Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Кондратьев, А. М. Чеботарев, Теоремы Бернштейна и преобразования корреляционных мер в статистической физике, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 700–716

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 06:58:00

ТЕОРЕМЫ БЕРНШТЕЙНА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МЕР В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Ю. Г. Кондратьев, А. М. Чеботарев

Изучается класс эндоморфизмов конуса корреляционных функций, порождаемых вероятностными мерами. Рассматриваются алгебраические свойства произведений $(\cdot, \star)$ и отображений K, K^{-1} , связывающие свойства функций на конфигурационном пространстве со свойствами сопоставляемых им операторов (матриц с булевыми индексами): $F(\gamma) \rightarrow \hat{F}(\gamma) = \{F(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$. Для операторов $\hat{F} \cup (\gamma)$ и $\hat{F} \cap (\gamma)$ получены достаточные условия неотрицательной определенности, связанные со свойствами вполне монотонности либо абсолютной монотонности функций $F(\gamma)$.

Библиография: 21 название.

1. Введение. Пусть (X, Σ, σ) – локально компактное хаусдорфово пространство с локально конечной мерой σ и Σ – борелевская сигма-алгебра его подмножеств. Векторы $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_k \in X$, $x_k \neq x_j$, отличающиеся перестановками компонент, в дальнейшем не различаются и относятся к одному классу эквивалентности, называемому *конфигурацией*: $\eta = \{x_k\}_{k=1}^n = \bigcup_{k=1}^n \{x_k\} \in \Gamma^{(|\eta|)}$, где через $|\eta|$ обозначено число элементов конфигурации η , а через $\Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}(X)$ – совокупность всех n -элементных подмножеств множества X . Объединение всех конечных конфигураций в X обозначим через $\Gamma_0 = \Gamma_0(X) = \bigsqcup_n \Gamma^{(n)}$, а совокупность всех локально конечных конфигураций через $\Gamma = \Gamma(X)$. Локальная конечность означает *конечность* числа элементов γ_Λ ограничения любой конфигурации $\gamma \in \Gamma$ на любое компактное множество $\Lambda \in \mathcal{B}_b(X)$, где $\mathcal{B}_b(X)$ – множество ограниченных измеримых подмножеств X .

В дальнейшем изложении множество Γ_0 рассматривается как *решетка*, а множества Γ_Λ – как *булевы алгебры*. Элементы решетки и булевых алгебр являются индексами векторов и матриц, допускающими операции объединения и пересечения, при этом линейные отображения и квадратичные формы описываются матрицами с булевыми индексами. Функции, заданные на конфигурациях, *симметричны*, поэтому любой функции $F: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ можно сопоставить *эрмитовы* матрицы $\hat{\mathcal{F}} \cup = \{F(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$, $\hat{\mathcal{F}} \cap = \{F(\alpha \cap \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$. Условия, при которых матрицы такого вида неотрицательно определены, рассматриваются во втором разделе настоящей статьи. В известной нам литературе этот вопрос не был исследован достаточно полно. Чтобы объяснить причину нашего интереса к операторам такого вида, напомним некоторые понятия и факты гармонического анализа на конфигурационных пространствах [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке DFG 436 RUS 113/779/0-1.

Функция $G: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ называется функцией с *ограниченным носителем*, если существуют $n < \infty$ и ограниченное множество $\Lambda \in \mathcal{B}_b(X)$ такие, что $G(\xi) = 0$, если либо $|\xi| \geq n$, либо $\xi \cap (X \setminus \Lambda) \neq \emptyset$. Множество $\bigsqcup_{k=0}^n \Lambda^{(k)} \subset \Gamma_0$ содержит носитель функции G , при этом множество $[0, n]$ рассматривается как компонента носителя по “числу частиц”, а $\sup_{\eta \in \Gamma_\Lambda^{(k)}} G(\eta)$ – как “пространственные” компоненты носителя в $\Gamma^{(k)}(X)$.

Алгебра *ограниченных* измеримых функций $G: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ с ограниченными носителями обозначается через $B_{bs}(\Gamma_0)$. Помимо алгебры с поточечным произведением “.” и единицей 1, на множестве $B_{bs}(\Gamma_0)$ рассматривается алгебра $B_{bs}^*(\Gamma_0)$ с коммутативным и ассоциативным произведением “ $\star$ ” (называемом также *сверткой* [1], [2]):

$$(G \star F)(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \cup \beta = \gamma; \alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) F(\beta).$$

Единицей алгебры $B_{bs}^*(\Gamma_0)$ является “вакуумное состояние” ϕ_0 : $\phi_0(\omega) = 1$, если $\omega = \emptyset$, и $\phi_0(\omega) = 0$, если $\omega \neq \emptyset$, обладающее свойством проектора: $\phi_0^2 = \phi_0$.

Алгебра *цилиндрических функций полиномиального роста* состоит из функций $F: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, для которых существуют компактное множество $\Lambda \in \mathcal{B}_b(X)$ и полином $P(x): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ конечного порядка такие, что

- $F(\gamma_\Lambda) = F(\gamma)$ для любого $\gamma \subset \Lambda$ (Λ – основание цилиндра, а n -частичные конфигурации – его сечения),
- для любого $\gamma \in \Gamma$ выполнена оценка $|F(\gamma_\Lambda)| \leq P(|\gamma_\Lambda|)$, где $\gamma_\Lambda = \gamma \cup \Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{B}_0(X)$.

Алгебра измеримых функций полиномиального роста обозначается через $\mathcal{F}L_{pb}^0(\Gamma)$.

Важную роль в дальнейшем изложении играет оператор K , действующий по правилу

$$(KG)(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \in \gamma} G(\eta), \quad \gamma \in \Gamma. \quad (1)$$

Включение $\in$ означает, что сумма берется по всем конечным подмножествам множества γ , при этом для любого $G \in B_{bs}(\Gamma_0)$ имеет место оценка (см. [3]), гарантирующая полиномиальный рост образа и показывающая, что $K: B_{bs}(\Gamma_0) \rightarrow \mathcal{F}L_{pb}^0(\Gamma)$:

$$|KG(\gamma_\Lambda)| \leq \sup_{\xi \in \Lambda, |\xi| \leq n} |G(\xi)| \sum_{k=0}^n \frac{|\gamma_\Lambda|!}{k!(|\gamma_\Lambda| - k)!} \leq \sup_{\xi \in \Lambda, |\xi| \leq n} |G(\xi)| |\gamma_\Lambda|^n,$$

где $\gamma_\Lambda = \gamma \cap \Lambda$. Сужение оператора K на $B_{bs}(\Gamma_0)$ обозначается K_0 . Известно, что оператор K_0 обратим, причем обратное преобразование имеет вид

$$(K_0^{-1}G)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \subseteq \xi} (-1)^{|\xi \setminus \eta|} G(\eta), \quad \xi \in \Gamma_0.$$

Нетрудно видеть, что $K_0^{-1}1 = \phi_0^1$.

