Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Заитов, Некоторые категорные свойства функторов O_τ и O_R слабо аддитивных функционалов, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 681–693

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2740>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:30:11

НЕКОТОРЫЕ КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКТОРОВ

O_τ И O_R СЛАБО АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

А. А. Заитов

В работе исследованы пространства слабо аддитивных τ -гладких и радоновых функционалов. Показано, что функторы слабо аддитивных τ -гладких и радоновых функционалов слабо сохраняют плотность тихоновских пространств, функтор слабо аддитивных τ -гладких функционалов образует монаду в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Приведены примеры и замечания, показывающие не выполнения этими функторами некоторых условий нормальности в смысле Щепина. Изложены вопросы, которые имеют положительные решения для нормальных функторов.

Библиография: 12 названий.

0. Введение. В работе [1] было начато систематическое исследование пространств вероятностных τ -гладких и радоновых мер на тихоновских пространствах. Пространство слабо аддитивных функционалов является более широким объектом, чем пространство вероятностных мер. Пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных τ -гладких функционалов впервые рассматривалось в [2]. Наши интересы затрагивают в основном топологические и категориные свойства пространств слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Это связано с тем, что в последнее время развивается исследование нелинейных функционалов. Функционалы, исследуемые в данной работе, являются нелинейными.

Начало бурных исследований ковариантных нормальных функторов в категории компактов и их непрерывных отображений и в различных других категориях восходит к фундаментальной работе [3] Е. В. Щепина, где он выделил ряд элементарных свойств ковариантных функторов в категории компактов и ввел понятие нормального функтора. Т. Н. Радул показал, что функтор $O: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$, введенный им в [4], не удовлетворяет некоторым условиям нормальности. Функтор O можно продолжить по конструкции [5] А. Ч. Чигогидзе до функтора $O_\beta: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$, или до функтора $O \circ \beta: \text{Tych} \rightarrow \text{Comp}$ аналогично конструкции [6] В. В. Федорчука, рассмотренной для функтора P вероятностных мер, где было отмечено, что функтор $P \circ \beta: \text{Tych} \rightarrow \text{Comp}$, ставящий в соответствии тихоновскому пространству X компакт $P(\beta X)$, тоже продолжает функтор $P: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$, где через βX обозначено компактное расширение Стоуна–Чеха тихоновского пространства X .

Пространство $O_\beta(X)$, рассмотренное Р. Б. Бешимовым в [7], слишком узко и не содержит многих естественных функционалов ($\equiv$ слабо аддитивных, сохраняющих порядок,

нормированных функционалов), например, носители которых не компактны. А пространство $O(\beta X) = O \circ \beta(X)$, категорные свойства которого автором были изучены в [8], слишком широко, и в результате функтор $O \circ \beta: \text{Tych} \rightarrow \text{Comp}$ не сохраняет многих специфических свойств пространства X , переводя тихоновское пространство X в компакт $O(\beta X)$.

Поэтому естественно рассматривать пространства функционалов, заключенных между пространствами $O_\beta(X)$ и $O(\beta X)$.

Для этих целей введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Функционал $\mu \in O(\beta X)$ назовем *τ -гладким*, если $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Функционал $\mu \in O(\beta X)$ назовем *радоновым*, если $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности.

Пусть X — компакт. Напомним, что функционал $\mu: C(X) \rightarrow R$ называется [4]:

- 1) *слабо аддитивным*, если $\mu(\varphi + c_X) = \mu(\varphi) + c$ для любых $\varphi \in C(X)$ и $c \in R$;
- 2) *сохраняющим порядок*, если для любой пары функций $\varphi, \psi \in C(X)$ неравенство $\varphi \leq \psi$ влечет $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$;
- 3) *нормированным*, если $\mu(1_X) = 1$.

Для компакта X через $O(X)$ обозначается пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов $\mu: C(X) \rightarrow R$. На протяжении этой работы слабо аддитивный, сохраняющий порядок, нормированный функционал для

краткости просто будем называть функционалом.

Для тихоновского пространства X через $O_\tau(X)$ (соответственно, через $O_R(X)$) обозначим множество всех τ -гладких (соответственно, всех радоновых) функционалов $\mu \in O(\beta X)$. Очевидно, что имеют место следующие включения:

$$O_\beta(X) \subset O_R(X) \subset O_\tau(X) \subset O(\beta X) \quad (1)$$

для любого тихоновского пространства X , и равенства:

$$O_\beta(X) = O_R(X) = O_\tau(X) = O(\beta X) \quad (2)$$

для произвольного компактного пространства X .

Покажем, что конструкции пространств $O_R(X)$ и $O_\tau(X)$ порождают ковариантные функторы O_R и O_τ , действующие на категории Tych . Поскольку имеют места включения (1) для любого тихоновского пространства X , для проверки функториальности конструкций O_R и O_τ достаточно показать, что для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ тихоновских пространств выполняются включения

$$O(\beta f)(O_R(X)) \subset O_R(Y) \quad \text{и} \quad O(\beta f)(O_\tau(X)) \subset O_\tau(Y),$$

где $\beta f: \beta X \rightarrow \beta Y$ — стоун-чеховская компактификация отображения f .

Если $\mu \in O_\tau(X)$, то $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю. Пусть $\{\psi_\alpha\} \subset C_b(Y)$ — монотонно убывающая направленность, состоящая из функций, поточечно сходящихся к нулю. Тогда этими свойствами обладает и направленность $\{\psi_\alpha \circ f\} \subset C_b(X)$. Следовательно, $O(\beta f)(\mu)(\psi_\alpha) \rightarrow 0$.

