Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева, Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 643–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2736>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 02:34:42

УДК 517.91/93

МЕТОД СТРУКТУРНОГО СРАЩИВАНИЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАЙТХИЛЛА С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

К. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева

Методом структурного сращивания строится равномерно пригодная явная асимптотика решения возмущенного модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой.

Библиография: 12 названий.

Здесь методом структурного сращивания (СС) строится равномерная асимптотика решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой в случае, когда соответствующее невозмущенное уравнение в начале координат имеет полюс произвольного натурального порядка.

В [1], [2] метод СС применялся для получения асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла в случае, когда решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс порядка одна вторая и одна третья в особой точке.

В [3] метод СС применялся для построения асимптотики равномерного приближения решения обобщенного сингулярно возмущенного линейного неоднородного модельного уравнения Коула [4] с малым параметром при старшей производной второго порядка, соответствующее вырожденное уравнение которого имеет слабую особенность в начале координат.

Ранее для получения равномерных приближений решения сингулярно возмущенных уравнений с малым параметром при высшей производной применялся принцип Ван Дайка [5], [6]:

m -членное внутреннее разложение n -членного внешнего разложения решения равно n -членному внешнему разложению m -членного внутреннего разложения.

Метод Ван Дайка развит и применен к различным уравнениям в обыкновенных и в частных производных А. Найфе [6], Лагерстромом [7], А. М. Ильиным [8] и другими.

Метод СС является упрощением и обобщением метода Ван Дайка и гласит: внешние и внутренние решения разлагаются по целым или дробным степеням малого параметра и коэффициенты этих рядов имеют одинаковые асимптотические структуры в общей области их существования, причем эти коэффициенты в общем случае зависят от полиномов логарифмов, зависящих от малого параметра; степень полиномов растет с ростом приближения. Из метода СС вытекает принцип Ван Дайка, а также этот метод позволяет получить оценку остаточного члена естественным путем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Внешней переменной* называется независимая переменная, содержащаяся в исходном уравнении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Внешним решением* называется решение сингулярно возмущенного уравнения, удовлетворяющее одному из возможных начальных условий (или краевых задач) вне некоторой окрестности особой точки невозмущенного уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Внутренним решением* называется решение исходного уравнения, которое удовлетворяет уравнению в некоторой окрестности особой точки невозмущенного уравнения.

Отметим, что для возможности сращивания области существования внешнего и внутреннего решений должны иметь непустое пересечение.

Рассмотрим модельное уравнение Лайтхилла [9]

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) + q(x)u = r(x), \quad u(1) = u^0, \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $q(0) = q_0 > 0$, u^0 — постоянная, $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$, т.е. бесконечно дифференцируемые функции.

Ставится задача: построить явное асимптотическое представление решения задачи (1) на всем отрезке $[0, 1]$.

Для невозмущенной задачи (1) ($\varepsilon = 0$)

$$xu_0'(x) + q(x)u_0(x) = r(x), \quad u(1) = u^0,$$

точка $x = 0$ является регулярной особой точкой и его решение представляется в виде

$$\begin{aligned} xu_0'(x) &= q(x)u_0(x) + r(x), \quad u(1) = u^0, \\ u_0(x) &= \frac{a^{(0,0)}(x)}{x^{q_0}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a^{(0,0)}(x) &= p(x) \left[a_0 + \int_0^x s^{q_0-1} p^{-1}(s) r(s) ds \right], \quad p(x) = \exp \left\{ \int_0^x \left(\frac{q_0 + q(s)}{s} \right) ds \right\}, \\ a_0 &= a_0^{(0,0)} = p^{-1}(1)u^0 - \int_0^1 p^{-1}(s) s^{q_0-1} r(s) ds, \quad a^{(0,0)}(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]. \end{aligned}$$

Если решение задачи (1) искать классическим методом малого параметра в виде

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots,$$

то увеличением индекса k особенность функции $u_k(x)$ увеличивается и этот ряд перестает быть асимптотическим рядом в окрестности особой точки $x = 0$. Впрочем, это сразу видно из представления (2) решения невозмущенного уравнения.

