Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, В. А. Гринблат, Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 653–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:15:03

УДК 519.40

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ В КРАШЕНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУПП АРТИНА КОНЕЧНОГО ТИПА

В. Н. Безверхний, В. А. Гринблат

Вводится понятие крашеной подгруппы группы Артина конечного типа. Доказывается разрешимость обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа.

Библиография: 7 названий.

Группа Артина — это группа G , заданная системой образующих $a_i, i \in J, |J| < \infty$, и соотношениями $a_i a_j a_i \dots = a_j a_i a_j \dots$, где слова, стоящие слева и справа, состоят каждое из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j , m_{ij} — элемент матрицы Кокстера $M = (m_{ij})_{i,j \in J}$, соответствующей данной группе G , причем $\forall i \in J, m_{ii} = 1, \forall i, j \in J, i \neq j, m_{ij} = m_{ji}, m_{ij} \geq 2$.

Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина G соотношения $\forall i \in J, a_i^2 = 1$, получим копредставление группы Кокстера $\overline{G}$.

Группа Артина G называется *группой Артина конечного типа*, если соответствующая ей группа Кокстера $\overline{G}$ конечна.

Этот класс групп был рассмотрен Брискорном и Сайто, доказавшими разрешимость в нем равенства и сопряженности слов.

Известно, что группа кос A_n (с n образующими) принадлежит классу групп Артина конечного типа.

Группа Артина конечного типа называется *неприводимой*, если множество ее образующих X нельзя разбить на два непустых подмножества $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$, таких, что каждый элемент из X_1 коммутирует с каждым элементом из X_2 [1]. Каждой неприводимой группе Артина G конечного типа соответствует граф Кокстера Γ , вершины которого соответствуют образующим G ; любые две вершины a, b графа Γ соединены ребром, если $m_{ab} \geq 3$, m_{ab} — элемент матрицы Кокстера, соответствующей данной группе; если вершины c и d соединены путем, состоящим более, чем из одного ребра, то $m_{cd} = 2$.

Неприводимыми группами Артина конечного типа являются следующие группы: $A_n, n \geq 1, B_n, n \geq 2, D_n, n \geq 4, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, G_2, J_2(p), p = 5$ или $p \geq 7$, причем, их графы Кокстера имеют вид (рис. 1):

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00198.

Рис. 1

Известно, что каждая группа Артина конечного типа является либо одной из групп $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, G_2, J_2(p)$, $p = 5$ или $p \geq 7$, либо прямым произведением неприводимых групп.

Пусть G – группа Артина конечного типа с множеством образующих $\{a_i\}_{i \in J}$, $|J| < \infty$. Обозначим через $N_G = \langle \{a_i^2\}, i \in J \rangle^G$ нормальный делитель G , факторгруппа по которому есть конечная группа Кокстера $\overline{G} = G/N_G$.

Нормальный делитель N_G группы G будем называть по аналогии с нормальным делителем N_{A_n} группы кос A_n *крашеной подгруппой группы G* .

Хорошо известно, что группа Кокстера $\overline{G}$ является подгруппой симметрической группы $S_{|J|}$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Крашенная подгруппа N_G группы Артина конечного типа G является конечно определенной группой.*

ЛЕММА 1. *Пусть G – одна из неприводимых групп Артина конечного типа с множеством образующих $\{a_i\}_{i \in J}$. Тогда можно эффективно определить копредставление группы N_G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как порядок группы $\overline{G}$ конечен и ограничен сверху числом $|S_{|J|}|$, можно через конечное число шагов в G относительно N_G построить шрейеровскую систему представителей, используя которую можно эффективно построить копредставление N_G .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G – конечно порожденная группа Артина конечного типа. Тогда можно эффективно определить копредставление группы N_G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как G есть прямое произведение конечного числа неприводимых групп Артина конечного типа, N_G будет прямым произведением крашенных подгрупп соответствующих неприводимых Артиновых групп.