Пусть теперь $\mu \in O_R(X)$. Пусть $\{\psi_\alpha\} \subset C_b(Y)$ — направленность, равномерно на компактах стремящаяся к нулю и состоящая из ограниченных в совокупности функций. Тогда направленность $\{\psi_\alpha \circ f\} \subset C_b(X)$ также состоит из ограниченных в совокупности функций. Кроме того, легко видеть, что направленность $\{\psi_\alpha \circ f\}$ равномерно на компактах стремится к нулю. Тогда $\mu(\psi_\alpha \circ f) \rightarrow 0$, т.е. $O(\beta f)(\mu)(\psi_\alpha) \rightarrow 0$. Значит, $O(\beta f)(\mu) \in O_R(Y)$.

Положим $O_\tau(f) = O(\beta f)|_{O_\tau(X)}$ и $O_R(f) = O(\beta f)|_{O_R(X)}$.

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 0.3. *Конструкции O_τ и O_R являются ковариантными функторами в категории Tych тихоновских пространств и их непрерывных отображений, продолжающимися функтор $O: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$.*

Наделим множества $O_\tau(X)$ и $O_R(X)$ $*$ -слабой топологией. Базу окрестностей функционала $\mu \in O_\tau(X)$ ($O_R(X)$) в $*$ -слабой топологии образуют множества вида

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in O(\beta X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon \} \cap O_\tau(X) \quad (\cap O_R(X)),$$

где $\varphi_i \in C_b(X)$, $i = 1, \dots, k$, и $\varepsilon > 0$.

В первом разделе работы исследованы категорные и топологические свойства пространства $O_\tau(X)$ — τ -гладких функционалов. Функтор O_τ сохраняет мономорфизмы с наложением условия C_b -вложенности отображений (теорема 1.2). Оказывается, пространство $P_\tau(X)$ всех вероятностных мер на X замкнуто лежит в $O_\tau(X)$ (предложение 1.4). В теореме 1.9 доказано, что функтор O_τ слабо сохраняет плотность тихоновских пространств. В связи с непрерывностью функторов доказана теорема 1.10, а теорема 1.11 гласит, что функтор O_τ сохраняет непустые пересечения в классе нормальных пространств.

Во втором разделе исследованы категорные и топологические свойства функтора O_R и доказаны аналогичные утверждения для этого функтора. Но оказывается, в отличие от функтора O_τ функтор O_R сохраняет произвольное пересечение замкнутых подмножеств нормального пространства X (теорема 2.9).

В третьем разделе работы показано, что функтор O_τ образует монаду (теорема 3.5) в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений.

В четвертом разделе показано, что функторы O_τ и O_R не являются нормальными, а также изложены вопросы, которые имеют положительные решения для случая нормальных функторов.

Всю недостающую информацию можно найти, например, в [9]. Однако в отличие от [9], в работе компактами называются бикомпактные хаусдорфовы пространства.

1. Категорные свойства функтора O_τ . Пусть X — тихоновское пространство. В этом разделе исследуем некоторые топологические свойства пространства $O_\tau(X)$ и категорные свойства функтора O_τ .

Напомним, что вложение $g: Y \rightarrow X$ называется [10] C_b -*вложением*, если всякая функция $\varphi \in C_b(Y)$ продолжается до некоторой функции $\tilde{\varphi} \in C_b(X)$.

Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Отображение $f: Y \rightarrow X$ является C_b -вложением тогда и только тогда, когда отображение $\beta f: \beta Y \rightarrow \beta X$ является вложением.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Функтор $O_\tau: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ переводит C_b -вложения во вложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — топологическое C_b -вложение тихоновских пространств и $\beta f: \beta Y \rightarrow \beta X$ — стоун-чеховская компактификация отображения f . При доказательстве теоремы 0.3 мы показали, что имеет место включение $O(\beta f)(O_\tau(Y)) \subset (O_\tau(X))$.

Пусть теперь $\mu_1, \mu_2 \in O_\tau(Y)$ — различные функционалы. Тогда существует такая $\varphi \in C_b(Y)$, что $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$. Поскольку Y C_b -вложено в X , то существует функция $\psi \in C_b(X)$ такая, что $\psi|_Y = \varphi$, иными словами, $\psi \circ f = \varphi$. Следовательно, имеем $O_\tau(f)(\mu_i)(\psi) = \mu_i(\psi \circ f) = \mu_i(\varphi)$, $i = 1, 2$. Таким образом, отображение $O_\tau(f): O_\tau(Y) \rightarrow O_\tau(X)$ инъективно. Теорема 1.2 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Если $f: Y \rightarrow X$ — замкнутое C_b -вложение, то множество $O_\tau(Y)$ замкнуто в $O_\tau(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.1 отображение $\beta f: \beta Y \rightarrow \beta X$ является вложением, т.е.

$$\beta Y = [Y]_{\beta X} \subset \beta X, \quad (3)$$

откуда имеем $O(\beta Y) \subset O(\beta X)$, поскольку функтор $O: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ сохраняет класс вложений.

Пусть $\mu \in O_\tau(X) \setminus O_\tau(Y)$ — произвольный функционал. Это означает, что $\mu \in O(\beta X)$ и $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой монотонно убывающей направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, поточечно сходящейся к нулю. Докажем, что $\mu \notin O(\beta Y)$. Допустим, что μ принадлежит $O(\beta Y)$. Пусть $\{\psi_\alpha\} \subset C_b(Y)$ — направленность, монотонно убывающая и поточечно сходящаяся к нулю, со свойством $\mu(\psi_\alpha) \not\rightarrow 0$. Выберем функции $\bar{\psi}_\alpha \in C_b(X)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\bar{\psi}_\alpha = \inf \{g \in C_b(X) : g \geq 0\}$;
- 2) $\bar{\psi}_\alpha|_Y = \psi_\alpha$.

