Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера: конструирование дельтоидов, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 694–699

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:11:25

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОКСТЕРА: КОНСТРУИРОВАНИЕ ДЕЛЬТОИДОВ

В. А. Колмыков

Рассматриваются преобразования Кокстера, ассоциированные с дельтоидами (т.е. с графами, все простые циклы которых имеют длину три). Описывается строение множества всех связных дельтоидов, в спектре которых нет минус единицы.

Библиография: 11 названий.

Введение. Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями относительно некоторого набора гиперплоскостей. Такой линейный оператор естественно появляется в ряде вопросов алгебры и анализа.

Во многих ситуациях (см., например, [1], [2]) преобразование Кокстера возникает следующим образом. Пусть G – граф (точное определение см. в п. 1). Всякая комплексная функция, определенная на множестве его вершин, называется *взвешиванием*. Взвешивания естественно образуют $|G|$ -мерное пространство. С каждой вершиной u свяжем преобразование σ_u этого пространства: σ_u не меняет весов вершин, отличных от u , а вес вершины u заменяет на противоположный плюс сумма весов всех вершин, смежных с u . Операторы σ_u являются отражениями (в смысле [1, гл. V, § 2]). *Преобразованием Кокстера* называется суперпозиция всех отражений σ_u , взятых по одному (порядок произвольный). Итак, с каждым графом связано, вообще говоря, несколько преобразований Кокстера.

Значительный интерес представляют (см., например, [1]–[5]) спектральные свойства преобразования Кокстера, в частности, информация о характеристическом многочлене. А так как преобразований Кокстера, ассоциированных с графом, в общем случае несколько, мы имеем дело с целым набором характеристических многочленов. Изучению этого набора многочленов препятствуют естественные комбинаторные сложности. Однако существуют ситуации, для которых такие комбинаторные сложности отсутствуют. Эти ситуации связаны с наложением некоторых условий ацикличности.

Если в графе нет циклов (такой граф называется *лесом*), то все преобразования Кокстера, ассоциированные с этим графом, имеют одинаковый характеристический многочлен (это следует из результатов [1, гл. V, § 6, упр. 3]). В [2] доказано большее: все преобразования Кокстера, ассоциированные с лесом, сопряжены в группе W , порожденной всевозможными отражениями вида σ_u . *Дельтоидом* называется граф, в котором нет простых циклов длины > 3 (например, всякий лес является дельтоидом). В [6] показано, что все преобразования Кокстера, ассоциированные с дельтоидом, имеют одинаковый характеристический многочлен (множество всех корней этого многочлена на-

зывается *спектром дельтоида*). В последние годы прогресс в исследованиях преобразований Кокстера существенно обусловлен наложением различных условий ациклическости.

В [7] рассматривались множества $\mathcal{T}_+$ и $\mathcal{T}_-$ всех деревьев, содержащих и, соответственно, не содержащих в своем спектре минус единицу (там же подробно обсуждены и причины, по которым такое рассмотрение представляет интерес). Для этих множеств были найдены системы образующих элементов и операций. Таким образом, строение множеств $\mathcal{T}_+$ и $\mathcal{T}_-$ напоминает строение свободных модулей. В [8] была введена специальная характеристика – свободная склеечная размерность, и доказана трехмерность множества $\mathcal{T}_-$. Это говорит о том, что аналогия с модулями не является случайной.

Граф называется *оснащенным*, если его ребрам приписаны пары некоторых чисел. В [9] были подробно исследованы множества $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ всех оснащенных деревьев, содержащих и, соответственно, не содержащих в своем спектре минус единицу. Рассмотренные множества оказались еще более похожими на модули.

После этого вопрос об описании подобных объектов приобрел новое звучание. Рассмотрим множества графов, оснащенных графов, колчанов, квазиколчанов или т.п. (точный смысл этих слов сейчас не важен), организованных аналогично вышесказанному: на них наложены условия, связанные с циклическим строением, и проведено разделение на предмет содержания минус единицы в спектре преобразования Кокстера. Существуют ли для этих множеств системы образующих элементов и операций?

В [10] этот вопрос был положительно решен для множества Δ_- всех связных дельтоидов, в спектре которых есть минус единица. Правда одна из предложенных операций не обладает свойством свободы в смысле [8]. Это напоминает гомологическую алгебру, где уменьшение свободы модуля связано с усложнением циклической структуры в соответствующих резольвентах.

В настоящей статье мы рассматриваем множество Δ_+ всех связных дельтоидов, в спектре которых нет минус единицы. Для этого множества мы находим систему образующих элементов и операций. Как и в предыдущих работах, для описания результата мы используем понятие конструктора, так как оно наиболее близко к понятию свободного модуля, применительно к данной комбинаторно-алгебраической ситуации.

