такие, что $\det[h_{js}^\nu]_{s, \nu=0,1} \neq 0$. Обозначим через L краевую задачу для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_{j0}(Y) = 0, \quad j = \overline{0, p}. \quad (3)$$

Мы также будем рассматривать краевые задачи $L_k, k = \overline{0, p}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$U_{k1}(Y) = 0, \quad U_{j0}(Y) = 0, \quad j = \overline{0, p} \setminus k. \quad (4)$$

Пусть $\Psi_k(x, \lambda) = [\psi_{kj}(x, \lambda)]_{j \in J}, k = \overline{0, p}$, – решения уравнения (1), удовлетворяющие (2) и краевым условиям

$$U_{j0}(\Psi_k) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{0, p}, \quad (5)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Функции Ψ_k называются *решениями Вейля* для (1) относительно краевой вершины v_k . Обозначим $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1, p}}$, где $M_k(\lambda) := U_{k1}(\Psi_k)$. Функции $M_k(\lambda)$ называются *функциями Вейля*, а $M(\lambda)$ называется *вектором Вейля* для уравнения (1).

Для определенности мы будем рассматривать случай

$$U_{j0}(Y) = Y'_{|v_j} + h_j Y_{|v_j}, \quad U_{j1}(Y) = Y_{|v_j},$$

т.е. $h_{j0}^1 = h_{j1}^0 = 1, h_{j1}^1 = 0, h_{j0}^0 = h_j$. Остальные случаи исследуются аналогично. Пусть $\varphi_j(x, \lambda), S_j(x, \lambda), j \in J, x \in [0, 1]$, – решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях

$$\varphi_j(0, \lambda) = S'_j(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_j(0, \lambda) = -h_j, \quad S_j(0, \lambda) = 0.$$

При каждом фиксированном x функции $\varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda)$, $S_j^{(\nu)}(x, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Кроме того,

$$\langle \varphi_j(x, \lambda), S_j(x, \lambda) \rangle \equiv 1,$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. Очевидно, что

$$\psi_{kk}(x, \lambda) = S_k(x, \lambda) + M_k(\lambda)\varphi_k(x, \lambda). \quad (6)$$

Обозначим $M_{kj}^1(\lambda) = \psi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) = \psi'_{kj}(0, \lambda) + h_j\psi_{kj}(0, \lambda)$. Тогда

$$\psi_{kj}(x, \lambda) = M_{kj}^0(\lambda)S_j(x, \lambda) + M_{kj}^1(\lambda)\varphi_j(x, \lambda). \quad (7)$$

В частности, при $k = \overline{1, p}$ имеем $M_{kk}^1(\lambda) = M_k(\lambda)$, $M_{kk}^0(\lambda) = 1$, $M_{kj}^0(\lambda) = 0$ для $j = \overline{1, p} \setminus k$. Подставляя (7) в (2) и (5), получим систему линейных алгебраических уравнений s_k относительно $M_{kj}^0(\lambda)$, $M_{kj}^1(\lambda)$. Известным методом (см., например, [11], [14]) можно показать, что определитель этой системы $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка $1/2$ и $\Delta(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи L вида (1)–(3), т.е. нули $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_l\}_{l \geq 0}$ задачи L . Решая систему s_k , получаем по формулам Крамера:

$$M_{kj}^s(\lambda) = \frac{\Delta_{kj}^s(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad s = 0, 1, \quad j = \overline{1, r},$$

где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^s(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (8)$$

где $\Delta_k(\lambda) := \Delta_{kk}^0(\lambda)$ является характеристической функцией краевой задачи L_k . Функция $\Delta_k(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ краевой задачи L_k вида (1), (2), (4). Отметим, что аналогично классическим операторам Штурма–Лиувилля можно показать, что λ_l и λ_{lk} вещественны и ограничены снизу. Таким образом, функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами $\{\lambda_l\}_{l \geq 0}$. Данные $S := \{\lambda_l, \alpha_{lk}\}_{l \geq 0, k = \overline{1, p}}$, где α_{lk} – вычеты $M_k(\lambda)$ в точках λ_l , называются *спектральными данными* для L .

