Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Дильман, Асимптотика в формуле Баума–Каца для случайных полей,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 5, 674–680

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2739>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:46:28

УДК 519.21

АСИМПТОТИКА В ФОРМУЛЕ БАУМА–КАЦА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

С. В. Дильман

В 1996 году Д. Денгом для мультииндексированных случайных величин был установлен аналог теоремы Баума–Каца о скорости сходимости в законе больших чисел. Ряд, описывающий скорость сходимости, естественным образом зависит от параметра, характеризующего превышение нормированными суммами некоторого уровня. В нашей работе найдена точная асимптотика суммы этого ряда по упомянутому параметру. Тем самым получено обобщение недавнего результата А. Гута и А. Спатару.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. Известная теорема Баума–Каца [1] утверждает, что для последовательности $\{X_n\}_{n \geq 1}$ независимых одинаково распределенных (НОР) случайных величин, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, и действительных чисел $a > 1/2$ и $q \geq 1/a$ соотношение

$$\sum_{n \geq 1} n^{qa-2} \mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon n^a) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}|X_1|^q < \infty$ и дополнительно $\mathbf{E}X_1 = 0$ в случае $q \geq 1$.

Рассмотрим целочисленную решетку $\mathbb{N}^d$, $d \geq 1$, и для ее элементов $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ и $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$ будем писать $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$ ($\mathbf{n} > \mathbf{m}$), когда $n_i \geq m_i$ ($n_i > m_i$) для каждого i . Эту запись частичного порядка используем и для векторов из $\mathbb{R}^d$. Обозначим также $|\mathbf{n}| = n_1 \dots n_d$. Далее в работе считаем, что $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ – НОР случайные величины и $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$. Будем обозначать $\log x$ логарифм по основанию e .

Обобщения результата (1) на случай полей получены в работах [2] и [3]. В первой из них доказано, что для любых $a > 1/2$ и $q \geq 1/a$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{qa-2} \mathbf{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \varepsilon |\mathbf{n}|^a) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}|X_1|^q (\log^+ |X_1|)^{d-1} < \infty$ и дополнительно $\mathbf{E}X_1 = 0$ в случае $q \geq 1$. Здесь, как обычно, $\log^+ t = \max(\log t, 0)$ для $t > 0$.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 03-01-00724.

В работе [3] установлен аналогичный результат для более общего типа нормировок, а именно, пусть наборы чисел $\{a_i\}_{i=1}^d$ и $\{q_i\}_{i=1}^d$ таковы, что

$$\frac{1}{2} < a_i \leq 1 \quad \text{и} \quad q_i \geq \frac{1}{a_i} \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Положим

$$q = \max_{1 \leq i \leq d} q_i \quad \text{и} \quad r = \#\{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq d: q_i = q\}. \quad (3)$$

Тогда условие

$$\mathbb{E}|X_1|^q (\log^+ |X_1|)^{r-1} < \infty, \quad \mathbb{E}X_1 = 0 \quad (4)$$

влечет

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} n_1^{q_1 a_1 - 2} \dots n_d^{q_d a_d - 2} \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon n_1^{a_1} \dots n_d^{a_d}) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5)$$

Вернемся теперь к формуле (1). Легко видеть, что сумма этого ряда стремится к бесконечности, когда ε убывает к нулю. Представляется интересной задачей найти асимптотику по ε , с которой происходит это возрастание. Частично ответ на этот вопрос дается в статьях [4] и [5].

Для суммы ряда в формуле (2) асимптотика возрастания по ε установлена в теореме 3 работы [6]. А именно, доказано, что в случае $q \geq 2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon^{\frac{qa-1}{a-1/2}}}{|\log \varepsilon|^{d-1}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}|^{qa-2} \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq \varepsilon |\mathbf{n}|^a) \quad (6)$$

существует и конечен. Эта теорема также дает явное значение предела (6).

Целью данной работы является обобщение предыдущего результата, а именно, будет указана асимптотика возрастания по ε суммы ряда (5).