Задачу (1) впервые исследовал Лайтхилл, затем В. Вазов, И. Сибуйя, и К. Ж. Такахаши, К. Комсток, П. Хабетс, Сянь-Сюэ-Сен и К. Алымкулов. Обзор работ, посвященных уравнению Лайтхилла, можно найти в [10], [11].

Метод Лайтхилла (или Пуанкаре–Лайтхилла–Го) предлагает искать решение задачи (1) в параметрическом виде

$$\begin{aligned} u(\xi) &= u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^n u_n(\xi) + \cdots, \\ x &= \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^n x_n(\xi) + \cdots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_0(\xi)$, $u_j(\xi)$, $x_j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots$, определяются подстановкой (3) в (1) и приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях ε . Однако для определения двух пар функций $(u_j(\xi), x_j(\xi))$ получается одно уравнение. Поэтому, чтобы исключить неопределенность в определении этих функций, в [10], [11] был предложен метод униформизации. В них вместо задачи (1) предлагается решить униформизованную задачу

$$\begin{aligned} \xi \frac{du}{d\xi} &= r(x(\xi)) - q(x(\xi))u(\xi), & u(1) &= u^{(0)}, \\ \xi \frac{dx}{d\xi} &= x(\xi) + \varepsilon u(\xi), & x(1) &= 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\xi \in [\xi_0(\varepsilon), 1]$, $\xi_0(0) = 0$; $\xi_0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$. Теперь подстановка рядов (3) в (4) определяет функции $(u_j(\xi), x_j(\xi))$ единственным образом.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$, $q_0 = q_0(0) > 0$. Тогда решение задачи (1) представимо в параметрическом виде (3) и

$$\begin{aligned} u_j(\xi) &= O(\xi^{-q_0(x+1)}), & x_j(\xi) &= O(\xi^{-q_0 n}), \\ |u(\xi) - A_{n\xi} u(\xi, \varepsilon)| &\leq M \left(\frac{\varepsilon}{x^{q_0}} \right)^{n+1}, & |x(\xi) - A_{n\xi} x(\xi, \varepsilon)| &\leq M \left(\frac{\varepsilon}{\xi^{q_0}} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{n\xi} u &= u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^n u_n(\xi), \\ A_{n\xi} x &= \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots + \varepsilon^n x_n(\xi), & \xi_0 &= O(\varepsilon^{1/(q_0+1)}), \\ u(0) &\sim a_0 \left(\frac{\varepsilon a_0}{(1+q_0)} \right)^{1/(q_0+1)}, & \xi_0(\varepsilon) &\sim \left(\frac{\varepsilon a_0}{(1+q_0)} \right)^{1/(q_0+1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что из (3) мы не можем, применяя теорему о неявных функциях, исключить параметр ξ и получить равномерно пригодное представление в виде

$$u(x, \varepsilon) = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + \cdots + \varepsilon^n U_n(x) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где

$$U_j(x) = U_j(x, \varepsilon) = O(1), \quad j \geq 0.$$

Перейдем к задаче (1) и пусть далее $q_0 = m$, $a_0 \neq 0$. Задача (1) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon x^{-m} p(x) \int_1^x p^{-1}(s) s^{m-1} u(s) u'(s) ds$$

или после интегрирования по частям

$$u(x) = u_0(x) - \varepsilon(2x)^{-1}u^2(x) + \varepsilon 2^{-1}x^{-m}p^{-1}(1)p(x)(u^{(0)})^2 + \frac{\varepsilon}{2}x^{-m}p(x) \int_1^x s^{m-2}G_1(s)u^2(s) ds, \quad (5)$$