Очевидно, что направленность $\{\bar{\psi}_\alpha\} \subset C_b(X)$ монотонно убывает и поточечно сходится к нулю. Имеем

$$\mu(\bar{\psi}_\alpha) \geq \mu(\bar{\psi}_\alpha|_Y) = \mu(\psi_\alpha) \not\rightarrow 0,$$

т.е. $\mu \notin O_\tau(X)$. Получили противоречие. Поскольку $O(\beta Y)$ — компакт, то функционал μ имеет окрестность, не пересекающуюся с $O(\beta Y)$, тем более, с $O_\tau(Y)$. Предложение 1.3 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Тогда $P_\tau(X)$ замкнуто лежит в $O_\tau(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный функционал $\mu \in O_\tau(X) \setminus P_\tau(X)$. Тогда существуют такие $\varphi_i \in C_b(X)$, $i = 1, 2$, что $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) \neq \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$. Положим $a = |\mu(\varphi_1 + \varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2)| > 0$. Покажем, что $\langle \mu; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2; a/3 \rangle \cap P_\tau(X) = \emptyset$. В самом деле, пусть существует $\nu \in \langle \mu; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2; a/3 \rangle \cap P_\tau(X)$. Тогда из принадлежности $\nu \in P_\tau(X)$ имеем

$$\nu(\varphi_1 + \varphi_2) = \nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2), \quad (A)$$

а из принадлежности $\nu \in \langle \mu; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2; a/3 \rangle$ вытекает, что $|\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < a/3$, $i = 1, 2$, откуда вытекают следующие неравенства:

$$-\frac{a}{3} < \nu(\varphi_1) - \mu(\varphi_1) < \frac{a}{3}, \quad (\text{B})$$

$$-\frac{a}{3} < \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_2) < \frac{a}{3}. \quad (\text{C})$$

Слагая (B) и (C), получим

$$-\frac{2a}{3} < \nu(\varphi_1) + \nu(\varphi_2) - \mu(\varphi_1) - \mu(\varphi_2) < \frac{2a}{3}. \quad (\text{D})$$

С другой стороны, имеем

$$-\frac{a}{3} < \mu(\varphi_1 + \varphi_2) - \nu(\varphi_1 + \varphi_2) < \frac{a}{3}. \quad (\text{E})$$

Возможны два случая.

1) $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) > \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$. Тогда $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) = a + \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$. Последнее равенство вместе (A) и (E) дает

$$-\frac{4a}{3} < \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) - \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) < -\frac{2a}{3},$$

что противоречит (D).

2) $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) < \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2)$. Тогда $\mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) - a$. Подставляя последнее равенство в (E) и имея в виду (A), получим

$$\frac{2a}{3} < \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) - \nu(\varphi_1) - \nu(\varphi_2) < \frac{4a}{3},$$

что опять-таки противоречит (D). Предложение 1.4 доказано.

Для тихоновского пространства X положим

$$O_\omega(X) = \{\mu \in O_\tau(X) : |\text{supp } \mu| < \infty\}.$$

ЛЕММА 1.5. Пусть Y — всюду плотное подмножество компакта X . Тогда $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [4], что $O_\omega(X)$ всюду плотно в $O(X)$. Поэтому достаточно показать, что $O_\omega(Y)$ всюду плотно $O_\omega(X)$. Пусть $\mu \in O_\omega(X)$ — произвольный функционал, а $\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle$ — произвольная окрестность функционала μ . Пусть $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_s\}$. Можно выбрать множество $\{y_1, \dots, y_s\} \subset Y$ и функционал ν так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $\text{supp } \nu = \{y_1, \dots, y_s\}$;
- 2) $|\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, s$.

Тогда $\nu \in \langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle \cap O_\omega(Y)$. Лемма 1.5 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. Множество $O_\omega(X)$ всюду плотно в $O_\tau(X)$ для любого тихоновского пространства X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$O_\omega(X) \subset O_\tau(X) \subset O(\beta X).$$

Согласно лемме 1.5 множество $O_\omega(X)$ всюду плотно в $O(\beta X)$ и, следовательно, в $O_\tau(X)$. Следствие 1.6 доказано.

Пусть X — тихоновское пространство. C_b -плотностью пространства X назовем наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A — всюду плотное C_b -вложенное подмножество X , и обозначается она через $C_b-d(X)$. Очевидно, что

$$d(X) \leq C_b-d(X).$$

Скажем, что функтор $F: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ слабо сохраняет плотность тихоновских пространств, если $d(F(X)) \leq C_b-d(X)$ для любого бесконечного тихоновского пространства X .

ЛЕММА 1.7. Пусть Y — всюду плотное C_b -вложенное подмножество тихоновского пространства X . Тогда $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.1 имеем $\beta Y \subset \beta X$. Отсюда в силу леммы 1.5 следует, что множество $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O(\beta X)$. Следовательно, $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O_\tau(X)$, поскольку имеют место следующие включения:

$$O_\omega(Y) \subset O_\tau(Y) \subset (\text{согласно теореме 1.3}) \subset O_\tau(X) \subset O(\beta X).$$

Лемма 1.7 доказана.