Пусть наборы чисел $\{a_i\}_{i=1}^d$ и $\{q_i\}_{i=1}^d$ таковы, что

$$\frac{1}{2} < a_i \leq 1 \quad \text{и} \quad q_i \geq 2 \quad \forall i = 1, \dots, d,$$

а величины q и r фигурируют в формуле (3). Введем для $i = 1, \dots, d$

$$b_i = \frac{q_i a_i - 1}{a_i - 1/2}, \quad b = \max_{1 \leq i \leq d} (b_i) \quad \text{и} \quad k+1 = \#\{i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq d: b_i = b\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$b_1 \leq \dots \leq b_{d-k-1} < b_{d-k} = \dots = b_d,$$

где $k \geq 0$. В дальнейшем будем использовать также следующие векторные обозначения. Для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d$ (в частности для $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) положим

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d), \quad \mathbf{x}^{\mathbf{y}} = (x_1^{y_1}, \dots, x_d^{y_d}), \quad |\mathbf{x}| = x_1 \dots x_d.$$

Сумму векторов и умножение вектора на скаляр, как обычно, определим покомпонентно. Обозначим также $\mathbf{c} = (c, \dots, c)$ для любого действительного c .

Кроме того, на протяжении всей работы N будет обозначать случайную величину, имеющую стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть случайное поле $\{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$, состоящее из НОР случайных величин, таково, что выполнены условия (4) и $\mathbb{E}X_1^2 = 1$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}^{\mathbf{a}} - 2}| \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon \mathbf{n}^{\mathbf{a}}) = D_{\mathbf{a}, \mathbf{q}}, \quad (7)$$

где

$$D_{\mathbf{a}, \mathbf{q}} = \frac{\mathbb{E}|N|^{b_d} \prod_{i=1}^{d-k-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{(a_i-1/2)(b_i-b_d)-1} \right)}{k! b_d (a_{d-k} - 1/2) \dots (a_d - 1/2)}.$$

Всюду в работе произведение по пустому множеству полагаем равным единице.

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (7) обобщает формулу (6), доказанную в [6]. При этом, в отличие от (6), в случае нормировки общего типа, рассматриваемой в теореме 1, степень логарифма в асимптотической формуле (7) не совпадает, вообще говоря, со степенью логарифма в моментном условии (4).

2. Вспомогательные утверждения. Нам потребуются четыре леммы.

Пусть для $t > 0$

$$R_d(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \mathbf{x}^{\mathbf{v}-1} \mathbb{P}(|N| > x_1) \mathbb{I}(x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_d \geq t) d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{v} = (b_1, b_2 - b_1, \dots, b_d - b_{d-1})$ и $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_d$.

ЛЕММА 1. Существует

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{R_d(t)}{|\log t|^k} = \frac{1}{k!} \frac{\mathbb{E}|N|^{b_{d-k}}}{b_{d-k}} \prod_{i=1}^{d-k-1} \frac{1}{(b_{d-k} - b_i)} =: A_{\mathbf{b}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для $d = 1$ утверждение леммы проверяется интегрированием по частям. Далее, применяя индукцию по d , убеждаемся, что соответствующие пределы существуют и удовлетворяют следующим соотношениям.

При $b_d > b_{d-1}$

$$A_{\mathbf{b}} = \frac{A_{b_1, \dots, b_{d-2}, b_d}}{b_d - b_{d-1}},$$

при $b_d = \dots = b_{d-k}$

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{b}} &= A_{b_1, \dots, b_{d-1}} - \frac{A_{b_1, \dots, b_{d-2}}}{k} \quad \text{для } k > 1, \\ A_{\mathbf{b}} &= A_{b_1, \dots, b_{d-1}} \quad \text{для } k = 1. \end{aligned}$$

Положим для $t > 0$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^d$

$$F_d(\mathbf{z}, t) = \int_{z_1}^\infty \dots \int_{z_d}^\infty |\mathbf{x}^{\mathbf{q}^{\mathbf{a}} - 2}| \mathbb{P}(|N| > t |\mathbf{x}^{\mathbf{a} - 1/2}|) d\mathbf{x}.$$

