Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Свистула, В. М. Клишкин, О поточечном пределе векторных зарядов, обладающих свойством Сакса, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 407–415

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:07:37

УДК 519.53

О ПОТОЧЕЧНОМ ПРЕДЕЛЕ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ САКСА

В. М. Климкин, М. Г. Свистула

Известная теорема о плотности пространства вероятностных зарядов со свойством Сакса в пространстве всех вероятностных зарядов в топологии поточечной сходимости доказана в векторном случае. Новым является рассмотрение равномерного свойства Сакса для семейства зарядов и нахождение достаточных условий для того, чтобы поточечный предел последовательности зарядов обладал свойством Сакса.

Библиография: 11 названий.

1. Всюду в дальнейшем: B – булева алгебра с операциями объединения $\vee$, пересечения $\wedge$, разности $\setminus$, дополнения $'$, отношением порядка $\leq$, единицей e и нулем 0 ; Y – вещественное линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$ (сокращенно, ЛНП); рассматриваем заряды, определенные на B , со значениями в Y .

Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех исчерпывающих зарядов, через $\mathcal{L}$ множество исчерпывающих зарядов, обладающих свойством Сакса (определения см. в пункте 2). На $\mathcal{P}$ введем топологию поточечной сходимости. В скалярном случае, а именно для вероятностных зарядов, М. Бхаскара Рао и К. П. С. Бхаскара Рао [1, теорема 6.1] доказали, что $\mathcal{L}$ всюду плотно в $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда стоуновское пространство X булевой алгебры B является совершенным. В данной статье, модифицируя доказательство теоремы 6.1 [1], мы распространяем этот результат на векторный случай, когда Y – банахово пространство (см. теорему 1).

Таким образом, в случае совершенного X для любого $\mu \in \mathcal{P}$ существует сеть $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathcal{L}$ такая, что $\mu_\gamma(b) \rightarrow \mu(b)$ для любого $b \in B$. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли для заряда μ , не обладающего свойством Сакса, возможно даже имеющего атомы, подобрать *последовательность* зарядов со свойством Сакса, сходящуюся к μ поточечно? Используя теорему 2, получаем отрицательный ответ на этот вопрос для исчерпывающего заряда на f_1 -алгебре (следствие 2.7). Помимо этого, теорема 2 представляет самостоятельный интерес, так как дает достаточные условия для того, чтобы поточечный предел последовательности зарядов обладал свойством Сакса, а также имеет ряд интересных следствий.

2. Приведем основные определения. Функцию $\mu : B \rightarrow Y$ называем *зарядом*, если для любых элементов $b_1, b_2 \in B$, где $b_1 \wedge b_2 = 0$, выполняется $\mu(b_1 \vee b_2) = \mu(b_1) + \mu(b_2)$.

Заряд $\mu : B \rightarrow [0, 1]$, где $\mu(e) = 1$, называем *вероятностным*.

Последовательность $\{b_n\} \subset B$ называем *спектром*, если $b_i \wedge b_j = 0$ при $i \neq j$.

Функцию $\mu: B \rightarrow Y$ называем *мерой*, если для любого спектра $\{b_n\} \subset B$, для которого $\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n \in B$, выполняется $\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty} b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(b_n)$.

Говорим, что семейство функций $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, *равномерно исчерпывается*, если для любого спектра $\{b_n\} \subset B$ выполняется следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ имеем $\|\mu_\gamma(B_n)\| < \varepsilon$ сразу для всех $\gamma \in \Gamma$. В случае одной функции говорят, что она *исчерпывается*.

Очевидно, мера на булевой σ -алгебре, ограниченный скалярный заряд на булевой алгебре исчерпываются.

Пусть $\mu: B \rightarrow Y$, $b \in B$. Обозначим

$$\tilde{\mu}(b) = \sup\{\|\mu(a)\|: a \in B, a \leq b\}.$$

Нетрудно показать, что семейство функций $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ равномерно исчерпывается тогда и только тогда, когда семейство функций $\{\tilde{\mu}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ равномерно исчерпывается [2, гл. 4, § 1, теорема 1.1].

Конечный набор элементов $\{b_1, \dots, b_n\} \subset B$ называем *разбиением* элемента $b \in B$, если $\bigvee_{i=1}^n b_i = b$ и $b_i \wedge b_j = 0$ при $i \neq j$.