В данной статье мы исследуем три обратные задачи восстановления потенциала $q = [q_j]_{j \in J}$ и коэффициентов $h = [h_j]_{j \in J}$ по следующим спектральным характеристикам:

- 1) по вектору Вейля $M = [M_k]_{k = \overline{1, p}}$;
- 2) по системе $p + 1$ спектров $\Sigma := \{\lambda_l, \lambda_{lk}, l \geq 0, k = \overline{1, p}\}$;
- 3) по спектральным данным S .

Для каждой из этих обратных задач мы даем конструктивную процедуру для решения и доказываем единственность решения. Отметим, что понятие вектора Вейля M является обобщением понятия функции Вейля (m -функции) для классического оператора Штурма–Лиувилля [11], [15]. Если $r = 1$ (т.е. дерево T есть интервал $[0, 1]$), то $p = 1$, и вектор Вейля M совпадает с классической функцией Вейля. Таким образом, обратная задача 1 является обобщением классической обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на интервале по функции Вейля или (что равносильно) по спектральной мере. Обратная задача 2 является обобщением классической обратной задачи Борга для оператора Штурма–Лиувилля на интервале по двум спектрам. Если $r = 1$, то $p = 1$ и обратная задача 2 совпадает с классической обратной задачей Борга по двум спектрам. Обратная задача 3 является обобщением классической обратной задачи Марченко для оператора Штурма–Лиувилля на интервале (см. подробнее [9], [11]).

4. Вспомогательные утверждения. Пусть $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im} \rho \geq 0$. Обозначим $\Lambda := \{\rho : \operatorname{Im} \rho \geq 0\}$. Известно (см. [14]), что при каждом фиксированном $j \in J$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1)

$$\{e_{j1}(x, \rho), e_{j2}(x, \rho)\}, \quad x \in [0, 1], \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \geq \rho^*,$$

со свойствами:

- 1) функции $e_{js}^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, непрерывны по $x \in [0, 1]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$;
- 2) для каждого $x \in [0, 1]$ функции $e_{js}^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, аналитичны по $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$;
- 3) равномерно по $x \in [0, 1]$ верны следующие асимптотические формулы:

$$e_{j1}^{(\nu)}(x, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1], \quad e_{j2}^{(\nu)}(x, \rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1], \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$, $\nu = 0, 1$.

Обозначим $\Lambda_\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}$, $\delta > 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $y_j(x, \rho)$ – решение уравнения (1) на ребре e_j , и пусть

$$\frac{y'_j(0, \rho)}{y_j(0, \rho)} = (-i\rho)r_j[1], \quad r_j \neq -1, \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Тогда при $\nu = 0, 1$, $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$, равномерно по $x \in [0, 1]$ имеем

$$y_j^{(\nu)}(x, \rho) = D_j(\rho)((-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1] - (r_j + 1)^{-1}(r_j - 1)(i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1]), \quad (11)$$

где $D_j(\rho)$ не зависит от x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя фундаментальную систему решений $\{e_{j1}(x, \rho), e_{j2}(x, \rho)\}$, получаем

$$y_j(x, \rho) = A_j(\rho)e_{j1}(x, \rho) + D_j(\rho)e_{j2}(x, \rho). \quad (12)$$

Из (9) и (12) следует, что

$$\frac{y'_j(0, \rho)}{y_j(0, \rho)} = (i\rho) \frac{A_j(\rho)[1] - D_j(\rho)[1]}{A_j(\rho)[1] + D_j(\rho)[1]}, \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty.$$

Учитывая (10), вычисляем $A_j(\rho) = D_j(\rho)(r_j + 1)^{-1}(r_j - 1)[1]$. Подставляя это соотношение в (12) и используя (9), приходим к (11).