¹Например, прообразом финитной неотрицательной функции $G_n(\eta) = a^{|\eta|} I_{[0, n]}(|\eta|) \in B_{bs}(\Gamma_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, является знакопеременная функция степенного роста: $K^{-1}G_n(\gamma) = \sum_{k=0}^n (-1)^{|\gamma| - k} a^k C_{|\gamma|}^k \in \mathcal{F}L_{pb}^0(\Gamma)$, причем $|K^{-1}G_n(\gamma)| = c_n |\gamma|^n (1 + O(|\gamma|^{-1}))$.

Помимо простой формулы обращения оператор K обладает свойством $\overline{\cdot}$ -дистрибутивности относительно $\star$ -произведения [1], [2]:

$$(K \overline{G} \star F)(\gamma) = \overline{(K G)}(\gamma) \cdot (K F)(\gamma). \quad (2)$$

С другой стороны, для функций из $B_{\text{bs}}(\Gamma_0)$ и конфигураций $\gamma \in \Gamma$ корректно определено семейство *локальных полуторалинейных форм*

$$(K \overline{G} \cdot F)(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\omega \in \gamma} \overline{G}(\omega) \cdot F(\omega) = (G, F)_\gamma,$$

являющихся функциями из $\mathcal{F}L_{\text{pb}}^0(\Gamma)$.

Через $(X^n, \Sigma_n, \sigma_n)$ обозначим прямое произведение n копий измеримого топологического пространства X , снабженное мерой

$$\sigma^{(n)}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n!} \int_B \prod_{k=1}^n \sigma(dx_k) \quad (3)$$

на произведении сигма-алгебр $\Sigma^{(n)} = \Sigma \times \cdots \times \Sigma$. Мера

$$d\lambda_\sigma = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} d\sigma^{(n)}$$

на прямой сумме σ -алгебр $\Sigma^{(n)}$ называется *мерой Лебега–Пуассона*.

Рассмотрим σ -алгебру Σ_Γ цилиндрических подмножеств множества Γ , порождаемую системой окрестностей

$$\mathcal{D}(\Lambda, c) = \{\gamma: |\gamma_\Lambda| \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}_+,$$

и пусть $\mathbf{m}: \Sigma_\Gamma \rightarrow [0, 1]$ – вероятностная мера на Σ_Γ .

Ансамбль тождественных классических частиц описывается набором неотрицательных симметричных n -частичных корреляционных мер $\rho = \{\rho_n\}_{n=0}^\infty$, сопоставляемых вероятностной мере $\mathbf{m}$ на $\mathcal{D}(F, c)$ с помощью равенства [3]:

$$\int_{\Gamma_0} G(\eta) d\rho(\eta) = \sum_n \int_{\Gamma_n} G(\eta) d\rho_n(\eta) = \int_\Gamma (K G)(\gamma) d\mathbf{m}(\gamma), \quad G \in B_{\text{bs}}(\Gamma_0). \quad (4)$$

n -частичная корреляционная мера определяется значениями правой части этого равенства на множестве функций G , носители которых принадлежат Γ_n , $n \geq 0$ [3]. *Корреляционными функциями* называются производные Радона–Никодима корреляционных мер относительно меры Лебега–Пуассона [1], [2]:

$$k_n(\eta) = \frac{d\rho}{d\lambda_\sigma}(\eta), \quad |\eta| = n. \quad (5)$$

Следует отметить, что формулы (4) и (5) фактически использованы в конструкции производящего функционала Н. Н. Боголюбова [4]. Важность этой конструкции состоит в

том, что она устанавливает связь n -частичных корреляционных мер большого канонического ансамбля и меры Гиббса.

Проблема характеристики функций k_n , являющихся корреляционными функциями некоторой вероятностной меры $\mathbf{m}$ в конфигурационном пространстве Γ , была решена А. Ленардом [3]. Необходимыми и достаточными условиями являются симметричность, неотрицательность, нормированность и неотрицательная определенность $\{\rho_n\}$ [3]. Последнее условие нетривиально, оно означает, что

$$\sum_n \int_{\Gamma_n} G(\eta) d\rho_n(\eta) \geq 0 \quad \forall G: KG \geq 0, \quad G \in B_{bs}(\Gamma_0). \quad (6)$$

Конус корреляционных мер, удовлетворяющих условию (6), будем обозначать через $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$.

В случае бозе-систем с нулевым химическим потенциалом, находящихся в конечном объеме, сопряженное преобразование K^* , действующее на n -частичные корреляционные меры, имеет смысл операции построения набора корреляционных мер большого канонического ансамбля по заданным корреляционным функциям n -частичных ансамблей, а обратное преобразование “демонтирует” большой канонический ансамбль в набор корреляционных характеристик невзаимодействующих n -частичных систем. Понимание этого важного факта использовалось в [5] для конструктивного построения области определения уравнения Кирквуда–Зальцбурга и в [6] для его диагонализации; сопряженные преобразования использовались так же в [7], [8] для перехода от незацепляющейся многочастичной системы уравнений Лиувилля к цепочке Боголюбова. Конструкция измеримого конфигурационного пространства [9], а также ряд алгебраических фактов для производящих функционалов классических статистических ансамблей [10] и квантовых бозевских систем [11] были обобщены в [1], [2] и нашли глубокие применения в гармоническом анализе на конфигурационных пространствах [12]–[15].

Конус $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$ корреляционных функций вероятностных мер на Γ может быть корректно определен с помощью свертки $\star$ и утверждений типа классических теорем о характеристизации мер с помощью их моментов [16], гарантирующих существование вероятностной меры на ядерном пространстве. Более точно, $\rho \in \mathcal{L}^+(\Gamma_0)$ тогда и только тогда, когда выполнено некоторое условие на скорость роста моментов [16] и для любой функции $G \in B_{bs}(\Gamma_0)$ имеет место условие неотрицательной определенности [1], [2]

$$\sum_n \int_{\Gamma_n} (\bar{G} \star G)(\eta) d\rho_n(\eta) \geq 0 \quad \forall G: G \in B_{bs}(\Gamma_0), \quad (7)$$

т.е. роль $\star$ -неотрицательных функций играют $\star$ -произведения $\bar{G} \star G$, а роль единицы – вакуумное состояние ϕ_0 . Поэтому операторы U , предвойственные эндоморфизмам U^* конуса $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$, должны сохранять вакуум и $\star$ -положительность. Алгебраическая характеристика таких операторов составляет цель настоящей работы.