где

$$G_1(x) = (m-1)p^{-1}(x) - xp^{-2}(x)p'(x).$$

В (5) удобно сделать подстановку

$$u(x) = x^{-m}p(x)\dot{z}. \quad (6)$$

Тогда

$$z(x) = a^{(0,0)}(x)p^{-1}(x) - \frac{\varepsilon}{2}x^{-1-m}p(x)z^2(x) + \varepsilon b + \varepsilon \int_1^x G(s)s^{m-2}u^2(s) ds, \quad (7)$$

где

$$b = \frac{1}{2}p^{-1}(1)(u^{(0)})^2, \quad G(x) = \frac{1}{2}[(m-1)p(x) - xp'(x)].$$

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$z(x) = z_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots, \quad (8)$$

где $z_0(x) = p^{-1}a^{(0,0)}(x)$, а $u_k(x)$ — пока неопределенные функции. Подставляя (7) в (8) получим

$$u_1(x) = -\frac{1}{2}x^{-1-m}p(z_0)^2 + b + \int_1^x s^{-m-2}G(s)z_0^2(s) ds, \quad (7.1)$$

$$u_2(x) = \frac{-x^{-m}}{2}z_0u_1 + \int_1^x s^{-m-2}G(s)z_0(s)u_1(s) ds, \quad (7.2)$$

.....

$$u_{2k}(x) = -x^{-m-1}f_{2k}(u_1, \dots, u_{2(k-1)}) + \int_1^x s^{-m-2}G(s)f_{2k}(u_1(s), \dots, u_{2(k-1)}(s)) ds, \quad (9.2k)$$

$$u_{2(k+1)}(x) = -x^{-m-1}f_{2(k+1)}(u_1, \dots, u_{2k}) + \int_1^x s^{-m-2}G(s)f_{2(k+1)}(u_1(s), \dots, u_{2k}(s)) ds, \quad (9.2k+1)$$

.....

где

$$f_{2k} = 2z_0u_{2k-1} + 2u_1u_{2k-2} + \dots + 2u_ku_{k-1},$$

$$f_{2(k+1)} = z_0u_{2k} + u_1u_{2k-1} + \dots + u_{k-1}u_{k+1} + \frac{u_k^2}{2}.$$

Регуляризируя интеграл в (7.1) в смысле Адамара [11], его можно представить в виде

$$u_1(x) = x^{-m-1}a^{(1,0)}(x) + \ln x(a^{(1,1)}(x)),$$

где $a^{(1,0)}(x), a^{(1,1)}(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$. Далее, методом математической индукции показывается, что

$$u_n(x) = x^{-n(m+1)}a^{(n,0)}(x) + \dots + x^{-(n-s)(m+1)}\ln^s x(a^{(n,s)}(x)) + \dots + \ln^n x(a^{(n,n)}(x)), \quad (10.n)$$

где

$$a^{(n,j)}(x) \in C^{(\infty)}[0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

С учетом (6) и (10.n) внешнее решение (отметим, что x – внешняя переменная) $u(x)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} u(x) = & x^{-m}\{a^{(0,0)}(x) + \varepsilon x^{-m-1}[a^{(1,0)}(x) + x^{m+1} \ln x a^{(1,1)}(x)] \\ & + \dots + (\varepsilon x^{-m-1})^n[a^{(n,0)}(x) + x^{m+1} \ln x a^{(n,1)}(x) \\ & + \dots + x^{(m+1)n} \ln^n x a^{(n,n)}(x)] + \dots\}, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Формула (11) выражает структуру внешнего решения задачи (1). Из (11) видно, что этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $I(\beta) = [\varepsilon^\beta, 1]$, $\beta < 1/(m+1)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$ и $a_0 \neq 0$. Тогда внешнее решение (11) задачи (1) является асимптотическим на $I(\beta)$ и поэтому

$$|u - A_{n(m+1)x}u| \leq Mx^{-m} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{(m+1)(n+1)}, \quad (12)$$

где

$$A_{n(m+1)x}u = u_0 + x^{-m} \sum_{i=1}^n \varepsilon^i u_i(x), \quad \varepsilon = \mu^{m+1}.$$

Здесь и далее M – постоянная, не зависящая от ε .