ЛЕММА 2. Пусть $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$, и пусть r_j — число ребер, выходящих из v_j . Тогда при $\nu = 0, 1$, $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$ имеем

$$\psi_{0j}^{(\nu)}(x, \lambda) = B_j(\rho) \exp(i\rho\mu) \left((-i\rho)^{\nu-1} \exp(-i\rho x)[1] - (i\rho)^{\nu-1} d_j \exp(i\rho x)[1] \right), \quad (13)$$

где $d_j = 1$ при $j = \overline{1, p}$ и $d_j = (1 + r_j)^{-1}(1 - r_j)$ при $j = \overline{p+1, r}$. При этом для $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$ имеем

$$B_j(\rho) = b_j[1], \quad b_j \neq 0, \quad b_{p+1} = 1. \quad (14)$$

В частности, при $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\psi_{0j}^{(\nu)}(x, \lambda) = (-i\rho)^{\nu-1} b_j \exp(i\rho(\mu - x))[1], \quad \nu = 0, 1, \quad x \in (0, 1]. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $j = \overline{1, p}$. Тогда $\psi'_{0j}(0, \lambda) + h_j \psi_{0j}(0, \lambda) = 0$, и в силу (7)

$$\psi_{0j}(x, \lambda) = M_{0j}^1(\lambda) \varphi_j(x, \lambda). \quad (16)$$

Используя (16) и асимптотику

$$\varphi_j^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{2} \left((i\rho)^\nu \exp(i\rho x)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x)[1] \right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (17)$$

приходим к (13) для $j = \overline{1, p}$.

2) Докажем (13) для всех остальных ребер индукцией по $\mu = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1$, где σ — высота дерева T . Если $\mu = \sigma$ (т.е. $e_j \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$), то $1 \leq j \leq p$ и (13) верно согласно предыдущим рассуждениям.

Зафиксируем $\mu < \sigma$. Предположим, что (13) доказано для всех $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu+1)} \cup \dots \cup \mathcal{E}^{(\sigma)}$. Пусть $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$. Ясно, что если $e_k \in R(v_j)$, то $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu+1)}$. Поэтому для каждого $e_k \in R(v_j)$ (13) верно по предположению индукции. В частности, при $\rho \in \Lambda_\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $e_k \in R(v_j)$ имеем

$$\psi_{0k}(1, \lambda) = B_k(\rho) (-i\rho)^{-1} \exp(i\rho\mu)[1], \quad \psi'_{0k}(1, \lambda) = B_k(\rho) \exp(i\rho\mu)[1].$$

Используя условия склейки (2), вычисляем

$$\frac{\psi'_{0j}(0, \lambda)}{\psi_{0j}(0, \lambda)} = \sum_{e_k \in R(v_j)} \frac{\psi'_{0k}(1, \lambda)}{\psi_{0k}(1, \lambda)} = (-i\rho) r_j [1].$$

Применяя лемму 1, приходим к (13) с некоторым коэффициентом $B_j(\rho)$. Таким образом, (13) доказано для всех ребер $e_j \in \mathcal{E}$. Далее из (2) следует, что $\psi_{0j}(0, \lambda) = \psi_{0k}(1, \lambda)$ для всех $e_k \in R(v_j)$ и, следовательно, $B_k(\rho) = 2(r_j + 1)^{-1} B_j(\rho)[1]$. Так как $\psi'_{0, p+1}(1, \lambda) + h_0 \psi_{0, p+1}(1, \lambda) = 1$, то мы получаем (14). Поэтому (15) также имеет место.

Симметрично к (13)–(15) можно получить асимптотику для всех других решений Вейля Ψ_k , $k = \overline{1, p}$. В частности, следующее утверждение является следствием леммы 2.