ЛЕММА 2. Пусть G – группа Артина конечного типа. Тогда в G разрешима проблема вхождения в подгруппу N_G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Пусть G – одна из неприводимых групп Артина конечного типа, N_G – крашенная подгруппа группы G . Обозначим через $\Lambda_G = \{w_s\}_{s=1,\dots,m}$ систему шрейеровских представителей группы G по N_G . Пусть

$$G/N_G = \langle b_1, \dots, b_m; A_1(b_\mu), \dots, A_r(b_\mu) \rangle$$

– представление группы G/N_G , заданное таблицей Кэли, где между b_i , $i = 1, \dots, m$, и шрейеровскими представителями Λ_G существует взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое эффективно; $N_G = \langle s_1, s_2, \dots, s_k; B_1(s_\nu), \dots, B_p(s_\nu) \rangle$ – представление крашенной подгруппы. Тогда представление группы G будет иметь вид

$$\begin{aligned} G &= \langle b_1, \dots, b_m, s_1, s_2, \dots, s_k; B_1(s_\nu), \dots, B_p(s_\nu), \\ &\quad A_1(b_\mu) = W_1(s_\nu), \dots, A_r(b_\mu) = W_r(s_\nu), \\ &\quad b_i s_j b_i^{-1} = W_{ij}(s_\nu), b_i^{-1} s_j b_i = V_{ij}(s_\nu), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где соотношения

$$\begin{aligned} A_t(b_\mu) &= W_t(s_\nu), \quad t = 1, \dots, r, \quad b_i s_j b_i^{-1} = W_{ij}(s_\nu), \\ b_i^{-1} s_j b_i &= V_{ij}(s_\nu), \quad i = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

получаются подстановкой вместо b_j соответствующего шрейеровского представителя и перезаписи полученных слов в образующих N_G с помощью переписывающего процесса Рейдемейстера–Шрейера [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть H – конечно порожденная подгруппа группы G (G – неприводимая группа Артина конечного типа). Тогда подгруппа $H \cap N_G$ конечно порожденная и существует алгоритм, строящий порождающие этой подгруппы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset G$ – конечно порожденная подгруппа, и $\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_{k_0} y_{k_0}, y_{k_0+1}, \dots, y_{k_1}$ – образующие H , где $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}$ принадлежат G/N_G , $y_1, y_2, \dots, y_{k_1} \in N_G$.

Пусть φ – гомоморфизм группы G на G/N_G : $\varphi(G) = G/N_G$, определенный следующим образом: $\forall s_j \in N_G, i \leq j \leq n, \varphi(s_j) = 1, \forall l, l = 1, \dots, m, \varphi(b_l) = b_l$. Тогда $\varphi(H) = gp(\alpha_1, \dots, \alpha_{k_0}), \varphi(H) \subset G/N_G$.

Выпишем все элементы подгруппы $\varphi(H)$; $1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0}$, где $\alpha'_i = w_i(\alpha_p)$, $w_i(\alpha_p)$ – слово в образующих $\{\alpha_j\}_{j=1,\dots,n}$ подгруппы $\varphi(H) \subset G/N_G$. Используя таблицу умножения Кэли, получим представление подгруппы $\varphi(H)$, задаваемое также таблицей Кэли:

$$\varphi(H) = \langle \alpha_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0}; \psi_1, \dots, \psi_a \rangle, \quad \psi_i = \psi_i(\alpha'_\gamma), \quad i = 1, \dots, a, \quad \alpha_0 = 1.$$

В качестве образующих подгруппы H возьмем элементы

$$\alpha'_1 y'_1, \alpha'_2 y'_2, \dots, \alpha'_{k'_0} y'_{k'_0}, y'_{k'_0+1}, \dots, y'_{k'_1}, k'_1 = k_1 + k'_0 - k_0, \quad (2)$$

$\forall i, 1 \leq i \leq k_1 - k_0, y'_{k'_0+i} = y_{k_0+i}, \alpha'_j y'_j = w_j(\alpha_p y_p), j = 1, \dots, k'_0$. Заметим, что $\alpha'_j y'_j$ получаем из $w_j(\alpha_p y_p)$, используя соотношения (1).