1. Дельтоиды. Под словом “граф” в этой статье понимается пара (V_0, V_1) , где V_0 – некоторое непустое конечное множество, а V_1 – некоторое множество, состоящее из двухэлементных подмножеств множества V_0 . Элемент $\{u, v\} \in V_1$ называется *ребром* и обозначается $\overline{uv}$; говорят, что вершина u смежна с вершиной v , а ребро $\overline{uv}$ инцидентно вершине u и вершине v .

ПРИМЕР. В исследованиях преобразований Кокстера и групп, порожденных отражениями, приняты следующие обозначения. Граф A_n – это n -вершинная цепь, т.е. $A_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}\})$, если $n \geq 2$; $A_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$. Пусть $n \geq 2$. Граф $\tilde{A}_n$ – это $(n+1)$ -вершинный цикл, т.е. $\tilde{A}_n = (\{v_1, \dots, v_{n+1}\}, \{\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, v_{n+1}\}, \{v_{n+1}, v_1\}\})$.

Если $G = (V_0, V_1)$, то вместо V_0 и V_1 иногда удобнее писать $V_0(G)$ и $V_1(G)$.

ПРИМЕР. Если G и H – графы, то их дизъюнктивное объединение $G \amalg H$ определяется так: $V_0(G \amalg H) = V_0(G) \amalg V_0(H)$, $V_1(G \amalg H) = V_1(G) \amalg V_1(H)$.

Для того, чтобы понятие дельтоида, приведенное во введении, стало строгим, сформулируем понятие простого цикла.

Простым циклом (длины $k \geq 3$) в графе называется последовательность $\{v_i\}_{i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ попарно различных вершин таких, что v_i смежна с v_{i+1} для любого i .

Через Δ (соответственно через Δ_+) обозначим множество всех связных дельтоидов (соответственно множество всех связных дельтоидов, в спектре которых нет минуса единицы).

2. Конструкторы. Пусть M – некоторое множество, R – набор операций (возможно, частичных и многозначных), позволяющих из элементов множества M строить какие-то элементы из этого же множества. Если $P \subseteq M$, то через $R(P)$ обозначим множество всех элементов множества M , получающихся из элементов множества P применением к ним (с учетом аргументности) операций из множества R . Обозначим $P \cup R(P) \cup R(R(P)) \cup \dots = \langle P \mid R \rangle$. Если $L \subseteq M$ и $L = \langle P \mid R \rangle$, то пару (P, R) назовем *конструктором* для множества L . Если $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ и $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, то вместо $\langle P \mid R \rangle$ иногда удобно писать $\langle p_1, \dots, p_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$.

В [7] приведены примеры, показывающие, что понятие конструктора формализует понятие “основная теорема”.

3. Конструктор для Δ_+ . Во множестве Δ введем унарную многозначную операцию Φ_{A_2} следующим образом. Если $G \in \Delta$, то $\Phi_{A_2}(G)$ – это подмножество в Δ , определенное так: дельтоид H принадлежит множеству $\Phi_{A_2}(G)$ тогда и только тогда, когда H можно получить из дельтоида $A_2 \amalg G$ добавлением одного или двух ребер, соединяющих A_2 и G (говорят, что ребро соединяет A_2 и G , если один из его концов является вершиной в A_2 , а другой – в G).

ТЕОРЕМА. *Справедливо равенство $\Delta_+ = \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в пункте 4.

Пусть $\mathcal{T}$ – множество всех деревьев и $\mathcal{T}_+ = \mathcal{T} \cap \Delta_+$. Во множестве $\mathcal{T}$ определим унарную многозначную операцию Ψ_{A_2} следующим образом: $\Psi_{A_2}(T) = \Phi_{A_2}(T) \cap \mathcal{T}$. Иными словами, дерево H принадлежит множеству $\Psi_{A_2}(T)$ тогда и только тогда, когда H можно получить из графа $A_2 \amalg T$ добавлением одного ребра, соединяющего A_2 и T .

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо равенство $\mathcal{T}_+ = \langle A_2 \mid \Psi_{A_2} \rangle$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В [7] доказано, что $\mathcal{T}_+ = \langle A_2 \mid \ominus \rangle$, где $\ominus$ – бинарная многозначная операция, состоящая в произвольном соединении двух деревьев ребром. Мы думаем, что конструктор $\langle A_2 \mid \Psi_{A_2} \rangle$ является “более естественным”, так как утверждение $\Delta_+ = \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$ можно рассматривать как обобщение утверждения $\mathcal{T}_+ = \langle A_2 \mid \Psi_{A_2} \rangle$.