Говорим, что семейство функций $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ обладает *равномерным свойством Сакса*, если для любого элемента $b \in B$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента b такое, что $\tilde{\mu}_\gamma(b_i) < \varepsilon$ сразу для всех $\gamma \in \Gamma$, $i = 1, \dots, n$.

Говорим, что семейство функций $\{\mu\}_{\gamma \in \Gamma}$ обладает *равномерным слабым свойством Сакса*, если для любого элемента $b \in B$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента b такое, что $\|\mu_\gamma(b_i)\| < \varepsilon$ сразу для всех $\gamma \in \Gamma$, $i = 1, \dots, n$.

В случае одной функции говорят о *свойстве Сакса* и *слабом свойстве Сакса*.

Легко показать, что если семейство зарядов $\{\mu\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, обладает равномерным свойством Сакса, то оно равномерно ограничено. Действительно, существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента e такое, что $\tilde{\mu}_\gamma(b_i) \leq 1$ сразу для всех $\gamma \in \Gamma$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ имеем

$$\tilde{\mu}_\gamma(e) \leq \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_\gamma(b_i) \leq n.$$

Элемент $b \in B$, $b \neq 0$, называется *атомом булевой алгебры* B , если из того, что $a \in B$ и $a \leq b$, следует, что $a = 0$ или $a = b$.

Алгебра B будет *безатомной* тогда и только тогда, когда ее стоуновское пространство X является совершенным, т.е. не имеет изолированных точек [3, § 9].

Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – некоторый заряд. Элемент $b \in B$ называется *атомом* μ , если $\mu(b) \neq 0$ и для любого $a \in B$ такого, что $a \leq b$, выполняется либо $\mu(a) = 0$, либо $\mu(a) = \mu(b)$. Заряд, не имеющий атомов, называется *неатомическим*.

Очевидно, свойство Сакса влечет неатомичность заряда μ . Как показывает следующий пример, обратное, вообще говоря, не верно.

ПРИМЕР положительного неатомического заряда на σ -алгебре, не обладающего свойством Сакса. Пусть Σ – σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$; пусть, далее, μ – мера Лебега. Через Σ_0 обозначим класс всех тех множеств из Σ , для которых $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$.

Для множества $E \in \Sigma_0$ положим

$$\nu_0(E) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu(E) = 0, \\ 2, & \text{если } \mu(E) = 1. \end{cases}$$

Очевидно, Σ_0 – подалгебра алгебры Σ и ν_0 является зарядом на Σ_0 . Продолжим ν_0 на Σ так, чтобы продолжение ν было зарядом, множество значений которого содержится в замыкании множества значений ν_0 [3, § 47]. Следовательно, заряд ν принимает два значения: 0 и 2.

Положим $\varphi = \mu + \nu$. Ясно, что φ – неатомический заряд на σ -алгебре Σ , не обладающий свойством Сакса: для $\varepsilon = 2$ нет разбиения отрезка $[0, 1]$, соответствующего определению. Заметим, что φ не принимает ни одного значения из отрезка $[1, 2]$, в то время как наибольшее значение φ на Σ равно 3.

Известно, что для меры на булевой σ -алгебре неатомичность и свойство Сакса эквивалентны.

Неатомичность и свойство Сакса влекут линейную связность образа для широких классов функций [4]. Еще в работах [5], [6] содержался результат о том, что образ неатомической меры $\mu: \Sigma \rightarrow Y$, где Σ – σ -алгебра множеств, является линейно связным множеством. Как показывает приведенный выше пример, образ неатомического заряда на σ -алгебре не обязан быть линейно связным. Однако более сильное условие – свойство Сакса – является достаточным для линейной связности образа заряда на булевой σ -алгебре (см., например, [4]).

Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – некоторый заряд. Для любого $b \in B$ положим $\|\mu\|(b) = \sup \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(b_i) \right\|$, где $\sup$ берется по всевозможным разбиениям $\{b_i\}_{i=1}^n$ элемента b и наборам чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, где $|\alpha_i| \leq 1$. Функция $\|\mu\|: B \rightarrow [0, +\infty]$ называется *полувариацией* μ . Нами будут использованы следующие свойства полувариации: монотонность, равенство $\|\mu\|(b) = \sup \{\|f\mu\|(b): f \in Y^*, \|f\| \leq 1\}$, оценка $\check{\mu}(b) \leq \|\mu\|(b) \leq 2\check{\mu}(b)$ и тот факт, что если μ – мера на булевой σ -алгебре, то $\|\mu\|$ непрерывна сверху в 0, т.е. для любой убывающей последовательности $\{b_n\} \subset B$, где $\bigwedge_{n=1}^{\infty} b_n = 0$, выполняется $\lim_n \|\mu\|(b_n) = 0$. Подробнее о свойствах полувариации см. [2, гл. 2, § 7].

Следуя [7], булеву алгебру B будем называть *f_1 -алгеброй*, если для любых спектров $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ из B , для которых $a_n \wedge b_k = 0$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, существуют бесконечное множество индексов $P \subset \mathbb{N}$ и элемент $b \in B$ такие, что $b_k \leq b$ при всех $k \in P$ и $b \wedge a_n = b \wedge b_k = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \setminus P$.

Очевидно, σ -алгебра является f_1 -алгеброй. Обратное, как известно, не верно.

3. Далее приведем результаты о разложении, которые известны и доказывались различными способами (см., например, [8], [9]). Новым здесь является выделение свойства (r), используемого при доказательстве теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – мера, где B – булева σ -алгебра, Y – ЛНП. Тогда справедливо разложение

$$\mu(b) = \mu_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(b) y_i, \quad b \in B, \quad (1)$$

где $\mu_0: B \rightarrow Y$ – неатомическая мера, $\mu_i: B \rightarrow \{0, 1\}$ – двузначные вероятностные меры, $y_i \in Y$, $i \in \mathbb{N}$. Причем, если Y банахово, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ обладает свойством (r): для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i y_i \right\| < \varepsilon$ для всех $\alpha_i \in \mathbb{R}$, для которых $|\alpha_i| \leq 1$, $i = n+1, \dots, \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму Порна, легко доказать существование максимального спектра атомов меры μ . Пусть это $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B$. Обозначим $a = e \setminus (\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i)$. Положим $\mu_0(b) = \mu(b \wedge a)$, $y_i = \mu(a_i)$,

$$\mu_i(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu(b \wedge a_i) = y_i, \\ 0, & \text{если } \mu(b \wedge a_i) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, справедливо разложение (1).

Пусть $|\alpha_i| \leq 1$, $i \in \mathbb{N}$; $n, m \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i \mu(a_i) \right\| \leq \|\mu\| \left(\bigvee_{i=n+1}^{n+m} a_i \right) \leq \|\mu\| \left(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i \right).$$

Так как полувариация $\|\mu\|$ непрерывна сверху в 0, то $\|\mu\| \left(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i \right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, выполняется условие Коши и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ сходится, поскольку Y банахово.

Пусть $m \rightarrow \infty$. Тогда

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i y_i \right\| \leq \|\mu\| \left(\bigvee_{i=n+1}^{\infty} a_i \right).$$

Значит, выполняется свойство (r).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Σ – σ -алгебра подмножеств множества Ω , порожденная алгеброй $\mathcal{A}$. Пусть $\mu: \Sigma \rightarrow Y$ – мера, обладающая свойством Сакса. Тогда сужение μ на $\mathcal{A}$, обозначаемое $\mu_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow Y$, тоже обладает свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для положительной меры предложение 2 справедливо [1, лемма 3.1].

Известно [10, гл. IV, § 10, лемма 5], что для меры $\mu: \Sigma \rightarrow Y$ существует эквивалентная ей положительная мера $\nu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$. Эквивалентность здесь может трактоваться как одновременное выполнение двух условий:

- 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $E \in \Sigma$, $\tilde{\mu}(E) < \delta$, то $\nu(E) < \varepsilon$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $E \in \Sigma$, $\nu(E) < \delta$, то $\tilde{\mu}(E) < \varepsilon$.