Теперь построим внутреннее решение задачи (1). Для этого в (1) сделаем подстановку

$$u = V(t, \mu) = \mu^{-m}v(t, \mu), \quad x = \mu t. \quad (13)$$

Переменная t называется *внутренней переменной*. Для $v(t)$ получим уравнение

$$(t + v(t))v'(t) = q(\mu t)v(t) + \mu^m r(\mu t). \quad (14)$$

Чтобы сращивать внешнее решение с внутренним решением $V(t, \mu)$, внешнее решение надо записать по внутренней переменной. Имеем

$$u(x, \varepsilon)|_{x=\mu t} = \mu^{-m}[U_0(t) + \mu U_1(t) + \dots + \mu^m U_m(t) + \mu^{m+1} U_{m+1}(t, \mu) + \dots], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} U_0(t) &= t^{-m} u^{(0,0)}(\tau), \quad U_1(t) = t^{1-m} u^{(1,0)}(\tau), \quad \dots, \quad U_m(t) = u^{(m,0)}(\tau), \\ U_j(t) &= t^{-m} [t^j u^{(j,0)}(\tau) + \dots + t^{j-s(m+1)} \ln^s \mu t u^{(j,s)}(\tau) + \dots \\ &\quad + t^{j-[j/(m+1)](m+1)} \ln^{[j/(m+1)]} \mu t u^{(j,[j/(m+1)])}(\tau)], \end{aligned} \quad (15.j)$$

$$u^{(j,s)}(t) \equiv 0, \quad j < m+1, \quad s = 1, 2, \dots, \left[\frac{j}{m+1} \right],$$

$$u^{(\nu(m+1)+i,k)}(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{(\nu-k)(m+1)+i}^{(j+k,k)} \tau^j, \quad k = 0, 1, \dots, \nu, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

$$\tau = \tau(t) = t^{-m-1}, \quad a^{(i,j)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i,j)} x^k, \quad x \rightarrow 0.$$

Знак $[b]$ означает целую часть числа b .

Из (15.j) видно, что ряд (15) является асимптотическим на отрезке $x \in J(\alpha, \beta) = [\varepsilon^\beta, \varepsilon^\alpha]$ или при $t \in \omega(\alpha, \beta) = [\varepsilon^{\beta-1/(m+1)}, \varepsilon^{\alpha-1/(m+1)}]$, так как мы разложили функции $a^{(i,j)}(x)$ в ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i,j)} x^k$, которые являются асимптотическими при $x \in \mathfrak{J}(\alpha) = [0, \varepsilon^\alpha]$. С другой стороны $x \in J(\beta)$. Отрезок $I(\alpha, \beta)$ является областью пересечения внешнего и внутреннего решений. Структурное представление (15) внешнего решения на отрезке $\omega(\alpha, \beta)$ определяется единственным образом.

Решение уравнения (14) ищем в виде ряда

$$v(t) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \dots \quad (16)$$

Тогда для определения функций $v_j(t)$ получим уравнения

$$(t + v_0)v_0'(t) + m v_0(t) = 0, \quad (17.0)$$

$$L v_1 := (t + v_0)v_1' + (m + v_0')v_1 = q_1 t v_0 := f_{1-m}^{(1)}(t), \quad (17.1)$$

$$L v_2 := -v_1 v_1' + q_1 t v_1 + q_2 t^2 v_0 := f_{2-m}^{(1)}(t), \quad (17.2)$$

.....

Решение уравнения (17.0) имеет вид

$$t = c_0 v_0^{-1/m} - \frac{v_0}{(m+1)}. \quad (18)$$

Здесь и далее c_k – постоянные интегрирования.

