Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Буков, С. В. Горюнов, Обращение и канонизация блочных матриц, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 662–673

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:54:53

УДК 512.831

ОБРАЩЕНИЕ И КАНОНИЗАЦИЯ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ

В. Н. Буков, С. В. Горюнов

Статья посвящена проблеме обращения блочных матриц, к которым неприменимы известные формулы Фробениуса и Шура. Это могут быть квадратные матрицы с четырьмя необратимыми квадратными или прямоугольными блоками, а также квадратные или прямоугольные матрицы с двумя блоками. Применительно к прямоугольным матрицам полученные результаты являются дальнейшим развитием метода канонизации, который используется при решении произвольных матричных уравнений.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Большой круг прикладных задач требует либо решения матричных уравнений различных типов в аналитическом виде [1], либо исследования этих уравнений в общем аналитическом виде [2]. Для достижения этих целей в работе [3] был предложен метод решения линейных матричных уравнений, основанный на так называемой канонизации произвольных матриц. Оригинальность канонизации заключается в том, что после приведения исходной матрицы к каноническим базисам [4] по типу большинства разложений (спектральное разложение, псевдообращение, обобщенное обращение и др.) определенные блоки результирующих матриц перемножаются. Итог канонизации произвольной матрицы представляет собой неединственную совокупность не перемножаемых трех (в некоторых задачах четырех или пяти) матриц, характеризующих структуру (по раздельности линейную зависимость и независимость строк и столбцов) этой матрицы. Речь идет о построении аналитических представлений матриц общего вида, позволяющих получать, анализировать и использовать аналитические решения алгебраических матричных уравнений различных типов (линейных односторонних и двусторонних, в том числе по выбору только с симметрическими или только с кососимметрическими решениями, билинейных, Сильвестра, Риккати и пр.). При этом формируются как условия разрешения таких уравнений, так и формульные записи всего множества решений.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию метода канонизации в отношении блочных матриц, в том числе таких, к которым *не применимы* известные формулы Фробениуса и Шура [5].

2. Основные положения метода канонизации. *Канонизацией матриц* названо представление любой матрицы A размера $m \times n$ и ранга r в виде не обязательно единственной тройки матриц

$$A \rightarrow (\overline{A}^L, \tilde{A}, \overline{A}^R), \quad (1)$$

где $\overline{A}^L$ и $\overline{A}^R$ – левый и правый делители нуля максимального ранга для исходной матрицы, $\tilde{A}$ – сводный канонизатор этой матрицы, вычисляемый как произведение правого и левого ее канонизаторов по формуле

$$\tilde{A} = \tilde{A}^R \tilde{A}^L. \quad (2)$$

По определению делители нуля максимального ранга и канонизаторы вместе удовлетворяют следующему тождеству в блочной записи:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^L \\ \overline{A}^L \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \tilde{A}^R & \overline{A}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь I_r – единичная матрица размера $r \times r$.

В [3] изложен эффективный способ одновременного формирования делителей нуля и канонизаторов. В соответствии с этим способом матрица A дополняется двумя единичными матрицами слева и снизу, так что получается конструкция типа планшета

$$\left| \begin{array}{c|c} I_m & A_{m \times n} \\ \hline & I_n \end{array} \right|. \quad (4)$$

Затем выполняются элементарные преобразования строк и столбцов матрицы A с одновременным преобразованием входящих в конструкцию единичных матриц. Цель такого преобразования – привести матрицу A к каноническим базисам:

$$\left| \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{r \times m}^L \\ \overline{A}_{(m-r) \times m}^L \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I(r) & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \\ \hline & \begin{bmatrix} \tilde{A}_{n \times r}^R & \overline{A}_{n \times (n-r)}^R \end{bmatrix} \end{array} \right|. \quad (5)$$

Тогда блоки первоначально единичных матриц напротив (по строкам или столбцам) нулевых блоков правой верхней матрицы будут содержать делители нуля максимального ранга $\overline{A}^L$ и $\overline{A}^R$, а блоки напротив единичной матрицы – канонизаторы $\tilde{A}^L$ и $\tilde{A}^R$.