ЛЕММА 3. При $k = \overline{1, p}$, $\nu = 0, 1$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_{kk}^{(\nu)}(x, \lambda) &= (i\rho)^{\nu-1} \exp(i\rho x)[1], \quad M_k(\lambda) = (i\rho)^{-1}[1], \\ \rho &\in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $\delta > 0$ – достаточно малое фиксированное число. Обозначим

$$G_\delta := \{\rho : |\rho - \rho_l| \geq \delta \quad \forall l \geq 0\},$$

где $\lambda_l = \rho_l^2$ – собственные значения краевой задачи L . Используя стандартную технику (см. [14]), можно показать, что

$$|\psi_{kk}^{(\nu)}(x, \lambda)| \leq C|\rho|^{\nu-1} \exp(i\rho x), \quad |M_k(\lambda)| \leq C|\rho|^{-1}, \quad \rho \in G_\delta \cap \Lambda, \quad x \in [0, 1]. \quad (19)$$

5. Задача $Z(T, v_0, a)$. Пусть $\Psi = [\psi_j]_{j \in J}$ – решение уравнения (1) на T , удовлетворяющее (2) и краевым условиям

$$\Psi|_{v_0} = a, \quad U_{j0}(\Psi) = 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad (20)$$

где a – комплексное число. Обозначим $m_j^1(\lambda) = \psi_j(0, \lambda)$, $m_j^0(\lambda) = \psi_j'(0, \lambda) + h_j \psi_j(0, \lambda)$, $j \in J$. Тогда

$$\psi_j(x, \lambda) = m_j^0(\lambda) S_j(x, \lambda) + m_j^1(\lambda) \varphi_j(x, \lambda). \quad (21)$$

Подставляя (21) в (2) и (20), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda)$, $j \in J$. Определитель этой системы есть $\Delta_0(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, мы находим матрицу перехода $[m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda)]_{j \in J}$ для T относительно v_0 и a . Задача вычисления матрицы перехода $[m_j^0(\lambda), m_j^1(\lambda)]_{j \in J}$ по формулам Крамера называется *задачей $Z(T, v_0, a)$* . Эта задача будет использоваться ниже для описания процедуры решения обратных задач.

6. Локальная обратная задача. Зафиксируем $k = \overline{1, p}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k , которая называется *задачей $IP(k)$* .

Задача $IP(k)$. По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x)$, $x \in [0, 1]$, и h_k .

Докажем единственность решения локальной обратной задачи $IP(k)$. Для этого наряду с T рассмотрим дерево $\tilde{T}$ того же вида, но с другими $\tilde{q}$ и $\tilde{h}$. Везде в дальнейшем, если символ α обозначает объект, относящийся к T , то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde{T}$.

ЛЕММА 4. Если $M_k(\lambda) = \tilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ п.в. на $[0, 1]$ и $h_k = \tilde{h}_k$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k и коэффициент h_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим матрицу $P^k(x, \lambda) = [P_{js}^k(x, \lambda)]_{j,s=1,2}$ по формуле

$$P^k(x, \lambda) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_k(x, \lambda) & \tilde{\psi}_{kk}(x, \lambda) \\ \tilde{\varphi}'_k(x, \lambda) & \tilde{\psi}'_{kk}(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k(x, \lambda) & \psi_{kk}(x, \lambda) \\ \varphi'_k(x, \lambda) & \psi'_{kk}(x, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\varphi_k(x, \lambda) = P_{11}^k(x, \lambda)\tilde{\varphi}_k(x, \lambda) + P_{12}^k(x, \lambda)\tilde{\varphi}'_k(x, \lambda). \quad (22)$$

Из (6) следует, что $\langle \varphi_k(x, \lambda), \psi_{kk}(x, \lambda) \rangle \equiv 1$ и, следовательно,

$$P_{1s}^k(x, \lambda) = (-1)^{s-1}(\varphi_k(x, \lambda)\tilde{\psi}_{kk}^{(2-s)}(x, \lambda) - \tilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x, \lambda)\psi_{kk}(x, \lambda)). \quad (23)$$

Используя (17)–(19) и (23), получаем

$$P_{1s}^k(x, \lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x \in (0, 1], \quad (24)$$

$$|P_{1s}^k(x, \lambda)| \leq C|\rho|^{1-s}, \quad \rho \in G_\delta \cap \Lambda, \quad x \in [0, 1]. \quad (25)$$