4. Доказательство теоремы. Характеристический многочлен (любого) преобразования Кокстера, ассоциированного с дельтоидом G , обозначим $\Omega_G(\lambda)$. Положим $\Theta_G = \Omega_G(-1)$.

ПРИМЕР 1. Нетрудно вычислить, что $\Omega_{A_1}(\lambda) = \lambda + 1$, $\Omega_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\Omega_{A_3}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$, $\Omega_{\tilde{A}_2}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$. Поэтому $\Theta_{A_1} = \Theta_{A_3} = \Theta_{\tilde{A}_2} = 0$, $\Theta_{A_2} = 1$. Отсюда $A_1, A_3, \tilde{A}_2 \notin \Delta_+$, $A_2 \in \Delta_+$.

ПРИМЕР 2. Если F и G – дельтоиды, то очевидно, что $\Omega_{F \amalg G}(\lambda) = \Omega_F(\lambda)\Omega_G(\lambda)$ и $\Theta_{F \amalg G} = \Theta_F\Theta_G$.

Через $\mathcal{P}_2(U)$ обозначим множество всех двухэлементных подмножеств множества U . Таким образом, граф – это пара (V_0, V_1) , где V_0 – конечное множество и $V_1 \subseteq \mathcal{P}_2(V_0)$.

Пусть U_0 – некоторое множество вершин графа $G = (V_0, V_1)$. Через $G - U_0$ обозначим граф, получающийся из G удалением всех вершин множества U_0 : вершины графа $G - U_0$ составляют множество $V_0 \setminus U_0$, а ребра – множество $V_1 \cap \mathcal{P}_2(V_0 \setminus U_0)$. Пусть U_1 – некоторое множество ребер графа $G = (V_0, V_1)$. Через $G - U_1$ обозначим граф, получающийся из G удалением всех ребер множества U_1 : вершины графа $G - U_1$ составляют множество V_0 , а ребра – множество $V_1 \setminus U_1$.

Пусть v – некоторая вершина графа G , а $P \amalg Q$ – разбиение множества всех ребер, инцидентных этой вершине. Разбиение $P \amalg Q$ назовем *нормальным разбиением около v* , если из условия “ $\overline{v_1 v} \in P$ и $\overline{v v_2} \in Q$ ” следует, что v_1 и v_2 лежат в разных компонентах связности графа $G - \{v\}$. Разбиение $P \amalg Q$ назовем *нетривиальным*, если оба множества P и Q непусты. Вершина v называется *разделяющей*, если число компонент связности графа $G - \{u\}$ больше, чем число компонент связности графа G . Вершина v является разделяющей тогда и только тогда, когда существует нетривиальное нормальное разбиение около v .

ЛЕММА 1. Если $P \amalg Q$ – нетривиальное нормальное разбиение около некоторой вершины дельтоида G , то $\Theta_G = \Theta_{G-P} + \Theta_{G-Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала G – произвольный n -вершинный граф. Биекция $\mu: \{1, \dots, n\} \mapsto V_0(G)$ называется *нумерацией* вершин этого графа. С нумерацией μ можно связать преобразование Кокстера $c_{G,\mu} = \sigma_{\mu(1)} \dots \sigma_{\mu(n)}$ (эта запись означает, что на вектор действует сначала $\sigma_{\mu(1)}$, затем $\sigma_{\mu(2)}$ и т.д.). Характеристический многочлен преобразования $c_{G,\mu}$ обозначим $\Omega_{G,\mu}(\lambda)$. Пусть $P \amalg Q$ – нетривиальное нормальное разбиение около некоторой вершины графа G . В [11] было доказано, что

$$\Omega_{G,\mu}(\lambda) = \Omega_{G-P,\mu}(\lambda) + \Omega_{G-Q,\mu}(\lambda) - \Omega_{G-(P \amalg Q),\mu}(\lambda)$$

(короткое доказательство более общего утверждения, касающегося оснащенных графов, см. в [6]).

Пусть теперь G – дельтоид. В приведенной формуле подставим $\lambda = -1$ и уберем μ . Получаем $\Theta_G = \Theta_{G-P} + \Theta_{G-Q} - \Theta_{G-(P \amalg Q)}$. Но из примеров 1 и 2 следует, что $\Theta_{G-(P \amalg Q)} = \Theta_X \amalg A_1 \amalg Y = \Theta_X \Theta_{A_1} \Theta_Y = 0$.