2. Алгебраические свойства произведений $(\cdot, \star)$ и отображений K, K^{-1} . Произведению “ $\star$ ” сопоставляется матрица $\delta_\alpha(\beta)$:

$$(G \star F)(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \cup \beta = \gamma; \alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) F(\beta) = \sum_{\alpha, \beta \subset \Gamma_0} G(\alpha) \delta_\gamma(\alpha \cup \beta) F(\beta),$$

где $\delta_\gamma = \{\delta_\gamma(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$ и $\delta_\gamma(\xi) = \{1, \text{если } \gamma = \xi; \delta_\gamma(\xi) = 0, \text{если } \gamma \neq \xi\}$. Вычисления показывают, что $(2^{|\gamma|} \times 2^{|\gamma|})$ -матрица $\delta_\gamma = \{\delta_\gamma(\alpha \cup \beta)\}$ симметрична, невырождена, имеет кратный спектр и положительно (отрицательно) определена в подпространствах половинной размерности $2^{|\gamma|-1}$. Матрица $E_\gamma = \sum_{\xi \subseteq \gamma} \delta_\xi$ заполнена единицами, так как для любых $\alpha, \beta \subseteq \gamma$ найдется единственное $\xi = \alpha \cup \beta$. Поэтому $\sum_{\xi \subseteq \gamma} \delta_\xi = E_\gamma = e_\gamma \times e_\gamma$, $\text{rank } E_\gamma = 1$, где e_γ – вектор с $2^{|\gamma|}$ единичными компонентами. В частности, имеет место формула (2)

$$K(G \star H)(\gamma) = (G, E_\gamma H) = KG(\gamma) \cdot KH(\gamma).$$

Поэтому $K(\overline{G} \star G) \star (\overline{F} \star F) = |KG|^2 \cdot |KF|^2$; следовательно,

$$(\overline{G} \star G) \star (\overline{F} \star F) = \overline{H} \star H, \quad H = G \star F \quad \forall \Phi: \Gamma \rightarrow \mathbb{R},$$

что формально доказывает тот факт, что функции вида $\overline{G} \star G$ образуют $\star$ -положительный конус в $\mathcal{F}L_{\text{pb}}^0(\Gamma)$.

Нетрудно видеть, что $K1(\gamma) = 2^{|\gamma|}$, $(1 \star 1)(\gamma) = 3^{|\gamma|}$, $K(1 \star 1)(\gamma) = 4^{|\gamma|}$ и т.д. Отметим, что формулы замены переменных суммирования не всегда очевидны, например,

$$\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} f(\alpha \cup \beta) = \sum_{\xi \subset \gamma} 3^{|\xi|} f(\xi) \quad \forall f \in B_{\text{bs}}(\Gamma_0).$$

Здесь $3^{|\xi|} = (1 \star 1)(\xi)$ – число пар возможно пересекающихся множеств, объединение которых равно ξ .

Через $I_A(B): \Gamma_0 \times \Gamma_0 \rightarrow \{0, 1\}$ мы будем обозначать индикаторную функцию множества A : $I_A(B) = 1$, если $|A \cap B| = |B|$, и $I_A(B) = 0$, если $|A \cap B| < |B|$.

ЛЕММА 1. Умножение “ $\cdot$ ”, свертка “ $\star$ ” и оператор K обладают свойствами

$$K(F \cdot (\overline{G} \star H))(\gamma) = (G, \widehat{F}_\cup H)_\gamma = \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma} I_\gamma(\alpha \cup \beta) F(\alpha \cup \beta) \overline{G}(\alpha) H(\beta), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} K(\hat{L}(\overline{G} \star H))(\gamma) &= \sum_{\omega \in \gamma} \sum_{\xi \subset \Omega(\omega)} L^\omega(\xi) \sum_{\alpha \cup \beta = \xi} \overline{G}(\alpha) H(\beta) = \sum_{\omega \in \gamma} (G, \hat{L}_\cup^\omega H)_\gamma \\ &= \sum_{\omega, \alpha, \beta \in \Gamma} I_\gamma(\omega) I_{\Omega(\omega)}(\alpha \cup \beta) L^\omega(\alpha \cup \beta) \overline{G}(\alpha) H(\beta) \end{aligned} \quad (9)$$

для любых финитных функций F, G, H и L и любой функции $\Omega: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$, где $\hat{L}_\cup^\omega$ – матрица $\{L^\omega(\alpha \cup \beta)\}$ и

$$\hat{L}F(\gamma) = \sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} L^\gamma(\xi) \cdot F(\xi). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе тождество есть сумма тождеств вида (8). Первое тождество проверяется прямой подстановкой:

$$K(F \cdot (\bar{G} \star H)) = \sum_{\omega \in \Gamma} F(\omega) \sum_{\alpha \cup \beta = \omega} \bar{G}(\alpha) H(\beta) = \sum_{\alpha, \beta \in \Gamma} F(\alpha \cup \beta) \bar{G}(\alpha) H(\beta).$$

Нетрудно видеть, что если $G = H = 1$, то (8) совпадает с (7).

Тождество (8) означает, что операторами умножения на функцию $G(\gamma)$, удовлетворяющими условиям симметричности, нормированности и сохранения конуса $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$, могут быть только неотрицательные функции на пространстве конфигураций, которым соответствуют неотрицательно определенные матрицы $\hat{\mathcal{G}}_{\cup} = \{G(\alpha \cup \beta)\}$. В частности, мы покажем, что оператор умножения на функцию $G(|\gamma|)$ числа точек в конфигурации γ неотрицательно определен тогда и только тогда, когда функция G *вполне монотонна* в смысле Бернштейна (см. [17], [18]) и $G(\emptyset) = 1$.