ТЕОРЕМА 1.8. Функтор O_τ слабо сохраняет плотность тихоновских пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y — такое всюду плотное C_b -вложенное подмножество пространства X , что $|Y| = C_b-d(X)$. Согласно лемме 1.7 достаточно показать, что $d(O_\omega(Y)) \leq |Y|$. Для произвольного натурального $n \in \omega$ положим

$$O_n(Y) = \{\mu \in O_\tau(Y) : |\text{supp } \mu| \leq n\}.$$

Имеем

$$O_\omega(Y) = \bigcup_{n \in \omega} O_n(Y), \quad O_n(Y) = \bigcup \{O(Z) : Z \subset Y, |Z| = n\}.$$

Отсюда вытекают следующие неравенства:

$$d(O_\omega(Y)) \leq d(O_n(Y)) \leq \max\{d(O(Z)), |Y|\} = |Y|.$$

Теорема 1.8 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — отображение, для которого образ $f(Y)$ всюду плотен и C_b -вложен в X . Тогда образ $O_\tau(f)(O_\tau(Y))$ всюду плотен в $O_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $O_\tau(f)(O_\tau(Y)) \subset O_\tau(X)$ в силу теоремы 1.2. С другой стороны,

$$O_\omega(f(Y)) = \{\mu \in O_\tau(X) : |\text{supp } \mu| < \infty \text{ и } \text{supp } \mu \subset f(Y)\} \subset O_\tau(f)(O_\tau(Y)).$$

По лемме 1.7 множество $O_\omega(f(Y))$ всюду плотно в $O_\tau(X)$. Следовательно, образ $O_\tau(f)(O_\tau(Y))$ всюду плотен в $O_\tau(X)$. Предложение 1.9 доказано.

Пусть A – направленное частично упорядоченное множество. Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ – обратный спектр, индексированный множеством A и состоящий из тихоновских пространств. Обозначим через $\lim X_\alpha$ предел этого спектра, а через $p_\beta: \lim X_\alpha \rightarrow X_\beta$, $\beta \in A$, – предельные проекции.

Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ порождает обратный спектр $\{O_\tau(X_\alpha), O_\tau(p_\alpha^\beta), A\}$, предел которого мы обозначим через $\lim O_\tau(X_\alpha)$, а предельные проекции обозначим через $pr_\beta: \lim O_\tau(X_\alpha) \rightarrow O_\tau(X_\beta)$. Отображения $O_\tau(p_\beta): O_\tau(\lim X_\alpha) \rightarrow O_\tau(X_\beta)$, $\beta \in A$, порождают отображение $R: O_\tau(\lim X_\alpha) \rightarrow \lim O_\tau(X_\alpha)$.

Известно [4], что если все X_α , $\alpha \in A$, компактны, то отображение R – гомеоморфизм.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть предельные проекции $p_\beta: \lim X_\alpha \rightarrow X_\beta$ являются C_b -вложениями. Тогда отображение $R: O_\tau(\lim X_\alpha) \rightarrow \lim O_\tau(X_\alpha)$ является вложением. Кроме того, если предельные проекции p_β плотны, то образ $R(O_\tau(\lim X_\alpha))$ всюду плотен в $\lim O_\tau(X_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стоун-чеховскую компактификацию $\{\beta X_\alpha, \beta p_\alpha^\beta\}$ спектра $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta\}$ и отметим, что $\lim X_\alpha$ вкладывается в $\lim \beta X_\alpha$. Причем, если предельные проекции $p_\beta: \lim X_\alpha \rightarrow X_\beta$ плотны, то образ пространства $\lim X_\alpha$ всюду плотен в $\lim \beta X_\alpha$. В силу непрерывности функтора $O: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ соответствующее отображение $\bar{R}: O(\lim \beta X_\alpha) \rightarrow \lim O(\beta X_\alpha)$ является гомеоморфизмом. Используя тот факт, что функтор O_τ переводит C_b -вложения во вложения, получаем, что отображение $R: O_\tau(\lim X_\alpha) \rightarrow \lim O_\tau(X_\alpha)$ вкладывается в гомеоморфизм $\bar{R}$ и, следовательно, является вложением. Более того, поскольку имеет место предложение 1.9, то если предельные проекции p_β плотны и являются C_b -вложениями, то образ пространства $O_\tau(\lim X_\alpha)$ при отображении R всюду плотен в $\lim O_\tau(X_\alpha)$. Теорема 1.10 доказана.

ТЕОРЕМА 1.11. Функтор $O_\tau: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ сохраняет непустые пересечения замкнутых подмножеств нормального пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_θ , $\theta \in T$, – замкнутые подмножества нормального пространства X . Покажем, что

$$O_\tau\left(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta\right) = \bigcap_{\theta \in T} O_\tau(F_\theta).$$

Включение $O_\tau(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta) \subset \bigcap_{\theta \in T} O_\tau(F_\theta)$ очевидно в силу предложения 1.3 (поскольку имеет место теорема Брауэра–Титце–Урысона, то всякое замкнутое подмножество нормального пространства C_b -вложено в это пространство). Пусть $\bigcap_{\theta \in T} F_\theta \neq \emptyset$ и $\mu \in \bigcap_{\theta \in T} O_\tau(F_\theta)$. Пусть $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta)$ – монотонно убывающая направленность функций, поточечно сходящаяся к нулю. Положим

$$\varphi_\alpha^\theta = \inf \left\{ \varphi \in C_b(F_\theta) : \varphi \Big|_{\bigcap_{\theta \in T} F_\theta} = \varphi_\alpha \text{ и } \varphi \geq 0 \right\}, \quad \theta \in T.$$

Тогда для любого фиксированного $\theta_0 \in T$ направленность $\{\varphi_\alpha^{\theta_0}\} \subset C_b(F_{\theta_0})$ монотонно убывает и поточечно сходится к нулю. Отсюда имеем $\mu(\varphi_\alpha^{\theta_0}) \rightarrow 0$.