ЛЕММА 2. Если $H \in \Phi_{A_2}(G)$, то $\Theta_H = \Theta_G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \in \Phi_{A_2}(G)$. Это значит, что H можно получить из дельтоида $A_2 \amalg G$ добавлением одного или двух ребер, соединяющих A_2 и G . Вершины графа A_2 обозначим u и v .

Пусть добавлено одно ребро $\overline{uu_1}$, либо два ребра $\overline{uu_1}$ и $\overline{uu_2}$. Рассмотрим нетривиальное нормальное разбиение $\{\overline{uv}\} \amalg \{\overline{uu_1}\}$ (либо $\{\overline{uv}\} \amalg \{\overline{uu_1}, \overline{uu_2}\}$) около u . Тогда $\Theta_H = \Theta_{A_1} \Theta_X + \Theta_{A_2} \Theta_G = \Theta_G$.

Пусть добавлено два ребра $\overline{uu_1}$ и $\overline{vv_1}$. Тогда $u_1 = v_1$ (в противном случае в H был бы простой цикл длины ≥ 4). Рассмотрим нормальное разбиение $\{\overline{uu_1}, \overline{vv_1}\} \amalg Q$ около u_1 . Если Q пусто, то $G = A_1$, $H = A_2$, поэтому $\Theta_H = \Theta_G$. Если Q непусто, то $\Theta_H = \Theta_{A_2} \Theta_G + \Theta_{\tilde{A}_2} \Theta_X = \Theta_G$.

ЛЕММА 3. Множество Δ_+ замкнуто относительно операции Φ_{A_2} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что $G \in \Delta_+ \Leftrightarrow \Phi_{A_2}(G) \subseteq \Delta_+$.

Включение $\Delta_+ \supseteq \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$ следует из леммы 3 и принадлежности $A_2 \in \Delta_+$.

Степенью $\deg_G u$ и вершины u графа G называется мощность множества ребер, инцидентных этой вершине.

ЛЕММА 4. Пусть в дельтоиде G имеется вершина, смежная с двумя вершинами степени 1. Тогда $G \notin \Delta_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u и v — вершины степени 1, смежные с вершиной w . Рассмотрим нормальное разбиение $\{\overline{uw}, \overline{vw}\} \coprod Q$ около w . Если Q пусто, то $G = A_3 \notin \Delta_+$. Если Q непусто, то $\Theta_G = \Theta_{A_1} \Theta_{A_1} \Theta_X + \Theta_{A_3} \Theta_Y = 0$.

Простым путем длины $k \geq 1$ в графе называется последовательность $\{v_i\}_{i=0}^k$ попарно различных вершин таких, что v_{i-1} смежна с v_i для любого $i = 1, \dots, k$. Вершины v_0 и v_k называются концами этого пути. Расстоянием от вершины u до другой вершины v называется минимум длин простых путей с концами u и v . Расстояние от вершины до самой себя полагается равным нулю.

Пунктированным графом называется граф, в котором отмечена одна вершина. Формально говоря, граф — это пара (V_0, V_1) , а пунктированный граф — это тройка (V_0, v, V_1) , где $v \in V_0$. Высотой вершины пунктированного дерева называется расстояние от нее до отмеченной вершины. Высотой пунктированного дерева называется максимум высот его вершин.

Пусть $\{u, v, w\}$ — простой цикл в связном дельтоиде G . Через $(u; vw)$ обозначим множество всех вершин x , удовлетворяющих условию: любой простой путь с концами u и x содержит v или w . В дельтоидах $G - (u; vw)$, $G - (v; wu)$ и $G - (w; uv)$ отметим, соответственно, вершины u , v и w . Полученные пунктированные дельтоиды обозначим соответственно G/u , G/v и G/w . Цикл $\{u, v, w\}$ назовем *концевым*, если среди пунктированных дельтоидов G/u , G/v , G/w имеется не менее двух пунктированных деревьев.

Очевидно, что во всяком связном дельтоиде, отличном от дерева, имеется концевой цикл.

Докажем включение $\Delta_+ \subseteq \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$ индукцией по числу вершин дельтоида $G \in \Delta_+$. Положим $n = |V_0(G)|$.

Пусть $n \leq 2$. Тогда $G = A_2 \in \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$.

Пусть для любого $H \in \Delta_+$ такого, что $|V_0(H)| < k$, имеем $H \in \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$.

Рассмотрим дельтоид $G \in \Delta_+$ такой, что $|V_0(G)| = k \geq 3$. Для доказательства принадлежности $G \in \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$ достаточно найти связный дельтоид X такой, что $|V_0(X)| < k$ и $G \in \Phi_{A_2}(X)$ (тогда по лемме 2 имеем $X \in \Delta_+$, а отсюда, по предположению индукции, имеем $X \in \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$; значит, $G \in \langle A_2 \mid \Phi_{A_2} \rangle$).