В частных случаях отсутствия у матрицы одного из делителей нуля (мы будем приравнивать такой делитель нулю, хотя, строго говоря, соответствующий блок содержит нулевое число строк или столбцов [6], [7]) сводный канонизатор принимает значение одностороннего делителя единицы, т.е.

$$\overline{A}^L = 0 \iff \tilde{A} = A^R, \quad \overline{A}^R = 0 \iff \tilde{A} = A^L, \quad (6)$$

где по определению $AA^R = I_m$ и $A^L A = I_n$.

ТАБЛИЦА 1. Условия разрешимости и формульное представление решений матричных уравнений

Вид уравнения		Условия разрешимости	Формульное представление
Название	Формула		
Левостороннее	$AX = B$	$\overline{A}^L B = 0$	$\{X\}_\mu = \tilde{A}B + \overline{A}^R_\mu$
Правостороннее	$XC = B$	$B\overline{C}^R = 0$	$\{X\}_\eta = B\tilde{C} + \eta\overline{C}^L$

Принципиальным является то, что канонизация матриц путем повторного ее выполнения позволяет придать процедурам и результатам решения матричных уравнений аналитический характер. В таблице 1 приведены условия разрешимости и формульное представление решений простейших матричных уравнений методом канонизации.

Здесь буквами μ и ν обозначены матрицы подходящих размеров с произвольными элементами, фигурными скобками выделены множества эквивалентных решений, все элементы которых порождаются варьированием указанных в нижнем индексе матриц.

3. Обращение блочной матрицы. Рассмотрим обратимую квадратную матрицу A размера $n \times n$, которую произвольным образом разобьем на два строчечных блока (в каждом блоке число строк меньше числа столбцов)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Пусть для определенности первый блок содержит k строк, $k \in [1, n-1]$.

Поскольку все строки обратимой матрицы A линейно независимы, при любом ее разбиении на блоки имеют место тождества

$$\overline{A}_1^L = 0, \quad \overline{A}_2^L = 0. \quad (8)$$

Относительно же правых делителей нуля этих блоков сформулируем лемму.

ЛЕММА. Матрица A , разбитая произвольным образом на строчечные блоки типа (7), обратима тогда и только тогда, когда квадратные матрицы $A_1 A_2^R$ и (или) $A_2 \overline{A}_1^R$ обратимы, т.е. справедливы неравенства

$$\det(A_1 \overline{A}_2^R) \neq 0, \quad \det(A_2 \overline{A}_1^R) \neq 0. \quad (9)$$

Неравенства (9), вместе или в отдельности, являются необходимым и достаточным условиями обратимости матрицы (7).

Теперь сформулируем основной результат по обращению блочных матриц.

ТЕОРЕМА 1. Если обратимая матрица A разбита произвольным образом на строчечные блоки в соответствии с формулой

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

то ее обратная матрица имеет блочную структуру

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \end{bmatrix},$$

где каждый из блоков независимо определяется любой из следующих формул:

а) на основе канонизации первого блока исходной матрицы

$$Z_1 = (I_n - \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^{-1} A_2) A_1^R, \quad (10)$$

$$Z_2 = \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^{-1}, \quad (11)$$

б) на основе канонизации второго блока исходной матрицы

$$Z_1 = \overline{A}_2^R (A_2 \overline{A}_2^R)^{-1}, \quad (12)$$

$$Z_2 = (I_n - \overline{A}_2^R (A_1 \overline{A}_2^R)^{-1} A_1) A_2^R. \quad (13)$$

Итого, комбинируя записи (10)–(13), можно получить четыре различные равносильные формулы для обратной матрицы.

Нужно отметить, что, несмотря на неединственность матриц A_1^R , $\overline{A}_1^R$ и A_2^R , $\overline{A}_2^R$, матрицы (10)–(13) всегда оказываются единственными. Покажем это на формуле (10). Все множество правых делителей нуля *максимального* ранга порождается формулой

$$\{\overline{A}_1^R\}_\theta = \overline{A}_1^R \theta, \quad \theta = \text{var}, \quad \det \theta \neq 0. \quad (14)$$

Подстановкой (14) в (10) можно убедиться в том, что результат не зависит от выбора произвольной обратимой матрицы θ . Множество же правых делителей единицы порождается формулой

$$\{A_1^R\}_\eta = A_1^R + \overline{A}_1^R \eta, \quad \eta = \text{var}. \quad (15)$$

Подстановка (15) в формулу (10) дает результат

$$Z_1 = A_1^R - \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^{-1} A_2 A_1^R + \overline{A}_1^R \eta - \overline{A}_1^R \eta,$$

который очевидным образом независимо от значения матрицы η приводится к виду (10).