Согласно (6) и (23) имеем

$$\begin{aligned} P_{1s}^k(x, \lambda) = & (-1)^{s-1} \left((\varphi_k(x, \lambda)\tilde{S}_k^{(2-s)}(x, \lambda) - S_k(x, \lambda)\tilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x, \lambda)) \right. \\ & \left. + (\widetilde{M}_k(\lambda) - M_k(\lambda))\varphi_k(x, \lambda)\tilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x, \lambda) \right). \end{aligned}$$

Так как $M_k(\lambda) = \widetilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x функции $P_{1s}^k(x, \lambda)$ являются целыми по λ . Вместе с (24) и (25) это дает $P_{11}^k(x, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}^k(x, \lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (22), получаем $\varphi_k(x, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}_k(x, \lambda)$ при всех x и λ и, следовательно, $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ п.в. на $[0, 1]$ и $h_k = \tilde{h}_k$.

Используя метод спектральных отображений [12] для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k , можно получить конструктивную процедуру решения локальной обратной задачи $IP(k)$. Здесь мы только кратко объясним идеи; подробности и доказательства см. в [12]. Возьмем дерево $\tilde{T}$ с $\tilde{q} = 0$ и $\tilde{h} = 0$. Тогда $\tilde{\varphi}_k(x, \lambda) = \cos \rho x$. Зафиксируем $k = \overline{1, p}$. Обозначим $\lambda' = \min_{l \geq 0}(\lambda_l, \tilde{\lambda}_l)$ и возьмем фиксированное $\delta > 0$. В λ -плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma'$, где $\gamma^\pm = \{\lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda = \delta; \operatorname{Re} \lambda \geq \lambda'\}$, $\gamma' = \{\lambda : \lambda - \lambda' = \delta \exp(i\alpha), \alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)\}$. При каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ функция $\varphi_k(x, \lambda)$ является единственным решением следующего линейного интегрального уравнения

$$\tilde{\varphi}_k(x, \lambda) = \varphi_k(x, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) \widehat{M}_k(\mu) \varphi_k(x, \mu) d\mu, \quad (26)$$

где

$$\tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \tilde{\varphi}_k(t, \lambda) \tilde{\varphi}_k(t, \mu) dt, \quad \widehat{M}_k(\mu) := M_k(\mu) - \widetilde{M}_k(\mu).$$

Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (26) по формуле

$$q_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\varphi_k(x, \lambda) \tilde{\varphi}_k(x, \lambda))' \widehat{M}_k(\lambda) d\lambda$$

или по формуле $q_k(x) = \lambda + \varphi_k''(x, \lambda)/\varphi_k(x, \lambda)$. Кроме того, $h_k = -\varphi'(0, \lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным $\{\lambda_l, \alpha_{lk}\}_{l \geq 0}$. Для этого можно вычислить контурный интеграл в (26) по теореме о вычетах и преобразовать интегральное уравнение (26) к следующему линейному уравнению в пространстве ограниченных последовательностей (при каждом фиксированном x):

$$\tilde{\varphi}_{kns}(x) = \varphi_{kns}(x) + \sum_{l,j} \tilde{P}_{kns}^{lj}(x) \varphi_{klj}(x), \quad l, n \geq 0, \quad s, j = 0, 1,$$

где $\varphi_{kns}(x) = \varphi_k(x, \lambda_n^s)$, $\tilde{\varphi}_{kns}(x) = \tilde{\varphi}_k(x, \lambda_n^s)$, $\tilde{P}_{kns}^{lj}(x) = (-1)^j \tilde{D}_k(x, \lambda_n^s, \lambda_l^j) \alpha_{lk}^j$, $\lambda_l^0 = \lambda_l$, $\lambda_l^1 = \tilde{\lambda}_l$, $\alpha_{lk}^0 = \alpha_{lk}$, $\alpha_{lk}^1 = \tilde{\alpha}_{lk}$ (подробнее см. [12]).

7. Решения Вейля для внутренних вершин. Зафиксируем $v_k \in V$. Обозначим $T_k^0 := \{z \in T : v_k < z\}$, $T_k := T \setminus T_k^0$. Ясно, что T_k – дерево с корнем v_0 . Пусть Γ_k – множество граничных вершин T_k , и пусть E_k – множество граничных ребер T_k . Обозначим $J_k := \{j : e_j \in T_k\}$. Если $Y = [y_j]_{j \in J}$ – функция на T , то $\{Y\}_k := [y_j]_{j \in J_k}$ является функцией на T_k .