Обозначим множество $\{y'_{k'_0+j}, j = 1, 2, \dots, k_1 - k_0\}$, через Y_0 . Соотношениям $\psi_i(\alpha'_b)$ подгруппы $\varphi(H)$ в G будут соответствовать соотношения $\psi_i = N_i$, где $N_i = N_i(s_\nu)$, $i = 1, \dots, a, N_i(s) \in N_G$.

В подгруппе H рассматриваем слова $\psi_i(\alpha'_\gamma y'_\gamma)$, получаемые подстановкой в $\psi_i(\alpha'_\gamma)$ вместо α'_γ образующих $\alpha'_\gamma y'_\gamma$ подгруппы H . Используя соотношения группы G , заданной представлением (1), получим $\psi_i(\alpha'_\gamma y'_\gamma) = \psi_i(\alpha'_\gamma) T_i(s_\gamma)$, где $\psi_i(\alpha'_\gamma) \in G/N_G, T_i(s_\gamma) \in N_G$.

Присоединяя к Y_0 слова $N_i T_i \in N_G, i = 1, \dots, a$, получим множество Y_1 .

На образующих $\{\alpha'_j y'_j\}, j = 1, \dots, k'_0$, подгруппы H из (2) рассмотрим всевозможные произведения вида

$$(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} (\alpha'_j y'_j)^{\varepsilon_j}, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \quad i, j \in 1, \dots, k'_0.$$

Каждое из этих произведений приведем к виду $(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} (\alpha'_j y'_j)^{\varepsilon_j} = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$.

Те из полученных соотношений, у которых $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} = 1$ ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = \varepsilon_{ij}$), присоединяем к Y_1 ; получим множество Y_2 . Затем для каждого $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$ с $\alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} \neq 1$ из множества (2) берем элемент $\alpha'_s y'_s$ такой, что $\alpha'_s = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$, и рассматриваем произведения $y_{s,ij} = y_s^{-1} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$, $y_{ij,s} = \alpha_{ij}^{\varepsilon_{ij}} y_{ij}^{\varepsilon_{ij}} (y'_s)^{-1} (\alpha'_s)^{-1}$, добавив которые к Y_2 , получим множество Y_3 .

Рассмотрим подгруппу, порожденную множеством Y_3 . Обозначим ее через C , т.е. $C = gp(Y_3)$.

Сопрягаем C элементами $(\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i}, \varepsilon_i = \pm 1$, где $\alpha'_i y'_i$ принадлежит множеству (2). Получаем подгруппу $C_{(\alpha'_i)^{\varepsilon_i}} = (\alpha'_i y'_i)^{\varepsilon_i} C (\alpha'_i y'_i)^{-\varepsilon_i}, i = 1, \dots, k'_0, \varepsilon_i = \pm 1$.

Покажем, что для любого $i, 1 \leq i \leq k'_0$, существует такое $j, 1 \leq j \leq k'_0$, что $C_{(\alpha'_i)^{-1}} = C \alpha'_j$. Действительно, $(\alpha'_i y'_i)^{-1} C (\alpha'_i y'_i) = (\alpha'_i)^{-1} (y'_i)^{-\alpha_i} C y_i^{\alpha_i} \alpha'_i$, где $y_i^{\alpha_i} = \alpha'_i y'_i (\alpha'_i)^{-1}, y_i^{-\alpha_i} = \alpha'_i (y'_i)^{-1} (\alpha'_i)^{-1}$. Так как $\alpha'_i \in \varphi(H)$, существует $\alpha'_j \in \varphi(H)$ такое, что $\alpha'_j = \alpha_i^{-1}$. Поэтому $C_{(\alpha'_i)^{-1}} = \alpha'_j y'_j (y'_i)^{-1} C y_i'' (y'_j)^{-1} (\alpha'_j)^{-1} = C_{\alpha'_j}$, где $(y_i'')^{-1} = (y'_j)^{-1} (\alpha'_j)^{-1} \alpha'_i (y'_i)^{-\alpha_i} \in C$.