Для наиболее простого объяснения этого факта в терминах операторного исчисления рассмотрим параметризацию отображения K . Операторы

$$(K_t F G)(\xi_{\Lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \subseteq \xi_{\Lambda}} t^{|\xi_{\Lambda} \setminus \eta|} G(\eta), \quad t \in \mathbb{C}, \quad (11)$$

корректно определены как операторы, действующие из $B_{\text{bs}}(\Gamma_0)$ в пространство функций экспоненциального роста $\mathcal{E}L_c(\Gamma)$ при всех $|t| \leq e^c - 1$:

$$|K_{\pm t} G(\gamma_{\Lambda})| \leq \sup_{\xi \in \Lambda} |G(\xi)| (1 + |t|)^{|\gamma_{\Lambda}|} \leq \sup_{\xi \in \Lambda} |G(\xi)| e^{c|\gamma_{\Lambda}|}. \quad (12)$$

При этом $K \stackrel{\text{def}}{=} K_1$, $K_0 = I$, $(K_t \phi_0)(\gamma) = t^{|\gamma|}$ и

$$\begin{aligned} (K_t K_s G)(\gamma_{\Lambda}) &= \sum_{\eta \subset \gamma_{\Lambda}} t^{|\gamma_{\Lambda} \setminus \eta|} \sum_{\xi \subset \eta} s^{|\eta \setminus \xi|} G(\xi) = \sum_{\xi \subset \gamma_{\Lambda}} G(\xi) \sum_{\substack{\gamma_{\Lambda} \setminus \xi \\ |\eta \setminus \xi|=0}}^{|\gamma_{\Lambda} \setminus \xi|} C_{|\gamma_{\Lambda} \setminus \xi|}^{|\eta \setminus \xi|} t^{|\gamma_{\Lambda} \setminus \eta|} s^{|\eta \setminus \xi|} \\ &= \sum_{\xi \subset \gamma_{\Lambda}} G(\xi) (t + s)^{|\gamma_{\Lambda} \setminus \xi|} = (K_{t+s} G)(\gamma_{\Lambda}). \end{aligned}$$

Следовательно, $K_t^{-1} = K_{-t}$ и K_t — группа, генератором которой является оператор $\hat{b}^{\dagger}$, действующий по правилу

$$(\hat{b}^{\dagger} G)(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} K_t G(\gamma) \Big|_{t=0} = \sum_{x \subset \gamma, |x|=1} G(\gamma \setminus x) \quad \forall \eta \in \Gamma_0, \quad G \in B_{\text{bs}}(\Gamma_0), \quad (13)$$

так что $K_t = e^{t\hat{b}^{\dagger}}$. Оператор $\hat{b}^{\dagger}$ является хорошо известным *оператором рождения*.

Пусть $\hat{n}$ — оператор числа частиц, имеющий целочисленный спектр и действующий по правилу $\hat{n}G(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} |\xi| G(\xi)$. Предположим, что функция $g(x)$ является фурье-образом

комплексной меры Радона m_g на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, имеющей конечную абсолютную вариацию $|m_g(\mathbb{R})| < \infty$:

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{ixz} m_g(dz). \quad (14)$$

В каком случае оператор умножения $\rho_n \rightarrow g(n)\rho_n$ сохраняет конус $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$? Покажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{g_n\}$ была вполне монотонна.

Учитывая коммутационное соотношение $\widehat{b}^\dagger \widehat{n} = (\widehat{n} - 1) \widehat{b}^\dagger$, из которого следует, что $e^{iz\widehat{n}} f(\widehat{b}^\dagger) = f(e^{iz}\widehat{b}^\dagger) e^{iz\widehat{n}}$ для любой непрерывной функции f , запишем $\widehat{g} = Kg(\widehat{n})K^{-1}$ в виде

$$\begin{aligned} \widehat{g} &= \int_{\mathbb{R}} e^{\widehat{b}^\dagger} e^{iz\widehat{n}} m_g(dz) e^{-\widehat{b}^\dagger} = \int_{\mathbb{R}} K_{t(z)} e^{iz\widehat{n}} m_g(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{\widehat{b}^\dagger(1-e^{iz})} e^{iz\widehat{n}} m_g(dz), \quad t(z) = 1 - e^{iz}, \quad |t(z)| \leq 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая оценку (12), мы видим, что оператор g_K действует из $B_{\text{bs}}(\Gamma_0)$ в $\mathcal{E}L_c(\Gamma_0)$ при любом $c \geq \ln 3$:

$$\begin{aligned} |\widehat{g}G(\gamma_\Lambda)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |m_g|(dz) |K_{t(z)} e^{iz\widehat{n}} G(\gamma_\Lambda)| \\ &\leq \sup_{\xi \in \Lambda} |G(\xi)| \int_{\mathbb{R}} |m_g|(dz) (1 + |t(z)|)^{|\gamma_\Lambda|} \leq 3^{|\gamma_\Lambda|} \sup_{\xi \in \Lambda} |G(\xi)| \in \mathcal{E}L_c(\Gamma_0), \end{aligned}$$

где $|m_g|$ — абсолютная вариация меры m_g .

Действие оператора конечной разности $\widehat{\delta}: \widehat{\delta}f(x) = f(x+1) - f(x)$ на фурье-образ функции или меры эквивалентно умножению прообраза на $-t(z) = e^{iz} - 1$. Разлагая в ряд по степеням оператора $\widehat{b}^\dagger$ интеграл (15) с учетом этого замечания, получим ряд

$$\widehat{g} = \sum_k \frac{(\widehat{b}^\dagger)^k}{k!} (-\widehat{\delta})^k g(\widehat{n}) \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что этот оператор отображает множество неотрицательных финитных функций в множество неотрицательных функций полиномиального роста тогда и только тогда, когда каждое слагаемое этого ряда неотрицательно, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие вполне монотонности функции $g(x)$:

$$(-\widehat{\delta})^k g(n) \geq 0.$$

В следующем разделе мы обобщим это наблюдение.

3. Критерии неотрицательной определенности матриц с булевыми индексами. Рассмотрим множество простых функций $V: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$, порождающих семейства неотрицательно определенных матриц при отображении $V \rightarrow \widehat{V}_\cup = \{V(\alpha \cup \beta)\}$. Множество таких функций является алгеброй в силу теоремы Шура о замкнутости конуса неотрицательно определенных матриц относительно поэлементного умножения.

Заметим также, что если $\widehat{V}_\cup \geq 0$, то функции V можно сопоставить вполне положительное отображение $\mathcal{V}: \mathcal{M}_n^+ \rightarrow \mathcal{M}_n^+$ для любого n

$$\mathcal{V}(M) = (\widehat{V}_\cup)^{1/2} M (\widehat{V}_\cup)^{1/2},$$

где $\mathcal{M}_n^+$ – множество положительно определенных матриц размера $n \times n$ такое, что $\text{tr } \mathcal{V}(I) = \widehat{V}_\cup$, и диагональ матрицы $\widehat{V}_\cup$ содержит значения функции V .