Зафиксируем $v_k \notin \Gamma$ (т.е. $k = \overline{p+1, r}$). Пусть $\Psi_k(x, \lambda) = [\psi_{kj}(x, \lambda)]_{j \in J_k}$ – решение уравнения (1) на T_k , удовлетворяющее (2) и краевым условиям $U_{j0}(\Psi_k) = \delta_{kj}$, $v_j \in \Gamma_k$, где $U_{k0}(Y) = Y|_{v_k}' + h_k Y|_{v_k}$, и h_k – вещественное число. Вектор Ψ_k является решением Вейля для (1) на T_k относительно вершины v_k . Обозначим через $M_k(\lambda) := \psi_{kk}(0, \lambda)$, $k = \overline{p+1, r}$, функции Вейля для T_k относительно v_k .

ЛЕММА 5. *Зафиксируем $v_m \notin \Gamma$. Пусть $e_k = [v_m, v_k] \in R(v_m)$. Тогда*

$$\Psi_m(x, \lambda) = \left\{ \frac{1}{A_{mk}(\lambda)} \Psi_k(x, \lambda) \right\}_m, \quad \text{т.е.} \quad \psi_{mj}(x, \lambda) = \frac{1}{A_{mk}(\lambda)} \psi_{kj}(x, \lambda), \quad j \in J_m, \quad (27)$$

$$M_m(\lambda) = \frac{1}{A_{mk}(\lambda)} \psi_{kk}(1, \lambda), \quad (28)$$

где

$$A_{mk}(\lambda) = \sum_{e_j \in R(v_m)} \psi_{kj}'(1, \lambda) + h_m \psi_{kk}(1, \lambda) \quad (29)$$

и Ψ_m, M_m не зависят от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $U_{j0}(\Psi_k) = U_{j0}(\Psi_m) = 0$ для $j \in J_m \setminus m$, то получаем (27) при некотором $A_{mk}(\lambda)$. Используя условие $U_{m0}(\Psi_m) = 1$, вычисляем $A_{mk}(\lambda) = \psi_{km}'(0, \lambda) + h_m \psi_{km}(0, \lambda)$. Учитывая (2), приходим к (29). Далее,

$$M_m(\lambda) = \psi_{mm}(0, \lambda) = \frac{1}{A_{mk}(\lambda)} \psi_{km}(0, \lambda).$$

Снова используя условия склейки (2), получаем (28).

Обозначим $M_{kj}^1(\lambda) = \psi_{kj}(0, \lambda)$, $M_{kj}^0(\lambda) = \psi_{kj}'(0, \lambda) + h_j \psi_{kj}(0, \lambda)$ при $k = \overline{p+1, r}$, $j \in J_k$. Тогда (6) и (7) верны для $k = \overline{1, r}$, $j \in J_k$, где $J_k = J$ при $k = \overline{1, p}$. В частности, это дает

$$\psi_{kj}^{(\nu)}(1, \lambda) = M_{kj}^0(\lambda) S_j^{(\nu)}(1, \lambda) + M_{kj}^1(\lambda) \varphi_j^{(\nu)}(1, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \quad k = \overline{1, r}, \quad j \in J_k, \quad (30)$$

$$\psi_{kk}^{(\nu)}(1, \lambda) = S_k^{(\nu)}(1, \lambda) + M_k(\lambda) \varphi_k^{(\nu)}(1, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \quad k = \overline{1, r}. \quad (31)$$

8. Решение обратной задачи 1. Пусть задан вектор Вейля $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$ для дерева T . Процедура решения обратной задачи 1 состоит в выполнении так называемых A_μ -процедур последовательно для $\mu = \sigma, \sigma - 1, \dots, 1$, где σ – высота дерева T . Опишем A_μ -процедуры.