Так как $\mu: \Sigma \rightarrow Y$ обладает свойством Сакса, в силу условия (1) $\nu: \Sigma \rightarrow [0, +\infty)$ тоже обладает свойством Сакса. В силу замечания в начале доказательства $\nu_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ обладает свойством Сакса. Для $\varepsilon > 0$ найдем δ согласно условию (2). Так как $\nu_{\mathcal{A}}$ обладает свойством Сакса, существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathcal{A}$ элемента e такое, что $\nu(b_i) < \delta$, $i \in 1, \dots, n$. Тогда $\tilde{\mu}(b_i) < \varepsilon$, $i \in 1, \dots, n$. Очевидно,

$$\sup\{\|\mu(a)\|: a \in \mathcal{A}, a \leq b\} \leq \tilde{\mu}(b), \quad b \in \mathcal{A}.$$

Значит, $\mu_{\mathcal{A}}$ обладает свойством Сакса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – исчерпывающий заряд, где B – булева алгебра, Y – банахово пространство. Тогда справедливо разложение

$$\mu(b) = \mu_0(b) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(b) y_i, \quad b \in B, \quad (2)$$

где $\mu_0: B \rightarrow Y$ – исчерпывающий заряд, обладающий свойством Сакса, $\mu_i: B \rightarrow \{0, 1\}$ – двузначные вероятностные заряды, $y_i \in Y$, $i \in \mathbb{N}$; ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ обладает свойством (r).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – стоуновское пространство булевой алгебры B ; $\mathcal{A}$ – алгебра открыто-замкнутых множеств; Σ – σ -алгебра, порожденная алгеброй $\mathcal{A}$; $T: B \rightarrow \mathcal{A}$ – изоморфизм [3, теорема 8.2].

Очевидно, $\mu T^{-1}: \mathcal{A} \rightarrow Y$ – исчерпывающая мера. Продолжим ее на Σ [11, теорема 1], а продолжение обозначим λ . К мере $\lambda: \Sigma \rightarrow Y$ применим разложение (1). Тогда

$$\lambda(E) = \lambda_0(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(E) y_i, \quad E \in \Sigma,$$

где $\lambda_0: \Sigma \rightarrow Y$ – неатомическая мера, $\lambda_i: \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ – двузначные вероятностные меры, $y_i \in Y$, $i \in \mathbb{N}$; ряд $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ обладает свойством (r).

Так как λ_0 – неатомическая мера на σ -алгебре Σ , то λ_0 обладает свойством Сакса на Σ . В силу предложения 2 $\lambda_0|_{\mathcal{A}}$ тоже обладает свойством Сакса.

Обозначим $\mu_0(b) = \lambda_0[T(b)]$, $\mu_i(b) = \lambda_i[T(b)]$, $b \in B$, $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, справедливо разложение (2).

4. Приведенное здесь доказательство теоремы 1 представляет собой модификацию на векторный случай доказательства теоремы 6.1 работы [1], в которой утверждалось: пусть B – булева алгебра; для того, чтобы множество вероятностных зарядов, обладающих свойством Сакса, было всюду плотным в множестве всех вероятностных зарядов относительно топологии поточечной сходимости, необходимо и достаточно, чтобы стоуновское пространство X булевой алгебры B было совершенным.

Следующее утверждение доказано в работе [1, лемма 6.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть B – булева алгебра, стоуновское пространство X которой является совершенным; пусть $b \in B$, $b \neq 0$. Тогда существует вероятностный заряд μ на B , обладающий свойством Сакса, для которого $\mu(b) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть B – булева алгебра, X – ее стоуновское пространство, Y – банахово пространство. Для того чтобы для любого исчерпывающего заряда $\mu: B \rightarrow Y$ существовала сеть исчерпывающих, обладающих свойством Сакса зарядов $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, поточечно сходящаяся к μ , необходимо и достаточно, чтобы X было совершенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – исчерпывающий заряд. В силу предложения 3 справедливо разложение (2) с перечисленными в предложении 3 свойствами.

Для любого $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $\Gamma_i = \{b \in B: \mu_i(b) = 1\}$. Положим $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots$. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$, $\beta = (b_1, b_2, \dots)$, где $\alpha, \beta \in \Gamma$. Полагаем $\alpha \geq^* \beta$,

если $a_i \leq b_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Легко показать, что Γ является частично упорядоченным направленным по возрастанию множеством.