Пусть $\Omega: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$, $v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$, $Kv(\xi) < \infty$ для любого $\xi \in \Gamma$. Тогда из тождества

$$I_\xi(\alpha \cup \beta) = I_\xi(\alpha) I_\xi(\beta) \quad (16)$$

следует неотрицательная определенность всех матриц $V_\cup = \{V(\alpha \cup \beta)\}$, соответствующих функции

$$V(\gamma) = \sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_\xi(\gamma).$$

Разложение функции V по индикаторным функциям непересекающихся множеств является абелевым аналогом формулы спектрального разложения, поэтому, если конфигурации, принадлежащие носителю v , *не пересекаются*, то в силу теоремы Бернштейна о равномерной аппроксимации непрерывной функции алгебраическими полиномами [17] для любой непрерывной функции f имеет место тождество

$$F(\gamma) = f\left(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_\xi(\gamma)\right) = f(0) + \sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} I_\xi(\gamma) \hat{\delta}_{v(\xi)} f(0),$$

где $\hat{\delta}_y$ – оператор сдвига на y : $\hat{\delta}_y f(x) = f(x + y) - f(x)$. Из этого равенства следует неотрицательная определенность матриц $\widehat{F}_\cup$ с элементами $F(\alpha \cup \beta)$ при условии, что $f(v(\xi)) \geq f(0) \geq 0$ для всех $\xi \in \Omega(\gamma)$. Если $\Omega(\gamma)$ не совпадает с множеством X , то это условие является необходимым. Действительно, если $f(0) < 0$, то все квадратичные формы на функциях с носителем на $X \setminus \Omega(\gamma)$ отрицательно определены. Если $f(0) \geq 0$, и существует конфигурация ξ : $f(v(\xi)) - f(0) < 0$, то выбрав точку $x \in X \setminus \Omega(\gamma)$ и любую отличную от нуля функцию G такую, что $G(\alpha) = 0$, если $\alpha \neq x$, либо $\alpha \not\subseteq \xi$ и $KG(x \cup \Omega(\gamma)) = G(x) + KG(\Omega(\gamma)) = 0$, для конфигурации $\gamma = x \cup \Omega(\gamma)$ получим

$$(G, \widehat{F}_\gamma G) = (f(v(\xi)) - f(0)) |KG(\Omega(\gamma))|^2 < 0.$$

В случае, если множества конфигураций, входящих в носитель функции v , пересекаются, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – непрерывная функция, $v: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $K|v(\xi)| < \infty$ для любого $\xi \in \Gamma_0$. Тогда

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= f\left(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_\xi(\gamma)\right) \\ &= f(0) + \sum_{n \geq 1} \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n \in \Omega(\gamma)} I_{\cap \xi_k}(\gamma) \prod_{k=1}^n \hat{\delta}_{v(\xi_k)} f(x)|_{x=0}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\gamma) &= f\left(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_\gamma(\xi)\right) \\ &= f(0) + \sum_{n \geq 1} \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n \in \Omega(\gamma)} I_\gamma(\cup \xi_k) \prod_{k=1}^n \hat{\delta}_{v(\xi_k)} f(x)|_{x=0}. \end{aligned} \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим также, что правые части тождеств (17) и (18) можно записать с помощью оператора K в виде $(K \hat{S}_\gamma(\cdot) f(x))(\eta)|_{x=0}$, где $\hat{S}_\gamma(\omega)$ – оператор, действующий по правилу

$$\hat{S}_\gamma(\omega) = I_\gamma \left(\bigcup_{\xi \subset \omega} \xi \right) \prod_{\xi \subset \omega} \hat{\delta}_{v(\xi)} \quad \text{либо} \quad \hat{S}_\gamma(\omega) = I_{\bigcup_{\xi \subset \omega} \gamma}(\gamma) \prod_{\xi \subset \omega} \hat{\delta}_{v(\xi)}.$$

Докажем первое утверждение методом индукции по числу слагаемых, т.е. по числу точек носителя функции v или по $|\xi|$, причем в силу теоремы Бернштейна о равномерной аппроксимации достаточно доказать это равенство для функций $f(x) = x^n$, $n \geq 1$.

Если $|\xi| = 1$, то формула (17) совпадает с (16). Если разложение (17) верно для $|\xi| = n$, то для $|\xi| = n + 1$ имеем

$$\begin{aligned} (I_{\xi_1}(\gamma)v_1 + \dots + I_{\xi_{n+1}}(\gamma)v_{n+1})^N &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} I_{\bigcap_{j \in J} \xi_j}(\gamma) \prod_{j \in J} \hat{\delta}_{v_j} x^N|_{x=0} \\ &\quad + I_{\xi_{n+1}}(\gamma) \left((I_{\xi_1}(\gamma)v_1 + \dots + I_{\xi_n}(\gamma)v_n + v_{n+1})^N - (I_{\xi_1}(\gamma)v_1 + \dots + I_{\xi_n}(\gamma)v_n)^N \right) \\ &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} I_{\bigcap_{j \in J} \xi_j}(\gamma) \prod_{j \in J} \hat{\delta}_{v_j} x^N|_{x=0} \\ &\quad + \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} I_{\bigcap_{j \in J \cup n+1} \xi_j}(\gamma) \prod_{j \in J \cup n+1} \hat{\delta}_{v_j} x^N|_{x=0} \\ &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n+1\}} I_{\bigcap_{j \in J} \xi_j}(\gamma) \prod_{j \in J} \hat{\delta}_{v_j} x^N|_{x=0}. \end{aligned}$$

Следовательно, (17) имеет место для любого полинома и любой непрерывной функции. Разложение (18) доказывается аналогично.

Из формул

$$I_\xi(\alpha \cup \beta) = I_\xi(\alpha) I_\xi(\beta), \quad I_{\alpha \cap \beta}(\xi) = I_\alpha(\xi) I_\beta(\xi)$$

для произвольных множеств $\alpha, \beta, \xi \in \Gamma$ вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и

$$f(0) \geq 0, \quad \prod_{\xi \subset \omega} \hat{\delta}_{v(\xi)} f(x)|_{x=0} \geq 0 \quad \forall \omega \subset \eta. \quad (19)$$

Тогда матрицы с матричными элементами

$$\mathcal{F}(\alpha \cup \beta) = f\left(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_\xi(\alpha \cup \beta)\right), \quad \tilde{\mathcal{F}}(\alpha \cup \beta) = f\left(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_{\alpha \cap \beta}(\xi)\right), \quad \alpha, \beta \subset \gamma,$$

неотрицательно определены для любых $\gamma \in \Gamma_0$. Если $\Omega(\gamma)$ не совпадает с X , то условие (19) является также необходимым.