Рассмотрим подгруппу $Y = gp(C, C_{\alpha'_1}, \dots, C_{\alpha'_{k'_0}})$ подгруппы H .

ЛЕММА 3. *Подгруппа Y является нормальным делителем подгруппы H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha'_p y'_p \in \{\alpha'_i y'_i\}_{i=1, \dots, k'_0}$. Рассмотрим подгруппу

$$\alpha'_p y'_p Y (\alpha'_p y'_p)^{-1} = (\alpha'_p y'_p C (\alpha'_p y'_p)^{-1}, \dots, \alpha'_p y'_p C \alpha'_i (\alpha'_p y'_p)^{-1}, \dots, \alpha'_p y'_p C \alpha'_{k'_0} (\alpha'_p y'_p)^{-1}).$$

Покажем, что $\alpha'_p y'_p Y (\alpha'_p y'_p)^{-1} = Y$.

Действительно,

$$\alpha'_p y'_p C \alpha'_i (\alpha'_p y'_p)^{-1} = \alpha'_p y'_p (\alpha'_i y'_i C (\alpha'_i y'_i)^{-1}) (\alpha'_p y'_p)^{-1} = \alpha'_{p_i} y'_{p_i} C (y'_{p_i})^{-1} (\alpha'_{p_i})^{-1},$$

где $\alpha'_{p_i} = \alpha'_p \alpha'_i$.

Если $\alpha'_{p_i} \neq 1$, то выбираем в множестве (2) образующий $\alpha'_s y'_s$ с $\alpha'_s = \alpha'_{p_i}$; тогда $\alpha'_{p_i} y'_{p_i} C (y'_{p_i})^{-1} (\alpha'_{p_i})^{-1} = \alpha'_s y'_s y'' C (y'')^{-1} (y'_s)^{-1} (\alpha'_s)^{-1} = \alpha'_s y'_s C (y'_s)^{-1} (\alpha'_s)^{-1}$, где $y'' \in C$, поэтому $\alpha'_{p_i} y'_{p_i} C (y'_{p_i})^{-1} (\alpha'_{p_i})^{-1} = C_{\alpha'_s}$.

Так как $\varphi(H) = (1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0})$ и $\alpha'_p \in \varphi(H)$, то $(\alpha'_p, \alpha'_p \alpha'_1, \dots, \alpha'_p \alpha'_{k'_0})$ образуют перестановку элементов $(1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_{k'_0})$.

Если $\alpha'_{p_i} = 1$, то $y'_{p_i} \in C$, поэтому $\alpha'_{p_i} y'_{p_i} C (y'_{p_i})^{-1} (\alpha'_{p_i})^{-1} = C$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Каждый элемент $w \in H$ единственным образом может быть представлен в виде $w = \alpha'_i y'_i u$, где $\alpha'_i y'_i$ принадлежит множеству $(2')$, $u \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 5. Имеем $H \cap N_G = Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы непосредственно следует из доказательства леммы 4.

Из лемм 3–5 следует доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть G – конечно порожденная группа Артина конечного типа и N_G – крашенная подгруппа в G . Пусть H – конечно порожденная подгруппа в G . Тогда $H \cap N_G$ конечно порожденная, и существует алгоритм, выписывающий образующие подгруппы $G \cap N_G$.

В группах Артина конечного типа разрешима проблема сопряженности слов, и, как показано в [3], имеет место теорема 3.

ТЕОРЕМА 3. Централизатор $C_G(w)$ элемента w группы Артина G конечного типа конечно порожден, и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора $C_G(w)$.