ЛЕММА 2. При $t \rightarrow 0+$ имеем

$$F_d(\mathbf{z}, t) \sim t^{-b_d} |\log t|^k \frac{A_{\mathbf{b}}}{|\mathbf{a} - \mathbf{1}/2|} |\mathbf{z}^{(\mathbf{a}-\mathbf{1}/2)(\mathbf{b}-b_d\mathbf{1})}|,$$

где $A_{\mathbf{b}}$ фигурирует в лемме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Интегрируя почленно и делая замену переменных, убеждаемся, что

$$F_d(\mathbf{z}, t | \mathbf{z}^{-(\mathbf{a}-\mathbf{1}/2)}) = t^{-b_d} R_d(t) \frac{|\mathbf{z}^{(\mathbf{a}-\mathbf{1}/2)\mathbf{b}}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{1}/2|}.$$

Далее остается применить лемму 1.

Для произвольного элемента $\mathbf{m}$ решетки $\mathbb{N}^d$ положим

$$T_{\mathbf{m}; \mathbf{q}, \mathbf{a}}(t) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{m}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|S_{\mathbf{n}}| \geq t |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}|).$$

ЛЕММА 3. Пусть $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда для любого $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_{\mathbf{m}; \mathbf{q}, \mathbf{a}}(t) t^{b_d}}{|\log t|^k} = \frac{A_{b_{d-k}, \dots, b_d} \prod_{i=1}^{d-k-1} \left(\sum_{n=m_i}^{\infty} n^{(a_i-1/2)(b_i-b_d)-1} \right)}{(a_{d-k}-1/2) \dots (a_d-1/2)} =: B_{\mathbf{m}; \mathbf{q}, \mathbf{a}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Рассмотрим случай $b_1 = \dots = b_d$. Заметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $c \in \mathbb{N}$ так, что для всех натуральных $z_1 > c, \dots, z_d > c$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon) \int_{z_1}^{\infty} \dots \int_{z_d}^{\infty} |\mathbf{x}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|N| > t |\mathbf{x}^{\mathbf{a}-1/2}|) d\mathbf{x} \\ \geq \sum_{\mathbf{n} > \mathbf{z}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|N| \geq t |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \\ \geq (1 - \varepsilon) \int_{z_1+1}^{\infty} \dots \int_{z_d+1}^{\infty} |\mathbf{x}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|N| > t |\mathbf{x}^{\mathbf{a}-1/2}|) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Из леммы 2 для достаточно больших c имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0+} \left(\sum_{\mathbf{n} > \mathbf{z}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|N| \geq t |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \frac{t^{b_d}}{|\log t|^k} \right) &\leq \frac{(1 + \varepsilon) A_{\mathbf{b}}}{|\mathbf{a} - \mathbf{1}/2|}, \\ \liminf_{t \rightarrow 0+} \left(\sum_{\mathbf{n} > \mathbf{z}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbb{P}(|N| \geq t |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \frac{t^{b_d}}{|\log t|^k} \right) &\geq \frac{(1 - \varepsilon) A_{\mathbf{b}}}{|\mathbf{a} - \mathbf{1}/2|}. \end{aligned}$$

При $d = 1$ утверждение леммы очевидно, а при $d > 1$ воспользуемся методом математической индукции.

Пусть теперь $d - 1 > k \geq 0$ и $b_d = \dots = b_{d-k} > b_{d-k-1}$. Несложно видеть, что существует константа $M > 0$ такая, что

$$\frac{|\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}|}{|\mathbf{x}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}|} \leq M$$

для всех $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$ и $\mathbf{n} \geq \mathbf{x} \geq \mathbf{n} - \mathbf{1}$. Поэтому, для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ справедливо неравенство

$$M \int_{z_1}^{\infty} \cdots \int_{z_d}^{\infty} |\mathbf{x}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbf{P}(|N| > t|\mathbf{x}^{\mathbf{a}-1/2}|) d\mathbf{x} \geq \sum_{\mathbf{n} > \mathbf{z}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbf{P}(|N| \geq t|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|)$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \left(\sum_{\mathbf{n} > \mathbf{z}} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \mathbf{P}(|N| \geq t|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \frac{t^{b_d}}{|\log t|^k} \right) \leq \frac{MA_{\mathbf{b}} |\mathbf{z}^{(\mathbf{a}-1/2)(\mathbf{b}-b_d\mathbf{1})}|}{|\mathbf{a}-1/2|}.$$