Матрицы с матричными элементами $-f(\sum_{\xi \subset \Omega(\gamma)} v(\xi) I_{\alpha \cup \beta}(\xi))$, $\alpha, \beta \subset \gamma$, неотрицательно определены для любого фиксированного $\gamma \in \Gamma_0$ на подпространствах функций $\{G: KG(\gamma) = 0\}$.

В силу формул (4), (7), (8) оператор умножения $\rho(d\gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\gamma)\rho(d\gamma)$ не выводит из конуса $\mathcal{L}^+(\Gamma_0)$.

Рассмотрим еще один конструктивный критерий неотрицательной определенности матриц с булевыми индексами.

Пусть задана функция $A: \Gamma_0 \times \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $A(x, x) \geq 0$ для любых одноточечных множеств $\{x\} \in X$ и $A(\alpha, \beta) = \overline{A(\beta, \alpha)}$. Семейство $\mathfrak{A}$ эрмитовых матриц размера $2^{|\gamma|} \times 2^{|\gamma|}$ вида $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) = \{A(\alpha, \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma} \in M_{2^{|\gamma|}}$, $\gamma \in \Gamma_0$, является множеством матриц, отвечающих функции A . Здесь и далее черта означает комплексное сопряжение, а звездочка – эрмитово сопряжение. Пусть далее

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \{A(\alpha, \beta \cup \{x\})\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}, & \widehat{\mathcal{A}}^x(\gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \{A(\alpha \cup \{x\}, \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma} = \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma)^*, \\ \widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) &\stackrel{\text{def}}{=} \{A(\alpha \cup \{x\}, \beta \cup \{x\})\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Семейство $\mathfrak{A}$ состоит из неотрицательно определенных матриц тогда и только тогда, когда из неотрицательной определенности матрицы $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$ следует, что

$$\mathcal{D}_\epsilon(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) + \epsilon I - \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma)^* (\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) \geq 0 \quad (20)$$

для любых $\gamma \in \Gamma_0$, $\epsilon > 0$, $x \in X$, либо из неотрицательной определенности матрицы $\widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma)$ следует, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}_\epsilon(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I - \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) (\widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) + \epsilon I)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma)^* \geq 0. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тройку квадратных матриц X, Y, Z таких, что $X = X^* \geq 0$, $Y = Y^* \geq 0$ и либо X , либо Y – обратимая матрица, и заметим, что блочная матрица

$$M = \begin{pmatrix} X & Z \\ Z^* & Y \end{pmatrix}$$

одним из двух преобразований

$$T = \begin{pmatrix} X^{-1/2} & -X^{-1}Z \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \widetilde{T} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Y^{-1}Z^* & Y^{-1/2} \end{pmatrix}$$

приводится к блочно-диагональному виду

$$T^*MT = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Y - Z^*X^{-1}Z \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \widetilde{T}^*M\widetilde{T} = \begin{pmatrix} X - ZY^{-1}Z^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

соответственно. Отсюда следует, что неотрицательная определенность матриц $Y - Z^*X^{-1}Z$ либо $X - ZY^{-1}Z^*$ необходима и достаточна для неотрицательной определенности матрицы M .

Нетрудно видеть, что добавление в конфигурацию γ одноточечного элемента $x \in X$ удваивает линейный размер матрицы $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$. Матрица $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma \cup \{x\}) = \{A(\alpha, \beta)\}_{\alpha, \beta \subset \gamma \cup \{x\}} \in M_{2^{|\gamma|+1}}$ является пределом при $\epsilon \rightarrow 0$ блочных матриц, имеющих следующую структуру:

$$\widehat{\mathcal{A}}(\gamma \cup \{x\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma \cup \{x\})_\epsilon, \quad \widehat{\mathcal{A}}(\gamma \cup \{x\})_\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I & \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) \\ \widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma)^* & \widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) + \epsilon I \end{pmatrix},$$

поэтому достаточно показать, что при любом $\epsilon > 0$ выполнено либо (20), либо (21).

Если матрица $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$ неотрицательно определена, то матрица $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I$ обратима и обратимое треугольное преобразование

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} (\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I)^{-1/2} & -(\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

приводит матрицу $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma \cup \{x\})$ к диагональному виду:

$$\widehat{\mathcal{A}}_\epsilon(\gamma \cup \{x\}) \rightarrow T_\epsilon^* \widehat{\mathcal{A}}_\epsilon(\gamma \cup \{x\}) T_\epsilon = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_\epsilon(\gamma) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Поскольку преобразование (22) обратимо и сохраняет знак каждого собственного значения матрицы $\widehat{\mathcal{A}}_\epsilon(\gamma \cup \{x\})$, то матрица $\widehat{\mathcal{A}}_\epsilon(\gamma \cup \{x\})$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда неотрицательно определена матрица $\mathcal{D}_\epsilon(\gamma)$, что по индукции доказывает необходимость и достаточность условия (20). Случай (21) рассматривается аналогично.

Поскольку для любого $x \not\subseteq \alpha \cup \beta$ имеют место равенства $A(\alpha \cup (\beta \cup \{x\})) = A((\alpha \cup \{x\}) \cup \beta)$, $A(\alpha \cap (\beta \cup \{x\})) = A((\alpha \cup \{x\}) \cap \beta) = A(\alpha \cap \beta)$, из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Семейство матриц $\widehat{\mathcal{A}}_\gamma = \{A(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$, $\gamma \in \Gamma_0$, состоит из неотрицательно определенных матриц, если $A(\alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Gamma_0$, и из неотрицательной определенности матрицы $\{A(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$ следует, что $0 \leq \{A((\alpha \cup \beta) \cup x)\}_{\alpha, \beta \in \gamma} \leq \{A(\alpha \cup \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$ для любого одноточечного множества $x \in X$.

2) Семейство матриц $\widehat{\mathcal{B}}_\gamma = \{B(\alpha \cap \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$ состоит из неотрицательно определенных матриц, если $B(\alpha) \geq 0$ для любого $\alpha \in \Gamma_0$, и из неотрицательной определенности матрицы $\{B(\alpha \cap \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$ следует, что $\{B((\alpha \cap \beta) \cup x)\}_{\alpha, \beta \in \gamma} \geq \{B(\alpha \cap \beta)\}_{\alpha, \beta \in \gamma}$ для любого одноточечного множества $x \in X$.