Заметим, что семейство функций $\{\varphi_{\alpha_0}^\theta \mid \bigcap_{\theta \in T} F_\theta\}$ состоит из единственной функции φ_{α_0} для произвольного α_0 . Поэтому $\mu(\varphi_\alpha) = \mu(\varphi_\alpha^\theta \mid \bigcap_{\theta \in T} F_\theta) \leq \mu(\varphi_\alpha^\theta) \rightarrow 0$, т.е. $\mu \in O_\tau(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta)$. Теорема 1.11 доказана.

2. Категорные свойства функтора O_R . В этом разделе исследуем топлогические и категорные свойства пространства и функтора слабо аддитивных радоновых функционалов.

ТЕОРЕМА 2.1. *Функтор O_R переводит C_b -вложения во вложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: Y \rightarrow X$ – топологическое C_b -вложение тихоновских пространств и $\beta f: \beta Y \rightarrow \beta X$ – стоун-чеховская компактификация отображения f . Имеем (см. доказательство теоремы 0.3) $O(\beta f)(O_R(Y)) \subset O_R(X)$.

Пусть теперь $\mu_1, \mu_2 \in O_R(Y)$ – различные функционалы. Тогда существует такая $\psi \in C_b(Y)$, что $\mu_1(\psi) \neq \mu_2(\psi)$. Поскольку Y C_b -вложено в X , существует функция $\varphi \in C_b(X)$ такая, что $\varphi|_Y = \psi$; иными словами, $\varphi \circ f = \psi$. Следовательно, имеем $O_R(f)(\mu_i)(\varphi) = \mu_i(\varphi \circ f) = \mu_i(\psi)$, $i = 1, 2$. Таким образом, отображение $O_R(f): O_R(Y) \rightarrow O_R(X)$ инъективно. Теорема 2.1 доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Если $f: Y \rightarrow X$ – замкнутое C_b -вложение, то множество $O_R(Y)$ замкнуто в $O_R(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $O(\beta Y) \subset O(\beta X)$ в силу предложения 1.1 и мономорфности функтора $O: \text{Comr} \rightarrow \text{Comr}$.

Пусть $\mu \in O_R(X) \setminus O_R(Y)$ – произвольный функционал. Покажем, что $\mu \notin O(\beta Y)$. На самом деле, если $\mu \in O(\beta Y)$, то $\text{supp } \mu \subset \beta Y$ и $\mu(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$ для любой направленности $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$, равномерно на компактах стремящейся к нулю и состоящей из функций, ограниченных в совокупности. Пусть $\{\psi_\alpha\} \subset C_b(Y)$ – направленность, обладающая вышеуказанными свойствами, для которой $\mu(\psi_\alpha) \not\rightarrow 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi \geq 0$ для всех α . Определим функции $\bar{\psi}_\alpha \in C_b(X)$ следующим образом:

- 1) $\bar{\psi}_\alpha = \inf\{g \in C_b(X) : g \geq 0\}$;
- 2) $\bar{\psi}_\alpha|_Y = \psi_\alpha$.

Тогда направленность $\{\bar{\psi}_\alpha\} \subset C_b(X)$ равномерно на компактах стремится к нулю и состоит из функций, ограниченных в совокупности. Следовательно, $\mu(\bar{\psi}_\alpha) \rightarrow 0$. С другой стороны, имеем $\mu(\bar{\psi}_\alpha) \geq \mu(\bar{\psi}_\alpha|_Y) = \mu(\psi_\alpha)$. Получили противоречие. Значит, $\mu \notin O(\beta Y)$. Предложение 2.2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть X – тихоновское пространство. Тогда $P_R(X)$ замкнуто в $O_R(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству предложения 1.4.

ЛЕММА 2.4. *Пусть Y – всюду плотное C_b -вложенное подмножество тихоновского пространства X . Тогда $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O_R(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $O_\omega(Y) \subset O_R(Y) \subset$ (согласно теореме 2.2) $\subset O_R(X) \subset O_\tau(X)$. Множество $O_\omega(Y)$ всюду плотно в $O_\tau(X)$ в силу леммы 1.7 и, следовательно, в $O_R(X)$. Лемма 2.4 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Множество $O_\omega(X)$ всюду плотно в $O_R(X)$ для любого тихоновского пространства X .

ТЕОРЕМА 2.6. Функтор O_R слабо сохраняет плотность тихоновских пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 1.8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — отображение, для которого образ $f(Y)$ всюду плотен и C_b -вложен в X . Тогда образ $O_R(f)(O_R(Y))$ всюду плотен в $O_R(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $O_R(f)(O_R(Y)) \subset O_R(X)$ в силу теоремы 2.1. С другой стороны,

$$O_\omega(f(Y)) = \{\mu \in O_\tau(X) : |\text{supp } \mu| < \infty \text{ и } \text{supp } \mu \subset f(Y)\} \subset O_R(f)(O_R(Y)).$$

Согласно лемме 2.4 $O_\omega(f(Y))$ всюду плотно в $O_R(X)$. Следовательно, образ $O_R(f)(O_R(Y))$ всюду плотен в $O_R(X)$. Предложение 2.7 доказано.

Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ порождает обратный спектр $\{O_R(X_\alpha), O_R(p_\alpha^\beta), A\}$, предел которого мы обозначим через $\lim O_R(X_\alpha)$, а предельные проекции обозначим через $\text{pr}_\beta: \lim O_R(X_\alpha) \rightarrow O_R(X_\beta)$. Отображения $O_R(p_\beta): O_R(\lim X_\alpha) \rightarrow O_R(X_\beta)$, $\beta \in A$, порождают отображение $R: O_R(\lim X_\alpha) \rightarrow \lim O_R(X_\alpha)$.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть предельные проекции $p_\beta: \lim X_\alpha \rightarrow X_\beta$ являются C_b -вложениями. Тогда отображение $R: O_R(\lim X_\alpha) \rightarrow \lim O_R(X_\alpha)$ является вложением. Пусть, кроме того, предельные проекции $p_\beta: \lim X_\alpha \rightarrow X_\beta$ плотны. Тогда образ $R(O_R(\lim X_\alpha))$ всюду плотен в $\lim O_R(X_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 1.10.

ТЕОРЕМА 2.9. Функтор $O_R: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ сохраняет пересечения замкнутых подмножеств нормального пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_θ , $\theta \in T$, — замкнутые подмножества нормального пространства X . Покажем, что

$$O_R\left(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta\right) = \bigcap_{\theta \in T} O_R(F_\theta).$$

Включение $O_R(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta) \subset \bigcap_{\theta \in T} O_R(F_\theta)$ вытекает из теоремы 2.1 и C_b -вложенности всякого замкнутого подмножества нормального пространства.

Пусть $\bigcap_{\theta \in T} F_\theta \neq \emptyset$ и $\mu \in \bigcap_{\theta \in T} O_R(F_\theta)$. Пусть $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(\bigcap_{\theta \in T} F_\theta)$ — равномерно на компактах стремящаяся к нулю направленность, состоящая из функций, ограниченных в совокупности. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\varphi \geq 0$ для всех α . Положим

$$\varphi_\alpha^\theta = \inf \left\{ \varphi \in C_b(F_\theta) : \varphi \Big|_{\bigcap_{\theta \in T} F_\theta} = \varphi_\alpha \text{ и } \varphi \geq 0 \right\}, \quad \theta \in T.$$

Тогда для любого компакта $K \subset F_{\theta_0}$, $K \cap \bigcap_{\theta \in T} F_{\theta} = \emptyset$, имеем $\varphi_{\alpha}^{\theta_0}(K) = 0$. Отсюда вытекает, что направленность $\{\varphi_{\alpha}^{\theta_0}\} \subset C_b(F_{\theta_0})$ равномерно на компактах стремится к нулю. Кроме того, ясно, что она состоит из функций, ограниченных в совокупности. Следовательно, $\mu(\varphi_{\alpha}^{\theta_0}) \rightarrow 0$.

Заметим, что семейство функций $\{\varphi_{\alpha_0}^{\theta} \mid \bigcap_{\theta \in T} F_{\theta}\}$ состоит из единственной функции φ_{α_0} для произвольного фиксированного α_0 . Поэтому $\mu(\varphi_{\alpha}) = \mu(\varphi_{\alpha}^{\theta} \mid \bigcap_{\theta \in T} F_{\theta}) \leq \mu(\varphi_{\alpha}^{\theta_0}) \rightarrow 0$, т.е. $\mu \in O_R(\bigcap_{\theta \in T} F_{\theta})$.

Если $\bigcap_{\theta \in T} F_{\theta} = \emptyset$, то $\bigcap_{\theta \in T} O_R(F_{\theta}) = \emptyset$, поскольку значения любого функционала $\mu \in O_R(F_{\theta})$ на функции $\varphi \in C_b(F_{\theta})$ аппроксимируется некоторым компактом $K_{\theta}^{\varphi} \subset F_{\theta}$. Теорема 2.9 доказана.

3. О монаде слабо аддитивных функционалов. Для тихоновских пространств X и Y положим $j_{XY}: O_{\tau}(X) \times Y \rightarrow O_{\tau}(X \times Y)$ — отображение, определяемое формулой

$$j_{XY}(\mu, y) = O_{\tau}(i_y)(\mu),$$

где $\mu \in O_{\tau}(X)$, $y \in Y$, $i_y: X \rightarrow X \times Y$ — вложение X в произведение $X \times Y$ в качестве слоя:

$$i_y(x) = (x, y), \quad x \in X.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Отображение j_{XY} является замкнутым вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X, Y — тихоновские пространства и $\beta X, \beta Y$ — их стоун-чеховские компактификации. Согласно [11, предложение 1.12] и [4, теорема 2] отображение

$$j_{\beta X \beta Y}: O(\beta X) \times \beta Y \rightarrow O(\beta X \times \beta Y)$$

является вложением компактов. Ясно, что

$$j_{XY}(O_{\tau}(X) \times Y) = j_{\beta X \beta Y}(O_{\tau}(X) \times Y) = j_{\beta X \times \beta Y}(O(\beta X) \times \beta Y) \cap O_{\tau}(X \times Y).$$

Предложение 3.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Функтор O_{τ} сохраняет гомотопии, т.е. для любой гомотопии $H_t: X \rightarrow Y$ гомотопия $O_{\tau}(H_t): O_{\tau}(X) \rightarrow O_{\tau}(Y)$ непрерывна как отображение $O_{\tau}(H_{(\cdot)}): O_{\tau}(X) \times I \rightarrow O_{\tau}(X \times I)$, где $I = [0, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H: X \times I \rightarrow Y$ — гомотопия. Тогда отображение $O_{\tau}(H_{(\cdot)}): O_{\tau}(X) \times I \rightarrow O_{\tau}(Y)$ непрерывно как композиция

$$O_{\tau}(H_{(\cdot)}) = O_{\tau}(H) \circ j_{XI}$$

непрерывных отображений $j_{XI}: O_{\tau}(X) \times I \rightarrow O_{\tau}(X \times I)$ и $O_{\tau}(H): O_{\tau}(X \times I) \rightarrow O_{\tau}(Y)$. Следствие 3.2 доказано.