Из теорем 2 и 3 следует теорема 4.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – группа Артина конечного типа, N_G – крашенная подгруппа в G . Тогда централизатор любого элемента $w \in N_G$ в N_G конечно порожден, и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in N_G$. Рассмотрим $C_G(w)$ – централизатор w в G . Из теоремы 3 следует, что $C_G(w)$ конечно порожден, и существует алгоритм, выписывающий образующие $C_G(w)$. Тогда из теоремы 2 имеем, что $C_{N_G}(w) = C_G(w) \cap N_G$ конечно порожден, и образующие $C_{N_G}(w)$ можно эффективно выписать.

ЛЕММА 6. Пусть w, v – элементы из G , G – группа Артина конечного типа, w, v сопряжены в G , т.е. $w = zvz^{-1}$. Тогда множество всех решений данного уравнения в G имеет вид $FC_G(v)$, где F – какое-то решение уравнения $w = zvz^{-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Существует алгоритм, позволяющий для любых двух элементов w, v , принадлежащих крашеной подгруппе группы Артина конечного типа G , установить, сопряжены ли они в N_G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w, v сопряжены в G , т.е. существует $z \in G$: $w = zvz^{-1}$, z определяется эффективно. Допустим, что $z \notin N_G$. На основании леммы 6 следует, что если $z_0 \in N_G$ такое, что $w = z_0 v z_0^{-1}$, то $z_0 \in z C_G(v)$.

Укажем способ построения z_0 .

Рассмотрим следующее соотношение:

$$C_G(v)/C_{N_G}(v) = C_G(v)/C_G(v) \cap N_G \leq G/N_G,$$

из которого следует, что

$$r = |C_G(v)/C_{N_G}(v)| \leq |G/N_G| \leq S(|I|),$$

где $|I| < \infty$ и $|I|$ — число образующих группы G .

Зная образующие подгруппы $C_G(v)$, можно эффективно выписать все представители смежных классов подгруппы $C_G(v)$ по подгруппе $C_{N_G}(v)$.

Пусть $\{T_i\}_{i=1, \dots, r}$ — указанное выше множество представителей $C_G(v)$ по $C_{N_G}(v)$. Для каждого $T_j \in \{T_i\}_{i=1, \dots, n}$ проверяем, принадлежит ли zT_i подгруппе N_G . Если принадлежит, то zT_i — искомый элемент из N_G .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть B_{n+1} — группа кос, и R_{n+1} — подгруппа крашенных кос группы B_{n+1} . В R_{n+1} разрешима проблема сопряженности слов.

Для групп R_{n+1} проблема сопряженности слов была решена А. Г. Савушкиной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух множеств элементов из G $\{w_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$, установить, существует ли $z \in G$ такое, что

$$\&_{i=1}^n (w_i = z^{-1}v_i z).$$

ТЕОРЕМА 6. В группах Артина конечного типа разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству разрешимости обобщенной сопряженности слов для групп кос в [4].

Известно [1], что любая группа Артина G конечного типа содержит фундаментальный элемент Δ , который (либо квадрат которого) порождает центр группы G .

Известно [1], что любое слово w из G может быть представлено в виде $w = \Delta^{2m}P$, где $m \in \mathbb{Z}$, P — положительное слово, принадлежащее полугруппе G^+ (G^+ — полугруппа, заданная теми же образующими, что и группа Артина конечного типа G , и изоморфно вложенная в G [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слово $H_1 \in G^+$ называется *отрезком*, если существует такое слово $H_2 \in G^+$, что $H_1 H_2 \equiv \Delta$ ($\equiv$ — равенство в полугруппе G^+).

Конечным (начальным) отрезком слова $X \in G^+$ называется любой отрезок, на который заканчивается (начинается) X , т.е. $X \equiv X_1 H$ ($X \equiv H X_1$), H — отрезок.

Максимальным конечным (начальным) отрезком H слова X называется такой конечный (начальный) отрезок X , что для любого конечного (начального) отрезка F слова X $\partial(F) \leq \partial(H)$, где $\partial(H)$ — длина H .