Матрица с элементами $A(\alpha, \beta) = |\alpha \cap \beta|$ является простейшим нетривиальным примером неотрицательно определенной матрицы. В этом случае $A(x, x) = 1 > 0$, $\widehat{\mathcal{A}}^x(\gamma) = \widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) = \widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$, $\widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) = \mathcal{E} + \widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$, где $\mathcal{E}$ – квадратная $(2^{|\gamma|} \times 2^{|\gamma|})$ -матрица, заполненная единицами, т.е. $\mathcal{E} = e \otimes e$, где e – вектор из $\mathbb{R}^{2^{|\gamma|}}$, все элементы которого равны 1. Таким образом, $\mathcal{E} \geq 0$. Поскольку $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma)(\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) \leq \widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$, для любого $\epsilon > 0$ выполнено неравенство (20)

$$\mathcal{D}_\epsilon(\gamma) = \mathcal{E} + \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) - \widehat{\mathcal{A}}(\gamma)(\widehat{\mathcal{A}}(\gamma) + \epsilon I)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) \geq \mathcal{E} \geq 0.$$

Более детальный анализ показывает, что матрица $\widehat{\mathcal{A}}(\gamma)$ является матрицей ранга $n = |\gamma|$ с собственными значениями $\lambda_1 = (n+1) \cdot 2^{(n-2)}$, $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 2^{(n-2)}$, $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{2^n} = 0$. В частности, наибольшему собственному значению соответствует вектор $|\alpha|$. Более точно,

$$\sum_{\beta \subset \gamma} |\alpha \cap \beta| \cdot |\beta| = (|\gamma| + 1) 2^{|\gamma|-2} |\alpha|.$$

Следующие две леммы устанавливают прямую связь критериев неотрицательной определенности матриц с элементами вида $f(|\alpha \cap \beta|)$ и $g(|\alpha \cup \beta|)$ с теоремами Бернштейна об абсолютно и вполне монотонных функциях.

ЛЕММА 2. Семейство $\widehat{G}_\cup \stackrel{\text{def}}{=} \{g(|\alpha \cup \beta|)\}$ состоит из неотрицательно определенных матриц тогда и только тогда, когда последовательность $g(k)$ вполне монотонна, т.е.

$$(1 - e^{\frac{d}{dx}})^n g(x) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k g(k) \geq 0$$

для любого натурального n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вполне монотонная функция g , заданная на множестве натуральных чисел, допускает продолжение на всю положительную полуось так, что $g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xz} m_g(dz)$ [18]. Поэтому достаточно убедиться, что при любом $z \geq 0$ матрицы $b(\gamma) = \{e^{-z|\alpha \cup \beta|}\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$ неотрицательно определены. Воспользуемся следствием 2 в случае $A(\alpha, \beta) = e^{-|\alpha \cup \beta|z}$. Поскольку в этом случае

$$\widehat{\mathcal{A}}_x(\gamma) = \widehat{\mathcal{A}}^x(\gamma) = \widehat{\mathcal{A}}_x^x(\gamma) = e^{-z} \widehat{\mathcal{A}}(\gamma) \leq \widehat{\mathcal{A}}(\gamma),$$

то $b(\gamma) \geq 0$. Отсюда следует достаточность вполне монотонности.

Для доказательства необходимости рассмотрим оператор

$$\widetilde{S}(\gamma) = \sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) e^{|\alpha \cup \beta| \frac{d}{dx}}.$$

Нетрудно видеть, что квадратичная форма $\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) g(|\alpha \cup \beta|)$ выражается через оператор $\widetilde{S}(\gamma)$:

$$\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) g(|\alpha \cup \beta|) = \widetilde{S}(\gamma) g(x) \Big|_{x=0}.$$

Положим $G(\alpha) = e^{i|\alpha|\theta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{|\gamma|} C_{|\gamma|}^k e^{(|\gamma|-k)\frac{d}{dx}} \sum_{n=0}^{|\gamma|-k} C_{|\gamma|-k}^n \sum_{m=0}^{|\gamma|-k-n} C_{|\gamma|-k-n}^m e^{i(m+n)\theta} e^{-i(|\gamma|-k-m)\theta} \\ &= (1 + e^{\frac{d}{dx} - i\theta} + e^{i\theta} + e^{2i\theta})^{|\gamma|}. \end{aligned}$$

При $G(\alpha) = e^{i|\alpha|\theta}$, $\theta = \pi$ получаем $\widetilde{S}(\gamma) = (1 - e^{\frac{d}{dx}})^{|\gamma|}$ и

$$\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) g(|\alpha \cup \beta|) = (1 - e^{\frac{d}{dx}})^{|\gamma|} g(x) \Big|_{x=0}.$$

Отсюда следует необходимость абсолютной монотонности для неотрицательной определенности матриц $\widehat{G}_\cup$.

Заметим, что функция g применяется не к оператору $\widehat{\mathcal{A}} = \{|\alpha \cup \beta|\}$, а к его матричным элементам. Поэтому теорема о спектральном разложении не может гарантировать неотрицательности соответствующего оператора $\widehat{\mathcal{G}}(\gamma)$ для любой неотрицательной функции g . Вычисления показывают, что матрица $\{|\alpha \cup \beta|\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$ не является неотрицательно определенной: из $2^{|\gamma|}$ ее собственных значений только одно положительно, $|\gamma|$ — отрицательны, остальные равны нулю. С точки зрения доказанной выше леммы причина состоит в том, что функция $g(x) = x$ не является вполне монотонной.

ЛЕММА 3. Семейство матриц $\hat{F}_\cap \stackrel{\text{def}}{=} \{f(|\alpha \cap \beta|)\}$ неотрицательно определено тогда и только тогда, когда функция $f(k)$ абсолютно монотонна, т.е.

$$(e^{\frac{d}{dx}} - 1)^n f(x) \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(k) \geq 0$$

для любого натурального n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем достаточность абсолютной монотонности. Абсолютно монотонная функция f , заданная на множестве натуральных чисел, допускает продолжение на положительную полуось так, что $f(x) = \sum_n f_n x^n$, $f_n \geq 0$ [18]. Поэтому $\hat{F}_\cap = \sum_n f_n \{|\alpha \cap \beta|^n\}$. Теорема Шура о неотрицательной определенности поэлементного произведения неотрицательных матриц [19, гл. 6, § 7] и теорема 1 гарантируют неотрицательную определенность всех матриц $\{|\alpha \cap \beta|^n\}_{\alpha, \beta \subset \gamma}$. Отсюда следует неотрицательная определенность матриц $\hat{\mathcal{A}}(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_0$.