СЛУЧАЙ 1. Пусть G — дерево. Пунктируем его так, чтобы высота h полученного пунктированного дерева была больше или равна двум (так можно пунктировать любое дерево, число вершин которого больше или равно трем). Рассмотрим простой путь $\{u_i\}_{i=0}^h$, где u_0 — отмеченная вершина. Очевидно, что $\deg_G u_h = 1$.

Покажем, что всякая вершина $w \in V_0(G)$, смежная с u_{h-1} , равна u_i для некоторого i . Действительно, в противном случае последовательность $u_0, \dots, u_{h-1}, w$ была бы простым путем длины h . Отсюда $\deg_G w = 1$. Итак, u_h и w — вершины степени 1, смежные с вершиной u_{h-1} . По лемме 4 имеем $G \notin \Delta_+$ — противоречие.

Так как $h \geq 2$, то $\deg_G u_{h-1} = 2$. Положим $X = G - \{u, v\}$. Дельтоид X связный, $|V_0(X)| < k$ и $G \in \Phi_{A_2}(X)$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть в G существует концевой цикл $\{u, v, w\}$ такой, что пунктированные деревья G/u и G/v имеют высоту 0. Положим $X = G - \{u, v\}$. Дельтоид X связный, $|V_0(X)| < k$ и $G \in \Phi_{A_2}(X)$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть в G существует концевой цикл $\{u, v, w\}$ такой, что пунктированное дерево G/u имеет высоту $h \neq 0$. Рассмотрим в G/u простой путь $\{u_i\}_{i=0}^h$, где $u_0 = u$. Очевидно, что $\deg_G u_h = \deg_{G/u} u_h = 1$.

Покажем, что всякая вершина $w \in V_0(G/u)$, смежная с u_{h-1} , равна u_i для некоторого i . Действительно, в противном случае последовательность $u_0, \dots, u_{h-1}, w$ была бы простым путем длины h . Отсюда $\deg_G w = \deg_{G/u} w = 1$. Итак, u_h и w — вершины степени 1, смежные с вершиной u_{h-1} . По лемме 4 имеем $G \notin \Delta_+$ — противоречие.

Если $h = 1$, то $u_{h-1} = u_0$ и в G/u нет вершин, смежных с u_0 , кроме u_h . Поэтому $\deg_{G/u} u_0 = 1$ и $\deg_G u_0 = 3$. Положим $X = G - \{u_0, u_1\}$. Дельтоид X связный, $|V_0(X)| < k$ и $G \in \Phi_{A_2}(X)$.

Если $h \geq 2$, то $\deg_{G/u} u_{h-1} = 2$ и $\deg_G u_{h-1} = 2$. Положим $X = G - \{u_{h-1}, u_h\}$. Дельтоид X связный, $|V_0(X)| < k$ и $G \in \Phi_{A_2}(X)$.

Индуктивный шаг завершен.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
- [2] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. №2 (170). С. 19–33.
- [3] Berman S., Lee Y. S., Moody R. V. The spectrum of a Coxeter transformation, affine Coxeter transformations and the defect map // J. Algebra. 1989. V. 121. P. 339–357.
- [4] Coleman A. J. Killing and the Coxeter transformation of Kac-Moody algebras // Invent. Math. 1989. V. 95. P. 447–477.
- [5] Ringel C. M. The spectral radius of the Coxeter transformations for a generalized Cartan matrix // Math. Ann. 1994. №300. P. 331–339.
- [6] Колмыков В. А. Преобразования Кокстера и геометрия матрицы данных // Матем. сб. 2003. Т. 194. №7. С. 119–126.
- [7] Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и число “–1” // Матем. сб. 2000. Т. 191. №10. С. 51–56.
- [8] Колмыков В. А. Отражения и трехмерность // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №6. С. 848–852.
- [9] Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и спектры операций // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 37–50.
- [10] Колмыков В. А. Преобразование Кокстера: дельтоиды, трилистники и числа распада // Матем. сб. 2005. Т. 196. №1. С. 67–80.
- [11] Колмыков В. А., Меньших В. В., Субботин В. Ф., Сумин М. В. Некоторые свойства ациклических графов и связанных с ними многочленов. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1983. Деп. в ВИНТИ 12. 12. 83 № 6707-83 Деп.

Воронежский государственный университет

Поступило

10.11.2003

Исправленный вариант

12.06.2005