Пусть $X = H_s H_{s-1} \dots H_{i-1} H_i \dots H_1$, где каждый отрезок H_i является максимальным конечным отрезком $H_s \dots H_i$; тогда $H_s H_{s-1} \dots H_1$ называется *правым представлением* X .

Аналогично определяется *левое представление* положительного слова X : $X = H_1 H_2 \dots H_i \dots H_s$, где каждое H_i есть максимальный начальный отрезок слова $H_i H_{i+1} \dots H_s$.

ЛЕММА 7 [5], [6]. Пусть $H_1 H_2 \dots H_k$ – левое представление положительного слова X и пусть $A_i X = X A'_i$, $i = 1, \dots, r$, $A_i, A'_i \in G^+$. Тогда существует последовательность слов $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, \dots, A_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, r$, $A_i^{(j)} \in G^+$, $j = 0, \dots, k$, такая, что $A_i^{(0)} = A_i$, $A_i^{(k)} = A'_i$, и $A_i^{(j-1)} H_j = H_j A_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, k$.

Рассмотрим следующую последовательность положительных слов:

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_p, w_1^{(p)}, \dots, w_n^{(p)}, \dots, \quad (3)$$

где $\forall i$, $1 \leq i$, $w_1^{(i-1)} H_i = H_i w_1^{(i)}, \dots, w_n^{(i-1)} H_i = H_i w_n^{(i)}$, где H_i – отрезки.

Последовательность (3) назовем *базисной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [3]–[6]. Базисную последовательность (3) назовем *фундаментальной*, если для любых j, s , $0 \leq j < s < p$, наборы $(w_1^{(j)}, \dots, w_n^{(j)})$, $(w_1^{(s)}, \dots, w_n^{(s)})$ различны, и существует наименьшее целое v , $0 \leq v < p$, такое, что $w_1^{(v)} = w_1^{(p)}, \dots, w_n^{(v)} = w_n^{(p)}$.

ЛЕММА 8 [3]–[6]. Если последовательность (3) фундаментальная, то слово $H_1 H_2 \dots H_p H_v^{-1} \dots H_1^{-1}$ принадлежит центральному подгруппы H , порожденной словами $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$.

Назовем слово $H_1 H_2 \dots H_p H_v^{-1} \dots H_1^{-1}$ *базисным словом*.

ЛЕММА 9 [3]–[6]. Множество фундаментальных последовательностей конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству данного утверждения в [3]–[6].

ЛЕММА 10 [3]–[6]. Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $\mathbb{C}_G(H)$ – центральный идеал H в G ; H порождена $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}$. Тогда существует разбиение F в произведение $H_1 H_2 \dots H_m$, и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F : $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, w_2^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}$, и слово F является произведением базисных слов.

Заметим, что так как $\mathbb{C}_G(H)$ содержит Δ^2 (Δ^2 принадлежит центральному идеалу G), то можно полагать, что $F \in G^+$.

ТЕОРЕМА 7 [3]–[6]. Центральная идеал конечно порожденной подгруппы группы Артина конечно типа конечно порожден, и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Приступим к доказательству теоремы 6.

Пусть даны два множества слов: $(w_1, \dots, w_n)$ и $(v_1, \dots, v_n)$. Каждое из слов w_i, v_j представим в виде $w_i = \Delta^{2k_i} w_i^{(0)}$, $v_j = \Delta^{2m_j} v_j^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, где каждое слово $w_i^{(0)}, v_j^{(0)} \in G^+$ и не содержит Δ^2 . Известно (теорема Гарсайда [1]), что два слова $w = \Delta^{2m} P_1$, $v = \Delta^{2n} P_2$, где $P_1, P_2 \in G^+$, $m, n \in \mathbb{Z}$, сопряжены в G тогда и только тогда, когда $m = n$, и слова P_1, P_2 сопряжены в G^+ .