Аналогичный с учетом симметрии результат может быть сформулирован для случая разбиения обратимой матрицы A на столбцовые блоки.

4. Связь с формулами Фробениуса. Широко известны формулы Фробениуса блочного обращения матриц [5], одна из которых записывается в виде

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} H^{-1} & -H^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \\ -D_{22}^{-1} D_{21} H^{-1} & D_{22}^{-1} + D_{22}^{-1} D_{21} H^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где матрица

$$H = D_{11} - D_{12} D_{22}^{-1} D_{21} \quad (17)$$

называется *дополнением по Шуру* матрицы D_{22} в матрице D [8].

Здесь формулы (16) и (17) рассматриваются лишь с целью демонстрации отсутствия противоречия теореме 1 и формул Фробениуса в случае условий, соответствующих применимости последних.

Разобьем блоки матрицы (7) дополнительно таким образом, чтобы получилась матрица с квадратными блоками на главной диагонали

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Пусть при этом блок A_{22} будет обратимым, т.е. выполняется неравенство

$$\det A_{22} \neq 0. \quad (19)$$

Вместе с тем будем продолжать рассматривать строчечное разбиение матрицы A , полагая, что в соответствии с (18) выполняются равенства

$$A_1 = [A_{11} \ A_{12}], \quad A_2 = [A_{21} \ A_{22}]. \quad (20)$$

Канонизация матричного блока A_2 по (3) и (6) дает

$$A_2 \rightarrow (\overline{A}_2^L, A_2^R, \overline{A}_2^R) = \left(0, \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_k \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \end{bmatrix} \right). \quad (21)$$

Воспользуемся формулой (12) теоремы 1, которая с учетом канонизации (21) дает результат

$$Z_1 = \begin{bmatrix} I_k \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \end{bmatrix} \left([A_{11} \ A_{12}] \begin{bmatrix} I_k \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \end{bmatrix} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Здесь обращаемая матрица $A_1 \overline{A}_2^R$ после выполнения умножения сомножителей представляет собой дополнение по Шуру (17)

$$A_1 \overline{A}_2^R = [A_{11} \ A_{12}] \begin{bmatrix} I_k \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \end{bmatrix} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = H. \quad (23)$$

Подстановка (23) в (22) дает первый блочный столбец матрицы (16), т.е.

$$Z_1 = \begin{bmatrix} H^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} H^{-1} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Теперь перейдем к формуле (13) теоремы 1. Воспользовавшись очевидной подстановкой формулы (22), можно записать значение блока

$$\begin{aligned} Z_2 &= \left(\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} - Z_1 [A_{11} \ A_{12}] \right) \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{22}^{-1} \end{bmatrix} - Z_1 A_{12} A_{22}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -H^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} H^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

который представляет собой второй блочный столбец матрицы (16).

Таким образом, формулы Фробениуса составляют частный случай формул теоремы 1, утверждение которой остается справедливым при любом разбиении обратимой матрицы A на четыре блока. В том числе это могут быть матрицы с четырьмя необратимыми квадратными или прямоугольными блоками. Произведение одного блока матрицы на делитель нуля максимального ранга ее второго блока является аналогом дополнения по Шуру.

5. Канонизация блочной матрицы. Теперь перейдем к более сложному случаю, когда матрица A необратима. Канонизация такой матрицы, заменяющей в некотором смысле операцию обращения для матриц общего вида, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Если необратимая матрица A разбита произвольным образом на строчечные блоки в соответствии с формулой*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

то ее канонизация (делители нуля максимального ранга и сводный канонизатор) определяется этими блоками по формулам

$$\overline{A}^L = \begin{bmatrix} \overline{A}_1^L & 0 \\ -A_2 \tilde{A}_1^R & -A_2 \overline{A}_1^R \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\overline{A}^R = \overline{A}_1^R \overline{A}_2 \overline{A}_1^R, \quad (27)$$

$$\tilde{A} = [(I_n - \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^\sim A_2) \tilde{A}_1 \quad \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^\sim]. \quad (28)$$

Можно получить формулы блочной канонизации матрицы A , альтернативные формулам (26)–(28) и опирающиеся на канонизацию ее второго блока.