Снова воспользуемся принципом математической индукции. Случай $d = 1$ уже разобран. Пусть теперь $d > 1$. Разбивая множество $\{\mathbf{n}: \mathbf{n} \geq \mathbf{m}\}$ на “слой” ортогонально оси n_1 , получаем в силу предположения индукции и того, что $b_d > b_1$,

$$B_{\mathbf{m}; \mathbf{q}, \mathbf{a}} = B_{m_2, \dots, m_d; q_2, \dots, q_d, a_2, \dots, a_d} \sum_{n_1=m_1}^{\infty} n_1^{(a_1-1/2)(b_1-b_d)-1}.$$

Утверждение леммы теперь очевидно.

ЛЕММА 4. Пусть случайное поле $X = \{X_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$ таково, что выполнено условие (4) и $\mathbf{E}X_{\mathbf{1}}^2 = 1$. Тогда для X справедливо утверждение леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Положим для произвольных $M > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| \leq M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \left| \mathbf{P}\left(\frac{|S_{\mathbf{n}}|}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \geq \varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| \right) - \mathbf{P}(|N| \geq \varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \right|, \\ D_2 &= \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \left| \mathbf{P}\left(\frac{|S_{\mathbf{n}}|}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \geq \varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| \right) \right|, \\ D_3 &= \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \left| \mathbf{P}(|N| \geq \varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}|) \right|. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 достаточно показать, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} D_i = 0$$

для $i = 1, 2, 3$. Поскольку случай $i = 3$ охватывается случаем $i = 2$, то достаточно рассмотреть лишь $i = 1, 2$.

Возьмем любое $M > 0$ и оценим сумму D_1 . Несложно видеть, что

$$\frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| \leq M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2}| \leq C,$$

где C — число, зависящее от M , $\mathbf{q}$ и $\mathbf{a}$. Теперь, воспользовавшись центральной предельной теоремой, видим, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} D_1 = 0.$$

Далее, для любого $h > 0$ в силу леммы 2.5 работы [6] справедливо соотношение

$$\mathbf{P}(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}|) \leq |\mathbf{n}| \mathbf{P}\left(|X_1| > \frac{\varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}|}{h}\right) + 2|\mathbf{n}|^h \frac{(e\mathbf{E}|X_1|^2)^h h^h}{\varepsilon^{2h} |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}|^{2h}}. \quad (8)$$

Используя оценку (8), получаем, что

$$\frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} D_2 \leq K_1 + K_2.$$

Здесь

$$K_1 = \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-1}| \mathbf{P}\left(|X_1| > \frac{\varepsilon |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}|}{h}\right),$$

$$K_2 = C(h) \frac{\varepsilon^{b_d}}{\varepsilon^{2h} |\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2-h(2\mathbf{a}-1)}|,$$

$$C(h) = 2(e\mathbf{E}|X_1|^2)^h h^h.$$

Обозначим для $d \geq 2$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{x}_{[d-1]}^{\mathbf{y}} = (x_1^{y_1}, \dots, x_{d-1}^{y_{d-1}}), |\mathbf{x}_{[d-1]}| = x_1 \dots x_{d-1}.$$

Покажем с помощью индукции по d , что при любом $h > b_d/2$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} K_2 = 0.$$

При $d = 1$ это очевидно. Пусть предположение индукции уже доказано для $d - 1$, т.е. при $h > b_{d-1}/2$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} C(h) \frac{\varepsilon^{b_{d-1}}}{\varepsilon^{2h} |\log \varepsilon|^l} \sum_{|\mathbf{n}_{[d-1]}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}_{[d-1]}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2-h(2\mathbf{a}-1)}| = 0,$$