Пусть $c_0 > 0$; тогда решение этого уравнения определено при $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Асимптотика $v_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$ ($t \geq t_0 = \varepsilon^{\beta-1/m}$) имеет структуру $U_0(t)$:

$$v_0(t) = t^{-m} (c_0^m + v_1^{(0)} \tau + v_2^{(0)} \tau^2 + \dots).$$

Поэтому, сравнивая $v_0(t)$ с $U_0(t)$ из (15.0), получим

$$c_0^m = a_0^{(0,0)}.$$

Отсюда по принципу СС имеем

$$v_0(t) = U_0(t), \quad t \geq t_0.$$

Из (18) вытекает, что

$$0 < v_0(t) \leq v_0(0) = (c_0(m+1))^{m/(m+1)}, \quad v_0(t) \leq \left(\frac{c_0}{t}\right)^m, \quad t > 0.$$

Уравнения (17.j), $j = 1, 2, \dots$, являются линейными неоднородными и точка $t = 0$ не является особой точкой этих уравнений. Поэтому решения этих уравнений определены на $\mathbb{R}_+$ и мы должны определять их степень роста при $t \rightarrow \infty$.

Фундаментальное решение однородного уравнения $Lv_1 = 0$ имеет вид

$$\Phi_{-m}(t) = \frac{Y_{1-m}(t)}{(t + v_0(t))},$$

где

$$\begin{aligned} Y_{1-m}(t) &= \exp \left\{ (1-m) \int_0^t \frac{ds}{s + v_0(s)} \right\} \in C^{(\infty)}[0, \infty), \\ \Phi_{-m}(t) &= \frac{1}{t^m} (\varphi_0^{(-m)} + \varphi_1^{(-m)} \tau + \varphi_2^{(-m)} \tau^2 + \dots), \quad t \rightarrow \infty, \quad \varphi_j^{(-m)} = \text{const}, \\ f_{1-m}^{(1)}(t) &= t^{1-m} (f_0^{(1-m)} + f_1^{(1-m)} \tau + f_2^{(1-m)} \tau^2 + \dots), \quad t \rightarrow \infty, \quad f_j^{(1)} = \text{const}. \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения (17.1) представляется в виде

$$v_1(t) = \Phi_{-m}(t)[c_1 + g^{(1)}(t)],$$

где

$$g^{(1)}(t) = \int_0^t f^{(1)}(\tau(s)) ds, \quad f^{(1)}(\tau) = Y_{1-m}^{-1}(t) f_{1-m}^{(1)}(t).$$

Регуляризуя интеграл в $g^{(1)}(t)$ в смысле Адамара, его можно представить в виде

$$\begin{aligned} g^{(1)}(t) &= b^{(1,0)} + t g^{(1,0)}(\tau), \\ b^{(1,0)} &= \int_0^1 f^{(1)}(\tau(s)) ds + \int_1^\infty [f^{(1)}(\tau(s)) - f_0^{(1)}] ds - f_0^{(1)}, \\ g^{(1,0)}(\tau) &= \int_t^\infty [f_0^{(1)} - f^{(1)}(\tau(s))] ds = g_0^{(1,0)} + g_1^{(1,0)} \tau + g_2^{(1,0)} \tau^2 + \dots. \end{aligned}$$

Если выбрать c_1 из условия $c_1 + b^{(1,0)} = 0$, то при $t \rightarrow \infty$

$$v_1(t) = t \Phi_{-m}(t) g^{(1,0)}(\tau(t))$$

имеет ту же структуру, что и $U^{(1,0)}(t)$; значит,

$$v_1(t) = U_1(t) = O(t^{1-m}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Аналогично определяются остальные функции $v_j(t) \in C^{(\infty)}[0, \infty)$, $j \geq 2$, и постоянные интегрирования c_j определяются так, чтобы $v_j(t)$ имели ту же структуру, что и $U_j(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т.е.