Пусть $\mathcal{F}_i: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $i = 1, 2$, — два ковариантных функтора из категории $\mathcal{C} = \{O, M\}$ в категорию $\mathcal{C}' = \{O', M'\}$. Семейство морфизмов $\Phi = \{\varphi_X: \mathcal{F}_1(X) \rightarrow \mathcal{F}_2(X) \mid X \in$

$\mathcal{O}\} \subset \mathcal{M}'$ называется *естественным преобразованием* функтора $\mathcal{F}_1$ в функтор $\mathcal{F}_2$, если для всякого морфизма $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathcal{C}$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & \mathcal{F}_2(X) \\ \downarrow \mathcal{F}_1(f) & & \downarrow \mathcal{F}_2(f) \\ \mathcal{F}_1(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & \mathcal{F}_2(Y). \end{array}$$

Для каждого тихоновского пространства X положим $\delta_X: X \rightarrow O_\tau(X)$ – отображение, ставящее в соответствии каждой точке $x \in X$ функционал Дирака $\delta(x)$, сосредоточенный в точке x .

ТЕОРЕМА 3.3. Семейство $\delta = \{\delta_X: X \in \text{Tych}\}$ определяет естественное преобразование тождественного функтора $\text{Id}: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$ в функтор $O_\tau: \text{Tych} \rightarrow \text{Tych}$, причем каждая компонента $\delta_X: X \rightarrow O_\tau(X)$ является замкнутым вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $\delta = \{\delta_X\}$ – естественное преобразование функтора Id в функтор O_τ . То, что каждое отображение $\delta_X: X \rightarrow O_\tau(X)$ является замкнутым вложением, следует из [11, теорема 1.14] и [2]. Теорема 3.3 доказана.

Понятие монады введено С. Эйленбергом и Дж. Муром в связи с теорией сопряженных функторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4 [12]. Монадой (или тройкой) на категории $\mathcal{C}$ называется тройка $\mathbf{T} = (T, \delta, \psi)$, состоящая из ковариантного функтора T и естественных преобразований $\delta: \text{Id} \rightarrow T$ (единица) и $\psi: T^2 \rightarrow T$ (умножение), для которых выполняются условия

$$\psi_X \circ T(\delta_X) = \psi_X \circ \delta_{T(X)} = \text{id}_{T(X)}.$$

Функтор T , который может быть включен в тройку $\mathbf{T}$, называется *монадичным* в категории $\mathcal{C}$.

Т. Радул в [4] показал, что функтор O образует монаду в категории Compr . На самом деле он включается в тройку $\mathbf{O} = (O, \delta, \psi)$, где δ – преобразование Дирака, а компонента $\psi_X: O^2(X) \rightarrow O(X)$ умножения ψ для каждого $X \in \text{Compr}$ определяется формулой

$$\psi_X(\alpha)(\varphi) = \alpha(\bar{\varphi}) \quad \text{для } \varphi \in C(X, I), \quad \alpha \in O^2(X),$$

где $\bar{\varphi}: O(X) \rightarrow I$ – непрерывная функция, действующая посредством формулы $\bar{\varphi}(\mu) = \mu(\varphi)$, $\mu \in O(X)$.

ТЕОРЕМА 3.5. Функтор O_τ является монадичным в категории Tych .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любого тихоновского пространства X имеют места включения и $\psi_{\beta X}(O_\tau^2(X) \subset O_\tau(X)$, где $\delta_{\beta X}$ и $\psi_{\beta X}$ – компоненты естественных преобразований, входящих в тройку $\mathbf{O} = (O, \delta, \psi)$. Включение $\delta_{\beta X}(X) \subset O_\tau(X)$ следует из теоремы 3.3. Для доказательства включения $\psi_{\beta X}(O_\tau^2(X) \subset O_\tau(X)$ предположим, что $\alpha \in O_\tau^2(X) \subset O^2(\beta X)$.

Пусть $\{\varphi_\theta\} \subset C(\beta X)$ – монотонно убывающая направленность непрерывных функций на βX , поточечно стремящаяся к нулю на множестве $X \subset \beta X$. Согласно [4]

$\psi_{\beta X}(\alpha) \in O_\tau(X)$, если мы покажем, что числовая направленность $\{\psi_{\beta X}(\alpha)(\varphi_\theta)\} \rightarrow 0$. Легко видеть, что $\{\bar{\varphi}_\theta | \bar{\varphi}_\theta: O(\beta X) \rightarrow I\}$ — монотонно убывающая направленность непрерывных функций на $O(\beta X)$, поточечно стремящаяся к нулю на множестве $O_\tau(X) \subset O(\beta X)$. Поскольку α — τ -гладкий функционал на $O_\tau(X)$, согласно определению τ -гладкости $\{\alpha(\bar{\varphi}_\theta)\} \rightarrow 0$. Но $\psi_{\beta X}(\alpha)(\varphi_\theta) = \alpha(\varphi_\theta)$ для каждого θ . Следовательно, $\{\psi_{\beta X}(\alpha)(\varphi_\theta)\} \rightarrow 0$, т.е. $\psi_{\beta X}(O_\tau^2(X)) \subset O_\tau(X)$. Положим $\delta_X = \delta_{\beta X}|X: X \rightarrow O_\tau(X)$ и $\psi_X = \psi_{\beta X}|O_\tau^2(X): O_\tau^2(X) \rightarrow O_\tau(X)$. Очевидно, что $\mathbf{O}_\tau = (O_\tau, \delta, \psi)$ — тройка на категории $\mathbf{Tych}$. Теорема 3.5 доказана.