где $(l+1)$ – кратность числа b_{d-1} в наборе $\{b_1, \dots, b_{d-1}\}$. Легко видеть, что $K_2 \leq H_1 + H_2$, где

$$H_1 = C_1(h) \frac{\varepsilon^{b_d}}{\varepsilon^{2h} |\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}_{[d-1]}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}_{[d-1]}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2-h(2\mathbf{a}-1)}|,$$

$$H_2 = C(h) \frac{\varepsilon^{b_d}}{\varepsilon^{2h} |\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}_{[d-1]}^{\mathbf{a}-1/2}| \leq M/\varepsilon, |\mathbf{n}^{\mathbf{a}-1/2}| > M/\varepsilon} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-2-h(2\mathbf{a}-1)}|.$$

Применяя предположение индукции для H_1 и суммируя по n_d в ряде H_2 , получаем, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0+} (H_1 + H_2) = 0.$$

Осталось оценить K_1 . Будем рассматривать лишь $M > 2$. Пусть

$$s = \min_{1 \leq i \leq d} \left(\frac{a_i}{a_i - 1/2} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}}| > (M/\varepsilon)^s} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-1}| \sum_{m \geq \lfloor |\mathbf{n}^{\mathbf{a}}| \rfloor} \mathbf{P}(\varepsilon m < |hX_1| \leq \varepsilon(m+1)) \\ &\leq \frac{\varepsilon^{b_d}}{|\log \varepsilon|^k} \sum_{m \geq \lfloor (M/\varepsilon)^s \rfloor} \mathbf{P}(\varepsilon m < |hX_1| \leq \varepsilon(m+1)) \sum_{|\mathbf{n}^{\mathbf{a}}| < m+1} |\mathbf{n}^{\mathbf{q}\mathbf{a}-1}|. \end{aligned}$$

Просуммировав по n_d , можно видеть, что при достаточно малых ε и для некоторого постоянного C

$$\begin{aligned} \frac{|\log \varepsilon|^k}{\varepsilon^{b_d}} K_1 &\leq C \sum_{m > (M/2\varepsilon)^s} \mathbf{P}(\varepsilon m < |hX_1| \leq \varepsilon(m+1)) m^q (\log m)^{r-1} \\ &\leq C \varepsilon^{-q} \sum_{m > (M/2\varepsilon)^s} (\varepsilon m)^q \left(\frac{s}{s-1} \right)^{r-1} (\log(\varepsilon m))^{r-1} \mathbf{P}(\varepsilon m < |hX_1| \leq \varepsilon(m+1)) \\ &\leq C \varepsilon^{-q} \left(\frac{s}{s-1} \right)^{r-1} \mathbf{E} \left(|hX_1|^q (\log |hX_1|)^{r-1} \mathbb{I} \left(|hX_1| > \frac{M^s}{2^s \varepsilon^{s-1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $b_d \geq q$, соотношение $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} K_1 = 0$ доказано при любом $M > 2$.

Утверждение теоремы 1 вытекает из последней леммы.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. В. Булинскому за целый ряд существенных замечаний и общее внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baum L. E., Katz M. Convergence rate in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 108–123.
- [2] Gut A. Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices // Ann. Probab. 1978. V. 6. P. 469–482.
- [3] Deng D. Complete convergence and convergence rates in Marcinkiewicz law of large numbers for random variables indexed by $\mathbb{Z}_+^d$ // Math. Appl. 1996. V. 9. P. 441–448.
- [4] Chen R. A remark on the tail probability of a distribution // J. Multivariate Anal. 1978. V. 8. P. 328–333.
- [5] Gut A., Spataru A. Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis law of large numbers // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 248. P. 233–246.
- [6] Gut A., Spataru A. Precise asymptotics in some strong limit theorems for multidimensionally indexed random variables // J. Multivariate Analysis. 2003. V. 86. P. 398–422.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: s.dilman@mail.ru

Поступило
24.11.2004
Исправленный вариант
15.11.2005