Аналогичные с учетом симметрии формулы могут быть получены для случая разбиения необратимой матрицы на столбцовые блоки.

Проанализируем формулы (26)–(28) применительно, например, к обратимым блокам A_1 и A_2 . В этом случае все делители нуля блоков тождественно равны нулю:

$$\overline{A}_1^L = 0, \quad \overline{A}_1^R = 0, \quad (29)$$

сводные канонизаторы блоков принимают значения обратных для этих блоков матриц:

$$\tilde{A}_1 = A_1^{-1},$$

а делители нуля максимального ранга для нулевых матриц – произвольные матрицы

$$\overline{0}^L = \xi, \quad \overline{0}^R = \psi$$

подходящих размеров с ограниченными элементами. Сводный канонизатор матрицы $A_2 \overline{A}_1^R = 0$, имеющей в соответствии с (29) и комментарием к (6) нулевое число столбцов, представляет собой матрицу с нулевым числом строк, которую с учетом (6) для краткости будем тоже приравнивать нулю:

$$(A_2 \overline{A}_1^R)^\sim = (A_2 \overline{A}_1^R)^L = 0.$$

Напоминаем, что матрицу, имеющую одновременно нулевое число строк и столбцов, принято относить к единичным матрицам [7]. В итоге, опуская нулевые строки, как заведомо линейно зависимые, получаем результат канонизации

$$\overline{A}^L = [-\chi A_2 A_1^{-1} \quad \chi], \quad \overline{A}^R = 0, \quad \tilde{A} = [A_1^{-1} \quad 0],$$

совпадающий с ожидаемым результатом для матриц рассматриваемого вида.

6. Пример. Совместное решение двух матричных уравнений. Рассмотрим левостороннее матричное уравнение

$$A_1 X = B_1, \quad (30)$$

где $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Выполним канонизацию матрицы A_1 :

$$A_1 \rightarrow (\overline{A}_1^L, \tilde{A}_1, \overline{A}_1^R) = \left(\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Левый делитель нуля максимального ранга матрицы A_1 является пустой строкой, поэтому уравнение (30) разрешимо при любой правой части. В данном случае уравнение (30) согласно таблице имеет следующее множество решений:

$$\{X\}_{\mu}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Предположим, требуется найти такое подмножество (31), которое удовлетворяет дополнительному условию – уравнению

$$A_2 X = B_2, \quad (32)$$

где $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. По сути, необходимо найти решение новой системы уравнений

$$AX = B, \quad (33)$$

где $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$. Для этого следовало бы выполнить обращение или канонизацию матрицы A размера 4×4 . Однако при известных результатах канонизации матрицы A_1 эффективнее воспользоваться теоремами 1 или 2.

В первую очередь вычислим матрицу $A_2 \overline{A}_1^R$:

$$A_2 \overline{A}_1^R = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю; следовательно, согласно лемме матрица A является вырожденной. Выполним канонизацию матрицы $A_2 \overline{A}_1^R$:

$$A_2 \overline{A}_1^R \rightarrow \left(\overline{A_2 \overline{A}_1^R}^L, (A_2 \overline{A}_1^R)^{\sim}, \overline{A_2 \overline{A}_1^R}^R \right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Теперь, учитывая разрешимость уравнения (30), на основе (26) проверим выполнение условия разрешимости уравнения (33):

$$\overline{A_2 \tilde{A}_1^R}^L (B_2 - A_2 \tilde{A}_1 B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 0.$$

Следовательно, совместное решение уравнений (30) и (32) существует.

Учитывая, что

$$A_2 \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{A_1^R} (A_2 \overline{A_1^R})^\sim = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.4 & 0 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

вычислим правый делитель нуля максимального ранга и канонизатор матрицы A по формулам (27), (28):

$$\overline{A}^R = \overline{A_1^R} \overline{A_2 \overline{A_1^R}}^R = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - \overline{A_1^R} (A_2 \overline{A_1^R})^\sim A_2 \tilde{A}_1 & \overline{A_1^R} (A_2 \overline{A_1^R})^\sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 1 & -0.2 & \vdots & -0.4 & 0 \\ -1 & 0.6 & \vdots & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда все множество решений уравнения (33) выражается формулой

$$\{X\}_\eta = \tilde{A}B + \overline{A}^R \eta = \begin{bmatrix} 3 \\ -0.6 \\ 0.8 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -0.2 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \eta$$

с произвольной переменной η .