A_σ -ПРОЦЕДУРА. 1) Для каждого ребра $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ решаем локальную обратную задачу $IP(k)$ и находим $q_k(x)$, $x \in [0, 1]$, на ребре e_k и h_k .

2) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\sigma)}$ строим $\varphi_k(x, \lambda)$, $S_k(x, \lambda)$, $x \in [0, 1]$, и вычисляем $\psi_{kk}^{(\nu)}(1, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, по (31).

3) Возвратная процедура. Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ и для всех $e_j, e_k \in R(v_m)$, $j \neq k$, строим $M_{kj}^s(\lambda)$, $s = 0, 1$, по формулам

$$M_{kj}^0(\lambda) = 0, \quad M_{kj}^1(\lambda) = \frac{\psi_{kk}(1, \lambda)}{\varphi_j(1, \lambda)}, \quad e_j, e_k \in R(v_m), \quad j \neq k.$$

4) Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\sigma-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем функцию Вейля $M_m(\lambda)$ по (28), где $A_{mk}(\lambda)$ и $\psi'_{kj}(1, \lambda)$ строятся согласно (29) и (30).

Выполним теперь A_μ -процедуры для $\mu = \overline{1, \sigma - 1}$ по индукции. Зафиксируем $\mu = \overline{1, \sigma - 1}$ и предположим, что $A_\sigma, \dots, A_{\mu+1}$ -процедуры уже выполнены. Выполним A_μ -процедуру.

A_μ -ПРОЦЕДУРА. Для каждого $v_k \in V^{(\mu)}$ функции Вейля $M_k(\lambda)$ заданы. В самом деле, если $v_k \in V^{(\mu)} \cap \Gamma$, то $M_k(\lambda)$ заданы априори, а если $v_k \in V^{(\mu)} \setminus \Gamma$, то $M_k(\lambda)$ были вычислены на предыдущих шагах по $A_\sigma, \dots, A_{\mu+1}$ -процедурам.

1) Для каждого ребра $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ решаем локальную обратную задачу $IP(k)$ и находим $q_k(x)$, $x \in [0, 1]$, на ребре e_k и h_k . Если $\mu = 1$, то обратная задача 1 решена, и мы останавливаем наши вычисления. Если $\mu > 1$, то переходим к следующему шагу.

2) Для каждого $e_k \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ строим $\varphi_k(x, \lambda)$, $S_k(x, \lambda)$, $x \in [0, 1]$, и вычисляем $\psi_{kk}^{(\nu)}(1, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, по (31).

3) Возвратная процедура. Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ и для любых фиксированных $e_k, e_i \in R(v_m)$, $i \neq k$, рассмотрим дерево $T_i^1 := T_i^0 \cup \{e_i\}$ с корнем v_m . Решая задачу $Z(T_i^1, v_m, \psi_{kk}(1, \lambda))$, вычисляем матрицу перехода $[M_{kj}^0(\lambda), M_{kj}^1(\lambda)]$ при $e_j \in T_i^1$.

4) Для каждого фиксированного $v_m \in V^{(\mu-1)} \setminus \Gamma$ вычисляем функцию Вейля $M_m(\lambda)$ по (28), где $A_{mk}(\lambda)$ и $\psi'_{kj}(1, \lambda)$ построены согласно (29) и (30).

Таким образом, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность, т.е. верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Задание вектора Вейля M однозначно определяет потенциал q на T и h . Решение обратной задачи 1 может быть получено последовательным выполнением $A_\sigma, A_{\sigma-1}, \dots, A_1$ -процедур.*

9. Решение обратной задачи 2. Пусть задана система спектров $\Sigma := \{\lambda_l, \lambda_{lk}; l \geq 0; k = \overline{1, p}\}$. Числа $\{\lambda_l\}_{l \geq 0}$ и $\{\lambda_{lk}\}_{l \geq 0}$ совпадают с нулями характеристических функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ соответственно. Эти функции являются целыми по λ порядка $1/2$. По теореме Адамара функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_k(\lambda)$ однозначно определяются своими