Пусть $\beta = (b_1, b_2, \dots)$, $\beta \in \Gamma$. В силу предложения 4 существуют вероятностные, обладающие свойством Сакса, заряды $\mu_{b_i}: B \rightarrow [0, 1]$ такие, что $\mu_{b_i}(b_i) = 1$. Положим

$$\mu_\beta(a) = \mu_0(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{b_i}(a)y_i, \quad a \in B.$$

Заметим, что в силу предложения 3 ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{b_i}(a)y_i$ сходится равномерно относительно $a \in B$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_{b_i}(a)y_i \right\| < \varepsilon$$

для всех $a \in B$. Учитывая, что все заряды $\mu_{b_i}y_i$ исчерпываются и обладают свойством Сакса, по определению легко доказать исчерпываемость и свойство Сакса заряда $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_{b_i}y_i$. Тогда μ_β – тоже исчерпывающий заряд, обладающий свойством Сакса как сумма зарядов с такими же свойствами.

Покажем, что сеть $\{\mu_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ поточечно сходится к μ . Пусть $b \in B$. Положим $\beta = (b_1, b_2, \dots)$, где $b_i = b$, если $b \in \Gamma_i$, и $b_i = b'$, если $b \notin \Gamma_i$. Возьмем $\alpha \in \Gamma$, $\alpha \geq^* \beta$, где $\alpha = (a_1, a_2, \dots)$. Имеем $\mu_{a_i}(a_i) = 1$. Так как $a_i \leq b_i$, то в силу монотонности $\mu_{a_i}(b_i) = 1$. Таким образом, если $\mu_i(b) = 1$, то $\mu_{a_i}(b) = 1$; если $\mu_i(b) = 0$, то $\mu_{a_i}(b) = 0$. Тогда

$$\mu_\alpha(b) = \mu_0(b) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{a_i}(b)y_i = \mu_0(b) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(b)y_i = \mu(b).$$

Таким образом, показано, что для любого $b \in B$ существует $\beta \in \Gamma$ такое, что для всех $\alpha \geq \beta$ выполняется $\mu_\alpha(b) = \mu(b)$.

Необходимость. Покажем, что булева алгебра B не имеет атомов. Это, как известно, эквивалентно тому, что X является совершенным. Пусть $b \in B$ и $b \neq 0$. Возьмем $y \in Y$, $y \neq 0$. Легко показать, что существует двузначный заряд $\mu: B \rightarrow Y$ такой, что $\mu(b) = y$ [3, § 47]. По условию существует сеть обладающих свойством Сакса зарядов $\{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, поточечно сходящаяся к μ . Тогда $\mu_\gamma(b) \rightarrow y$. Существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $\|\mu_{\gamma_0}(b)\| > 0$. Поскольку заряд μ_{γ_0} обладает свойством Сакса, то существует $c \in B$, $c \leq b$, для которого $0 < \|\mu_{\gamma_0}(c)\| < \|\mu_{\gamma_0}(b)\|$. Значит, $0 < c < b$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть Y – произвольное банахово пространство, B – булева алгебра. Следующие три условия эквивалентны:

- 1) множество всех исчерпывающих, обладающих свойством Сакса зарядов из B в Y всюду плотно в множестве всех исчерпывающих зарядов из B в Y относительно топологии поточечной сходимости;
- 2) множество вероятностных, обладающих свойством Сакса зарядов на B всюду плотно в множестве вероятностных зарядов на B относительно топологии поточечной сходимости;
- 3) стоуновское пространство X булевой алгебры B является совершенным.

5. Следующая теорема устанавливает достаточные условия того, чтобы семейство зарядов обладало равномерным свойством Сакса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M = \{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – некоторое семейство зарядов, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, B – булева алгебра, Y – ЛНП. Пусть каждый заряд μ_γ обладает слабым свойством Сакса. Если семейство M равномерно исчерпывается, то оно обладает равномерным свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что семейство M не обладает равномерным свойством Сакса. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента e найдутся b_i и $\mu_{\gamma_i} \in M$ такие, что $\tilde{\mu}_{\gamma_i}(b_i) > \varepsilon$.