$$v_j(t) = U_j(t) = O \left[t^{-m} (t^{(j)} + \ln^{[k/(m+1)]} \frac{1}{\mu}) \right] = O(t^{-m+j}), \quad t \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнено условие теоремы 1 и $a_0 > 0$. Тогда внутреннее решение задачи (1) представляется в виде

$$V(t, \mu) = \frac{[v_0(t) + \mu v_1(t) + \dots + \mu^k v_k(t) + \dots]}{\mu^m}$$

и этот ряд является асимптотическим на отрезке $[0, \mu^{\alpha m - 1}]$, т.е.

$$|V(t, \mu) - A_{n(m+1)t}V| \leq M(\mu t)^{-m}(t\mu)^{(n+1)(m+1)} \leq M\varepsilon^{-m\alpha}\varepsilon^{\alpha(n+1)(m+1)}, \quad (19)$$

где

$$A_{n(m+1)t}V = \mu^{-m}[v_0 + \mu v_1(t) + \dots + \mu^{m+n(m+1)}v_{m+n(m+1)}(t)].$$

Заметим, что функции $v_j(t) = v_j(t, \mu)$, т.е. они зависят от μ при $j \geq m+1$. Доказательство этой теоремы также можно проводить методом мажорант, переходя из (14) в интегральное уравнение.

СЛЕДСТВИЕ. Справедлив принцип Ван Дайка

$$A_{n(m+1)t}A_{n(m+1)x}u = A_{n(m+1)x}A_{n(m+1)t}V$$

на отрезке $[\varepsilon^{\beta-1/m}, \varepsilon^{\alpha-1/m}]$.

Для доказательства используется тождество $U_j(t) = v_j(t)$, $t \geq t_0$.

Далее оценка равномерного приближения проводится по схеме работы [8]. Справедлива

ЛЕММА. Имеют место оценки

$$\begin{aligned} R_1^{n(m+1)}(x, \varepsilon) &= A_{n(m+1)x}u(x, \mu^{m+1}) - A_{n(m+1)t}A_{n(m+1)x}u(x, \mu^{m+1}) \\ &= O(\varepsilon^{-\frac{m}{m+1}}\varepsilon^{\alpha(n+1)(m+1)}) \quad \forall x \in [0, \varepsilon^\alpha], \\ R_2^{n(m+1)}(x, \varepsilon) &= A_{n(m+1)t}V(t, \mu) - A_{n(m+1)x}A_{n(m+1)t}V(t, \mu) \\ &= O(\varepsilon^{-m/(m+1)}\varepsilon^{\alpha(n+1)(m+1)}) \quad \forall x \in [\varepsilon^\beta, 1]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $f(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$ введем оператор S_k по формуле

$$S_k f(x) = f_0 + f_1 x + \dots + f_k x^k, \quad f_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Тогда по определению

$$\begin{aligned} \{A_{(n+1)t}A_{(m+1)nx}u(x, \mu^{m+1})\}_x &= x^{-m} \left\{ S_{(m+1)n+m}a^{(0,0)}(x) \right. \\ &\quad + \varepsilon x^{-1-m} [S_{(m+1)n+m}a^{(1,0)}(x) + x^{(1+m)} \ln x S_{(m+1)(n-1)+m}a^{(1,1)}(x)] + \dots \\ &\quad \left. + (\varepsilon x^{-1-m})^n \sum_{j=0}^n x^{j(1+m)} \ln^j x S_{(m+1)(n-j)+m}a^{(n,j)}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому оценивая $R_1^{n(m+1)}(x, \varepsilon)$, имеем

$$R_1^{n(m+1)}(x, \varepsilon) \leq_{x \neq 0} Mx^{-m}[x^{(n+1)(m+1)} + \varepsilon x^{n(1+m)}(1 + |\ln x|) + \dots + \varepsilon^n x^{(1+m)}(1 + |\ln x| + \dots + |\ln x|^n)] \leq M\varepsilon^{\alpha(n+1)(m+1)}\varepsilon^{-m/(1+m)} \quad \forall x \in [0, \varepsilon^\alpha].$$

Вторая оценка получается аналогично.