нулями с точностью до постоянных множителей:

$$\Delta(\lambda) = C \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right), \quad \Delta_k(\lambda) = C_k \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\right)$$

(случай, когда $\Delta(0) = 0$ и/или $\Delta_k(0) = 0$ требует небольшой модификации). Тогда, в силу (8)

$$M_k(\lambda) = m_k \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right)^{-1}, \quad k = \overline{1, p}, \quad m_k = \text{const}. \quad (32)$$

Используя (18), получаем

$$m_k = \lim_{|\rho| \rightarrow \infty} (i\rho)^{-1} \prod_{l=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_l}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{lk}}\right)^{-1}, \quad \rho \in \Lambda_\delta, \quad k = \overline{1, p}. \quad (33)$$

Таким образом, используя данные спектры Σ , можно однозначно построить вектор Вейля $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1, p}}$ по (32) и (33). Другими словами, решение обратной задачи 2 сводится к решению обратной задачи 1, и верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Задание системы спектров Σ однозначно определяет потенциал q на T и h . Для построения решения обратной задачи 2 вычисляем вектор Вейля M по (32), (33) и затем строим q и h , решая обратную задачу 1.*

10. Решение обратной задачи 3. Пусть заданы спектральные данные S . Возьмем положительные числа $R_N \rightarrow \infty$ так, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = R_N$ лежат в G_δ для всех N . Покажем, что

$$M_k(\lambda) = \sum_l \frac{\alpha_{lk}}{\lambda - \lambda_l}, \quad (34)$$

где ряд в (34) сходится “со скобками”:

$$\sum_l := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_l| < R_N^2}.$$

В самом деле, рассмотрим контурный интеграл

$$J_{N,k}(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} \frac{M_k(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu, \quad \lambda \in \text{int } \gamma_N, \quad (35)$$

где $\gamma_N = \{\mu : |\mu| = R_N^2\}$. Из (18) и (19) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{N,k}(\lambda) = 0.$$

С другой стороны, вычисляя контурный интеграл в (35) по теореме о вычетах, получаем

$$J_{N,k}(\lambda) = -M_k(\lambda) + \sum_{|\lambda_l| < R_N^2} \frac{\alpha_{lk}}{\lambda - \lambda_l}$$

и, следовательно, верно (34).

Таким образом, используя известные спектральные данные S , можно однозначно построить вектор Вейля $M(\lambda) = [M_k(\lambda)]_{k=\overline{1, p}}$ по (34). Другими словами, решение обратной задачи 3 сводится к решению обратной задачи 1, и верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Задание спектральных данных S однозначно определяет потенциал q на T и h . Для построения решения обратной задачи 3 вычисляем вектор Вейля M по (34) и затем строим q и h , решая обратную задачу 1.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Все полученные в статье результаты верны также и для несамосопряженных операторов Штурма–Лиувилля на T с комплекснозначными потенциалами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О краевой задаче на графе // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. С. 701–703.
- [2] Покорный Ю. В., Боровских А. В. Дифференциальные уравнения на сетях (геометрических графах). Итоги науки и техн. Современная математика и ее приложения. Т. 106. М.: ВИНТИ, 2002.
- [3] Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственных сетях // УМН. 2004. Т. 59. №6. С. 115–150.
- [4] Герасименко Н. И. Обратная задача рассеяния на некомпактном графе // ТМФ. 1988. Т. 74. №2. С. 187–200.
- [5] Carlson R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. №10. P. 4069–4088.
- [6] Pivovarchik V. N. Inverse problem for the Sturm–Liouville equation on a simple graph // SIAM J. Math. Anal. 2000. V. 32. №4. P. 801–819.
- [7] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A Math. Gen. 2002. V. 35. P. 101–121.
- [8] Belishev M. I. Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Problems. 2004. V. 20. P. 647–672.
- [9] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [10] Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
- [11] Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications. New York: Nova Science Publ., 2001.
- [12] Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 2002.
- [13] Юрко В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратовского пединститута, 2001.
- [14] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [15] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступило
16.02.2005