Будем говорить, что элемент $c \in B$ обладает свойством (*), если для любого разбиения $\{c_1, \dots, c_m\}$ элемента c найдутся c_i и $\mu_{\gamma_i} \in M$ такие, что $\tilde{\mu}_{\gamma_i}(c_i) > \varepsilon$.

Обозначим $a_1 = e$. В силу предположения a_1 обладает свойством (*). Тогда существует заряд $\mu_{\gamma_1} \in M$ такой, что $\tilde{\mu}_{\gamma_1}(a_1) > \varepsilon$. Отсюда следует существование элемента $p \in B$ такого, что $\|\mu_{\gamma_1}(p)\| > \varepsilon$. Обозначим $q = a_1 \setminus p$.

Так как заряд μ_{γ_1} обладает слабым свойством Сакса, то найдется такое разбиение $\{p_1, \dots, p_{n_1}\}$ элемента p , что

$$\|\mu_{\gamma_1}(p_i)\| < \frac{\varepsilon}{2^2}, \quad i \in 1, \dots, n_1.$$

Итак, $\{q, p_1, \dots, p_{n_1}\}$ – разбиение элемента a_1 . Среди его членов хотя бы один обладает свойством (*). Иначе элемент a_1 не обладал бы свойством (*).

Если q обладает свойством (*), то положим $a_2 = q$, $b_1 = p$.

Если q не обладает свойством (*), то им обладает некоторый элемент p_i . Обозначим $a_2 = p_i$. Положим $b_1 = p \setminus a_2$. Имеем

$$\|\mu_{\gamma_1}(b_1)\| \geq \|\mu_{\gamma_1}(p)\| - \|\mu_{\gamma_1}(a_2)\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

В любом случае, имеем $\|\mu_{\gamma_1}(b_1)\| > \varepsilon/2 + \varepsilon/2^2$; a_2 обладает свойством (*).

Рассмотрим a_2 вместо a_1 . Повторим описанную выше процедуру. Продолжив процесс до бесконечности, получим спектр $\{b_k\} \subset B$ и последовательность зарядов $\{\mu_{\gamma_k}\} \subset M$ такие, что $\|\mu_{\gamma_k}(b_k)\| > \varepsilon/2 + \varepsilon/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Это противоречит равномерной исчерпываемости семейства M .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Исчерпывающий заряд $\mu: B \rightarrow Y$, обладающий слабым свойством Сакса, обладает свойством Сакса.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $M = \{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, – семейство зарядов, каждый из которых обладает свойством Сакса. Если семейство M равномерно исчерпывается, то оно равномерно ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 семейство M обладает равномерным свойством Сакса и, следовательно, равномерно ограничено.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Исчерпывающий заряд $\mu: B \rightarrow Y$ обладает свойством Сакса тогда и только тогда, когда для любого $f \in Y^*$ скалярный заряд $f\mu$ обладает свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Рассмотрим семейство $M = \{f\mu: f \in Y^*, \|f\| \leq 1\}$. Легко проверить, что M равномерно исчерпывается. Тогда по теореме 2 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\{b_1, \dots, b_n\}$ элемента e такое, что

$$\lambda_i = \sup\{\tilde{f\mu}(b_i): f \in Y^*, \|f\| \leq 1\} < \varepsilon, \quad i \in 1, \dots, n.$$