Поэтому, учитывая теорему Гарсайда, упорядочиваем слова

$$\{w_i\}_{i=1, \dots, n} \quad \text{и} \quad \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$$

таким образом, чтобы для любого $i, i = 1, \dots, n$, для слов $w_i = \Delta^{2k_i} w_i^{(0)}$, $v_i = \Delta^{2m_i} v_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$, выполнялось бы условие $k_i = m_i$. Заменяем упорядоченные последовательности $\{w_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ упорядоченными последовательностями $(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)})$, $(v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)})$.

Для последовательности слов $(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)})$ рассматриваем базисные последовательности

$$(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}), H_1, (w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}), H_2, \dots, H_k, (w_1^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}). \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [7]. Базисная последовательность (4) называется *особой*, если она не содержит фундаментальную подпоследовательность, либо является пустой, т.е. все слова H_i , $i = 1, \dots, k$, равны единице.

Слово $H_1 H_2 \dots H_k$, соответствующее особой базисной последовательности (4), назовем *базисным*.

Если в особой базисной последовательности (4) $w_1^{(k)} = v_1^{(0)}, \dots, w_n^{(k)} = v_n^{(0)}$, то слова $w_1, \dots, w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1, \dots, v_n$.

ЛЕММА 11. Число особых базисных последовательностей конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 12. Пусть $F \in G^+$ – некоторое решение системы $\&_{i=1}^n (w_i^{(0)} = z^{-1} v_i^{(0)} z)$. Тогда существует разбиение F в произведение отрезков $H_1, \dots, H_m$ и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F ,

$$w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \dots, w_n^{(1)}, H_2, \dots, H_m, w_1^{(m)}, \dots, w_n^{(m)}, \quad (5)$$

где $w_1^{(m)} = v_1^{(0)}, \dots, w_n^{(m)} = v_n^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 7.

ЛЕММА 13. Пусть $F \in G^+$ – некоторое решение системы $\&_{i=1}^n (w_i^{(0)} = z^{-1} v_i^{(0)} z)$ и (5) – базисная последовательность, соответствующая разбиению F . В последовательности (5) можно выделить особую подпоследовательность такую, что соответствующее ей базисное слово F' является решением системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Из лемм 11–13 следует доказательство теоремы 6.

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – конечно определенная группа Артина конечного типа и $\{w_i\}_{i=1, \dots, n}, \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ – слова группы G . Если F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n (w_i = z^{-1} v_i z)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H)F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор подгруппы H , порожденной словами $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$, является множеством всех решений системы.

ТЕОРЕМА 9. Пусть H – конечно порожденная подгруппа крашеной подгруппы N_G группы Артина конечного типа G . Тогда $\mathbb{C}_{N_G}(H) \cap N_G$ – конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие $\mathbb{C}_{N_G}(H)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть G – группа Артина конечного типа, N_G – крашенная подгруппа группы G . Тогда в N_G разрешима обобщенная проблема сопряженности слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует теоремы 6–9 и проводится аналогично теореме 5.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть B_{n+1} – группа кос и R_{n+1} – группа крашенных кос B_{n+1} . Тогда в R_{n+1} разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Кокстера // Математика. 1974. Т. 18. № 6. С. 56–79.
- [2] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
- [3] Гринблат В. А. О нормализаторах групп Артина // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. трудов. Тула, 1981. С. 82–94.
- [4] Маканина Т. А. Об одной системе уравнений в группе кос // Изв. вузов. Матем. 1986. № 9. С. 58–62.
- [5] Маканин Г. С. О нормализаторах групп кос // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 2. С. 171–179.
- [6] Гурзо Г. Г. О централизаторах конечных множеств элементов группы кос // Матем. заметки. 1985. Т. 37. № 1. С. 3–6.
- [7] Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. № 1. С. 1–38.

(В. Н. Безверхний) Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого
(В. А. Гринблат) Академия гражданской защиты, г. Москва

Поступило
18.06.2004