Составим равномерное приближение

$$X_{n(m+1)}(x, \varepsilon) = A_{n(m+1)x}u(x, \mu^{m-1}) + A_{n(m+1)t}V(t, \mu) - A_{n(m+1)t}A_{n(m+1)x}u(x, \mu^{m+1}). \quad (20)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено условие теоремы 2. Тогда (20) является равномерным приближением задачи (1) на отрезке $[0, 1]$ и

$$|u(x, \varepsilon) - X_{n(m+1)}(x, \mu)| \leq M\varepsilon^{-m/(m+1)}\varepsilon^{\alpha(n+1)(m+1)} \quad \forall x \in [0, 1],$$

где

$$\alpha + \beta = \frac{1}{m+1}, \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Доказательство этой теоремы получается использованием оценок (12), (19) и леммы.

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) + u(x) = 1, \quad u(1) = b > 1, \quad x \in [0, 1].$$

Нулевое приближение

$$\begin{aligned} X_0(x, \mu) &= A_{0x}u(x, \mu^2) + A_{0t}V(t, \mu) - A_{0t}A_{0x}u(x, \mu^2) \\ &= \frac{1}{\mu}(-t + \sqrt{t^2 + 2(b-1)}) + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2(b-1)}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{0x}u(x, \mu^2) &= u_0(x) = \frac{b-1}{x} + 1 = A_{0t}A_{0x}u(x, \mu^2), \\ A_{0t}V(t, \mu) &= X_0(x, \mu), \end{aligned}$$

и

$$|u(x, \varepsilon) - X_0(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{2\alpha-1/2}, \quad x \in [0, 1].$$

Первое приближение

$$\begin{aligned} X_1(x, \varepsilon) &= \frac{1}{\mu}(-t + \sqrt{t^2 + 2(b-1)}) + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2(b-1)}} \\ &\quad + \mu \frac{b-1 + (b-1)^2/2}{\sqrt{t^2 + 2(b-1)}} - \frac{\mu t^2}{2\sqrt{[t^2 + 2(b-1)]^3}}, \\ |u(x, \varepsilon) - X_1(x, \varepsilon)| &\leq M\varepsilon^{4\alpha-1/2}, \quad x \in [0, 1], \\ 0 < \alpha + \beta &= \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Авторы выражают искреннюю благодарность Д. В. Аносову за полезные обсуждения при выполнении работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алымкулов К., Жэентаева Ж.К. О явном представлении решения возмущенного уравнения Лайтхилла с регулярной особенностью. Случай полюса один к трем невозмущенного уравнения в особой точке // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2002. Вып. 31. С. 110–117.
- [2] Жэентаева Ж.К. О явном представлении решения возмущенного уравнения Лайтхилла с регулярной особенностью. Случай полюса один к двум решения невозмущенного уравнения // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2002. Вып. 31. С. 118–124.
- [3] Алымкулов К., Зулпукаров А.З. Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения со слабой особенностью при производной порядка $1/3$ // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2002. Вып. 31. С. 105–109.
- [4] Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
- [5] Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- [6] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
- [7] Lagerstrom P. A. Matched asymptotic expansions. New-York, 1988.
- [8] Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [9] Lighthill L. M. A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid // Philos. Mag. 1949. № 40. P. 1179–1201.
- [10] Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач. Бишкек: Илим, 1992.
- [11] Алымкулов К. Развитие и обоснование метода Лайтхилла для возмущенных дифференциальных уравнений // Изв. АН КиргизССР. 1984. № 1. С. 7–11.
- [12] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

(К. Алымкулов) Ошский университет и Институт математики НАН КР,
(Ж.К. Жэентаева) Кыргызско-Узбекский университет
E-mail: keldibay@mail.ru, jjk_kuu@mail.ru

Поступило
18.03.2004