Учитывая свойства полувариации, $\tilde{\mu}(b_i) \leq \|\mu\|(b_i) \leq 2\lambda_i < 2\varepsilon$, $i \in 1, \dots, n$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $M = \{\mu_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mu_\gamma: B \rightarrow Y$, – некоторая сеть зарядов. Пусть $\mu(b) = \lim \mu_\gamma(b)$ для любого $b \in B$. Если каждый заряд μ_γ обладает свойством Сакса и семейство M равномерно исчерпывается, то μ является исчерпывающим зарядом со свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечная аддитивность и исчерпываемость μ сразу следуют из определения, свойство Сакса – из теоремы 2.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$, $\mu_n: B \rightarrow Y$, – некоторая последовательность исчерпывающих зарядов; пусть B – f_1 -алгебра. Пусть $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Тогда последовательность $\{\mu_n\}$ равномерно исчерпывается и μ будет исчерпывающим зарядом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [7, теорема 2.6] для f_1 -алгебры множеств. Отсюда следует справедливость теоремы и для булевой f_1 -алгебры, так как при изоморфизме между B и алгеброй открыто-замкнутых множеств стоуновского пространства f_1 -свойство и исчерпываемость сохраняются.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$, $\mu_n: B \rightarrow Y$, – некоторая последовательность зарядов, каждый из которых исчерпывается и обладает свойством Сакса; пусть B – f_1 -алгебра. Пусть $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Тогда μ будет исчерпывающим зарядом со свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ равномерно исчерпывается. Далее применяем следствие 2.4.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$, $\mu_n: B \rightarrow \mathbb{R}$, – некоторая последовательность скалярных зарядов, каждый из которых обладает свойством Сакса; пусть B – f_1 -алгебра. Пусть $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Тогда μ будет зарядом со свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что μ_n исчерпывается, $n \in \mathbb{N}$. Остается применить следствие 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть $\mu: B \rightarrow Y$ – исчерпывающий заряд, не обладающий свойством Сакса; пусть B – f_1 -алгебра. Тогда μ нельзя представить как поточечный предел некоторой последовательности зарядов, обладающих свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует последовательность зарядов $\mu_n: B \rightarrow Y$, каждый из которых обладает свойством Сакса, и $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Возьмем $f \in Y^*$. Тогда $f\mu_n$ обладает свойством Сакса и $f\mu(b) = \lim_n f\mu_n(b)$ для любого $b \in B$. По следствию 2.6 заряд $f\mu$ обладает свойством Сакса. Так как μ исчерпывается, то по следствию 2.3 μ обладает свойством Сакса, что противоречит условию.

Для скалярного заряда этот результат можно усилить, опустив требование исчерпываемости.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть $\mu: B \rightarrow \mathbb{R}$ – скалярный заряд, не обладающий свойством Сакса; пусть B – f_1 -алгебра. Тогда μ нельзя представить как поточечный предел некоторой последовательности зарядов, обладающих свойством Сакса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив противное, получим, что μ обладает свойством Сакса по следствию 2.6.

Известна следующая

ТЕОРЕМА НИКОДИМА (о сходимости). Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n: B \rightarrow Y$, – некоторая последовательность мер; пусть B – булева σ -алгебра. Пусть $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Тогда μ является мерой.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mu_n: B \rightarrow Y$, – некоторая последовательность неатомических мер; пусть B – σ -алгебра. Пусть $\mu(b) = \lim_n \mu_n(b)$ для любого $b \in B$. Тогда μ является неатомической мерой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Никодима о сходимости μ является мерой. Каждая мера μ_n исчерпывается как мера на σ -алгебре и обладает свойством Сакса как неатомическая мера на σ -алгебре.

По следствию 2.5 мера μ обладает свойством Сакса и, значит, неатомическая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Bhaskara Rao M., Bhaskara Rao K. P. S. Charges on Boolean algebras and almost discrete spaces // *Mathematika*. 1973. № 20. P. 214–223.
- [2] Климкин В. М. Введение в теорию функций множества. Куйбышев: Изд-во Саратовского ун-та, Куйбышевский филиал, 1989.
- [3] Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.
- [4] Свистула М. Г. О связности образа неаддитивной функции множества. Деп. в ВИНТИ № 3765-B98. Самарский госуниверситет, 1998.
- [5] Landers D. Connectedness properties of the range of vector and semimeasures // *Manuscripta Math.* 1973. № 9. P. 105–112.
- [6] Constantinescu C. The range of atomless group-valued measures // *Comment. Math. Helvetici*. 1976. V. 51. № 2. P. 207–213.
- [7] Candeloro D. Sui teoremi di Vitali–Hahn–Saks, Dieudonné, e Nikodym // *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 1986. V. 34. № 8. P. 439–445.
- [8] Traynor T. Decomposition of group-valued additive set functions // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 1972. V. 22. № 3. P. 131–140.
- [9] Weber H. Die atomare Struktur topologischer Boolescher Ringe und s-beschränkter Inhalter // *Studia Math.* 1982. V. LXXIV. P. 57–81.
- [10] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [11] Кац М. И. О продолжении векторных мер // *Сиб. матем. ж.* 1972. Т. 13. № 5. С. 1158–1168.