4. Некоторые замечания. Здесь мы приводим некоторые замечания, примеры, показывающие невыполнение некоторых условий нормальности функторами O_τ , O_R , а также излагаем вопросы, которые положительно решены для случая ковариантных функторов.

Функторы O_τ и O_R не сохраняют прообразы.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$ — конечные компакты (все точки x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 различны). Отметим, что поскольку X — компакт, то согласно (2) имеем $O_\tau(X) = O_R(X) = O(X)$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ построим как следующее: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = f(x_3) = y_2$. Рассмотрим функционал δ_{y_2} , сосредоточенный на $\{y_2\} \subset Y$. Функционал $\mu \in O(X)$ определим по формуле

$$\mu(\varphi) = \max\{\min\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}, \min\{\varphi(x_1), \varphi(x_3)\}, \min\{\varphi(x_2), \varphi(x_3)\}\}.$$

Возьмем произвольную $\psi \in C(Y)$. Имеем

$$\begin{aligned} O(f)(\mu)(\psi) &= \mu(\psi \circ f) \\ &= \max\{\min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_2))\}, \min\{\psi(f(x_1)), \psi(f(x_3))\}, \\ &\quad \min\{\psi(f(x_2)), \psi(f(x_3))\}\} \\ &= \max\{\min\{\psi(y_1), \psi(y_2)\}, \psi(y_2)\} = \psi(y_2) = \delta_{y_2}, \end{aligned}$$

т.е. $O(f)(\mu) = \delta_{y_2}$. Но $\mu \notin O(\{x_2, x_3\})$, хотя $f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_3\}$.

Мы не знаем ответ на следующий вопрос.

ВОПРОС 4.2. Сохраняют ли функторы O_τ и O_R вес бесконечных тихоновских пространств?

Если $f: Y \rightarrow X$ — C_b -вложение, то отображения $O_\tau(f): O_\tau(Y) \rightarrow O_\tau(X)$ и $O_R(f): O_R(Y) \rightarrow O_R(X)$ являются вложениями в силу теорем 1.2 и 2.1. Однако автору неизвестны ответы на следующие два вопроса, возникающие в связи с этими теоремами.

ВОПРОС 4.3. Пусть $O_\tau(f)$ — вложение. Обязано ли отображение f быть C_b -вложением?

ВОПРОС 4.4. Пусть $O_R(f)$ — вложение. Обязано ли отображение f быть C_b -вложением?

Поскольку имеют место $O_\omega(X) \subset O_R(X) \subset O_\tau(X)$, из следствий 1.6 и 2.7 вытекает, что $d(O_\tau(X)) \leq d(O_R(X))$. В связи с этим возникает следующий вопрос

ВОПРОС 4.5. Вытекает ли сепарабельность пространства $O_R(X)$ из сепарабельности $O_\tau(X)$?

Из определения C_b -плотности топологических пространств вытекает следующий вопрос.

ВОПРОС 4.6. Пусть X — тихоновское пространство. При каких условиях выполняется равенство

$$C_b\text{-}d(X) = d(X)?$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Говорить о свойстве пересечений для функторов O_τ и O_R в категории Тусх сложно по двум причинам. Пусть $A \subset X$ — замкнутое множество. Чтобы отображения $O_\tau(i_A)$ и $O_R(i_A)$, где $i_A: A \rightarrow X$ — тождественное вложение, были вложениями, в той или иной степени необходимо C_b -вложенность множества A в X . С другой стороны, даже пересечение двух C_b -вложенных множеств не обязано быть C_b -вложенным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Банах Т. О. Топология пространств вероятностных мер. I: функторы P_τ и $\hat{P}$ // Математичні студії. 1995. Т. 5. С. 65–87.
- [2] Зайтов А. А. τ -гладкие слабо аддитивные функционалы и вероятностные меры // Тезисы докл. конф. молодых ученых, посвященной 60-летию АН РУз, 2003. С. 41–42.
- [3] Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. №3(219). С. 3–62.
- [4] Radul T. N. On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol. 1998. V. 39. №3. P. 609–615.
- [5] Чигогидзе А. Ч. О продолжении нормальных функторов // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1984. №6. С. 23–26.
- [6] Федорчук В. В. Вероятностные меры в топологии // УМН. 1991. Т. 46. №1. С. 41–80.
- [7] Beshimov R. B. On weakly additive functionals // Matematychni Studii. V. 18. №2. P. 179–186.
- [8] Zaitov A. A. On categorical properties of the functor of order-preserving functionals // Methods of Functional Analysis and Topology. 2003. V. 9. №4. P. 357–364.
- [9] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [10] Федорчук В. В., Садовничий Ю. В. О некоторых топологических и категориальных свойствах знакопеременных мер // Фундамент. и прикладная матем. 1999. Т. 5. №2. С. 597–618.
- [11] Федорчук В. В. Многозначные ретракции и характеристика n -мягких отображений // Тр. ММО. 1988. Т. 51. С. 169–207.
- [12] Eilenberg S., Moore J. Adjoint functors and triples. // Ill. J. Math. 1965. V. 9. №3. P. 381–398.