Таким образом, совместное решение уравнений (30) и (32) было найдено путем канонизации двух матриц размеров 2×4 и 2×2 .

7. Приложение. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Матрица

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_2^R & \overline{A_1^R} \end{bmatrix}, \quad (\text{П.1})$$

составленная из односторонних канонизатора и делителя нуля максимального ранга, всегда обратима как матрица преобразования базиса по типу (3) в n -мерном пространстве.

Умножим матрицу A справа на матрицу (П.1), в результате чего получим

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_2^R & \overline{A}_2^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \tilde{A}_2^R & A_1 \overline{A}_2^R \\ A_2 \tilde{A}_2^R & A_2 \overline{A}_2^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \tilde{A}_2^R & A_1 \overline{A}_2^R \\ I_{n-k} & 0_{(n-k) \times k} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

Здесь нулевой блок $0_{(n-k) \times k}$ получен на основе определения правого делителя нуля, а возникновение единичного блока I_{n-k} связано с объяснением (6) случая отсутствия у блока A_2 левого делителя нуля.

В силу обратимости сомножителей матрица (П.2) тоже обратима. Вычисляя определитель этой матрицы, получаем

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \tilde{A}_2^R & A_1 \overline{A}_2^R \\ I_{n-k} & 0 \end{bmatrix} = -\det(A_1 \overline{A}_2^R) \neq 0, \quad (\text{П.3})$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается второе неравенство (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По определению обратной для невырожденной матрицы A является матрица Z , удовлетворяющая тождеству

$$AZ = I_n. \quad (\text{П.4})$$

Доказательство будем осуществлять путем формирования решения уравнения (П.4) относительно матрицы Z .

Будем полагать, что обратная матрица разбита на столбцовые блоки (в каждом блоке число столбцов меньше числа строк)

$$Z = [Z_1 \ Z_2], \quad (\text{П.5})$$

размеры которых согласованы с размерами блоков матрицы A , т.е. первый блок содержит k столбцов.

Подстановка (7) и (П.5) в тождество (П.4) дает в блочной записи тождество

$$\begin{bmatrix} A_1 Z_1 & A_1 Z_2 \\ A_2 Z_1 & A_2 Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & I_{n-k} \end{bmatrix} \quad (\text{П.6})$$

или систему из четырех матричных тождеств

$$A_1 Z_1 = I_k, \quad A_1 Z_2 = 0, \quad A_2 Z_1 = 0, \quad A_2 Z_2 = I_{n-k}. \quad (\text{П.7})$$

Первое тождество (П.7) будем рассматривать как левостороннее уравнение относительно матричного блока Z_1 . Поскольку у матричного блока A_1 все строки линейно независимы, в соответствии с таблицей это уравнение разрешимо всегда, а все множество его решений с учетом соотношений (6) определяется формулой

$$\{Z_1\}_\rho = A_1^R + \overline{A}_1^R \rho, \quad \rho = \text{var}. \quad (\text{П.8})$$

Подстановка этого решения в третье тождество (П.7) и соответствующая перестановка слагаемых дают всегда разрешимое (в силу утверждения леммы) левостороннее уравнение

$$A_2 \overline{A}_1^R \rho = -A_2 A_1^R \quad (\text{П.9})$$

относительно матрицы ρ , единственное решение которого определяется формулой

$$\rho = -(A_2 \overline{A}_1^R)^{-1} A_2 A_1^R. \quad (\text{П.10})$$

Подставив (П.10) в решение (П.8), получим одну из возможных формул для первого блока обратной матрицы

$$Z_1 = (I_n - \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^{-1} A_2) A_1^R, \quad (\text{П.11})$$

использующую результаты канонизации первого блока матрицы A .

Теперь рассмотрим третье тождество (П.7) как левостороннее уравнение относительно матричного блока Z_1 . На основании линейной независимости строк матричного блока A_2 это уравнение тоже разрешимо всегда, а его решение имеет вид

$$\{Z_1\}_\mu = \overline{A}_2^R \mu, \quad \mu = \text{var}. \quad (\text{П.12})$$

Подставим решение (П.12) в первое тождество (П.7); в результате получим уравнение

$$A_1 \overline{A}_2^R \mu = I_k \quad (\text{П.13})$$

для матрицы μ . В силу утверждения доказанной леммы это уравнение всегда разрешимо, и его единственное решение имеет значение

$$\mu = (A_1 \overline{A}_2^R)^{-1}. \quad (\text{П.14})$$

Подставив (П.14) в решение (П.12), получим другую возможную формулу для первого блока обратной матрицы

$$Z_1 = \overline{A}_2^R (A_1 \overline{A}_2^R)^{-1}, \quad (\text{П.15})$$

использующую результаты канонизации второго блока матрицы A .

Аналогично получаются две формулы для второго блока обратной матрицы Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим правостороннее матричное уравнение с произвольной матрицей A

$$AX = B \quad (\text{П.16})$$

и выведем формулы теоремы, решая это уравнение с учетом и без учета разбиения матриц на блоки по типу

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.17})$$

В соответствии с таблицей уравнение (П.16) разрешимо тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\overline{A}^L B = 0. \quad (\text{П.18})$$

При этом исчерпывающее решение записывается формулой

$$\{X\}_\varphi = \tilde{A}B + \overline{A}^R \varphi, \quad \varphi = \text{var}. \quad (\text{П.19})$$

Для разрешимости же уравнения

$$A_1 X = B_1 \quad (\text{П.20})$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\overline{A}_1^L B_1 = 0. \quad (\text{П.21})$$

Тогда решение уравнения (П.20) записывается формулой

$$\{X\}_\mu = \tilde{A}_1 B_1 + \overline{A}_2^R \mu, \quad \mu = \text{var}. \quad (\text{П.22})$$

Это решение по определению должно удовлетворять другому уравнению

$$A_2 X = B_2, \quad (\text{П.23})$$

вытекающему из (П.16) и (П.17). Соответствующая подстановка дает равенство

$$A_2 (\tilde{A}_1 B_1 + \overline{A}_1^R \mu) = B_2,$$

которое приводится к записи левостороннего уравнения

$$A_2 \overline{A}_1^R \mu = B_2 - A_2 \tilde{A}_1 B_1 \quad (\text{П.24})$$

относительно матрицы μ .

В свою очередь разрешимость уравнения (П.24) по таблице связана с выполнением условия

$$\overline{A_2 \overline{A}_1^R}^L (B_2 - A_2 \tilde{A}_1 B_1) = 0. \quad (\text{П.25})$$

Если же и это условие выполняется, то можно записать формулу

$$\{\mu\}_\varphi = (A_2 \overline{A}_1^R)^\sim (B_2 - A_2 \tilde{A}_1 B_1) + \overline{A_2 \overline{A}_1^R}^R \varphi \quad (\text{П.26})$$

для всех значений матрицы μ , при которых решение (П.22) одновременно удовлетворяет уравнениям (П.20) и (П.23).

Само же решение в соответствии с таблицей записывается в виде

$$\{X\}_\varphi = \left[(I_n - \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^\sim A_2) \overline{A}_1 \quad \overline{A}_1^R (A_2 \overline{A}_1^R)^\sim \right] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + \overline{A}_1^R \overline{A_2 \overline{A}_1^R}^R \varphi. \quad (\text{П.27})$$

Теперь, сопоставляя условия разрешимости (П.21) и (П.25) уравнения (П.17) с условием разрешимости (П.18) уравнения (П.16), а также формулу (П.27) с формулой (П.19) этих уравнений, можно сформулировать результат в виде теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бронников А. М. Вложение систем. Условие строгой нечувствительности линейных систем к параметрическим возмущениям // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 35–47.
- [2] Буков В. Н., Рябченко В. Н., Сельвесюк Н. И. Достаточная параметризация уравнения Лурье–Риккати // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 6. С. 28–35.
- [3] Буков В. Н., Рябченко В. Н., Косьянчук В. В., Зыбин Е. Ю. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации // Вестн. Киевского ун-та. Сер. физ-матем. Вып. 1. Киев: Изд-во Киевского нац. ун-та, 2002. С. 19–28.
- [4] Петрова В. Т. Лекции по алгебре и геометрии. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999.
- [5] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [6] Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. Модули и представления // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 24–42.
- [7] Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1981.
- [8] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Наука, 1996.

Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского
E-mail: v_n_bukov@iyanet.ru

Поступило
09.08.2004
Исправленный вариант
28.04.2005