Для доказательства необходимости рассмотрим оператор

$$\hat{S}(\gamma) = \sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) e^{|\alpha \cap \beta| \frac{d}{dx}}.$$

Нетрудно видеть, что квадратичная форма $\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) f(|\alpha \cap \beta|)$ выражается через оператор $\hat{S}(\gamma)$:

$$\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) f(|\alpha \cap \beta|) = \hat{S}(\gamma) f(x) \Big|_{x=0}.$$

Положим $G(\alpha) = e^{i|\alpha|\theta}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{S}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{|\gamma|} C_{|\gamma|}^k \sum_{n=0}^{|\gamma|-k} e^{n \frac{d}{dx}} C_{|\gamma|-k}^n \sum_{m=0}^{|\gamma|-k-n} C_{|\gamma|-k-n}^m e^{i(m+n)\theta} e^{-i(|\gamma|-k-m)\theta} \\ &= (1 + e^{\frac{d}{dx}} + 2 \cos(\theta))^{|\gamma|}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $G(\alpha) = e^{i|\alpha|\theta}$, $\theta = \pi$ выполнено равенство

$$\sum_{\alpha, \beta \subset \gamma} G(\alpha) \overline{G}(\beta) f(|\alpha \cap \beta|) = (e^{\frac{d}{dx}} - 1)^{|\gamma|} f(x) \Big|_{x=0}.$$

Отсюда следует необходимость абсолютной монотонности для неотрицательной определенности матриц $\hat{F}_\cap$.

Следствие 2, а также леммы 2 и 3 мотивируют следующее обобщение определений вполне монотонности и абсолютной монотонности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *абсолютно монотонной*, если сопоставляемое ей семейство матриц $\hat{F}_\cap = \{f(\alpha \cap \beta)\}$ неотрицательно определено. Функция $g: \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *вполне монотонной*, если сопоставляемое ей семейство матриц $\hat{G}_\cup = \{g(\alpha \cup \beta)\}$ неотрицательно определено.

Комбинируя теорему Шура и теорему 2 и учитывая, что $|\alpha \cup \beta| = |\alpha| + |\beta| - |\alpha \cap \beta|$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если матрица с элементами $A(\alpha, \beta)$ неотрицательно определена, то матрицы с элементами $e^{-\lambda|\alpha \cup \beta|} A(\alpha, \beta)$ и $e^{\lambda|\alpha \cap \beta|} A(\alpha, \beta)$ также являются неотрицательно определенными для всех $\lambda > 0$.

4. Условно неотрицательно определенные операторы. Для марковской полугруппы $P_t = e^{t\mathcal{L}}$,

$$P_t 1 = 1, \quad P_t f \geq 0, \quad \text{если } f \geq 0,$$

имеющей инвариантную меру μ и сильно непрерывной в $L_p(\Omega, \mu)$ при всех $p \geq 2$, известна следующая характеристика ее генератора $\mathcal{L}$ [20], сходная с характеристикой генераторов непрерывных по норме полугрупп вполне положительных отображений (ср. [21]):

$$C[f, f] \geq 0, \quad C[f, g] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(f \cdot g) - (\mathcal{L}f) \cdot g - f \cdot (\mathcal{L}g) \quad (23)$$

для всех f, g из некоторой алгебры $\mathcal{A} \subset \text{dom } \mathcal{L}$, плотно вложенной во все пространства $L_p(\Omega, \mu)$, $p \geq 2$. Билинейная форма $C[f, g]$ называется *carré du champ*. Доказательство этого утверждения основано на эквивалентности условия (23) неравенству Иенсена для матожиданий

$$P_t |f|^2 - |P_t f|^2 \geq 0 \quad \forall f \in L_2(\Omega, \mu). \quad (24)$$

Если полугруппа $P_t = e^{t\mathcal{L}}$ действует на множестве функций, заданных на конфигурациях, и является марковской, то полугруппа $U_t = K^{-1}P_tK = e^{t\hat{L}}$, $\hat{L} = K^{-1}\mathcal{L}K$ обладает свойствами, необходимыми и достаточными для сохранения конуса корреляционных мер на множестве конфигураций: операторы $K^{-1}P_tK$ сохраняют вакуумное состояние ϕ_0 и конус $\star$ -неотрицательных функций вида $\overline{G} \star G$.

Пусть $f = KF$ -ограниченная функция на Γ . Тогда $P_t |f|^2 = P_t K(\overline{F} \star F)$ и $|P_t f|^2 = K(\overline{K^{-1}P_t K \overline{F}} \star K^{-1}P_t K F)$. Учитывая, что оператор K^{-1} отображает конус неотрицательных финитных функций в конус $\star$ -положительных функций, условие (24) можно переписать в виде неравенства Шварца в конусе $\star$ -положительных функций:

$$\begin{aligned} K^{-1}(P_t |f|^2 - |P_t f|^2) &= K^{-1}(P_t K(\overline{F} \star F) - K(\overline{K^{-1}P_t K \overline{F}} \star K^{-1}P_t K F)) \\ &= U_t(\overline{F} \star F) - U_t \overline{F} \star U_t F \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку при $t = 0$ это неравенство превращается в строгое равенство, его дифференциал в точке $t = 0$ неотрицателен в конусе $\star$ -неотрицательных функций:

$$\hat{L}(\overline{F} \star F) - (\hat{L}\overline{F} \star F) - (\overline{F} \star \hat{L}F) \geq 0 \quad (25)$$

или, в обычном смысле,

$$K(\hat{L}(\overline{F} \star F) - (\hat{L}\overline{F} \star F) - (\overline{F} \star \hat{L}F)) \geq 0. \quad (26)$$

Пусть заданы функции $\Omega: \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ и $L: \Gamma \times \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $L(\gamma, \emptyset) = 0$, которым сопоставляется оператор

$$\hat{L}F(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \subset \Omega(\gamma)} L(\gamma, \eta) F(\eta)$$

и семейство операторов $\hat{C}_L^\gamma$ с матричными элементами

$$C_L^\gamma(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\eta \subset \Omega(\gamma)} \{L(\eta, \alpha \cup \beta) I_\eta(\alpha \cup \beta) - L(\eta, \alpha) I_\eta(\alpha) - L(\eta, \beta) I_\eta(\beta)\}, \quad \alpha, \beta \subset \gamma.$$

Функция L называется *символом* оператора $\hat{L}$. В силу леммы 1 имеет место равенство квадратичных форм

$$C_L^\gamma[F] \stackrel{\text{def}}{=} K(\hat{L}(\bar{F} \star F) - (\hat{L}\bar{F} \star F) - (\bar{F} \star \hat{L}F))(\gamma) = \sum_{\alpha, \beta \subset \Omega(\gamma)} C_L^\gamma(\alpha, \beta) \bar{F}(\alpha) F(\beta). \quad (27)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $\hat{L}$ называется *условно неотрицательно определенным*, если при каждом фиксированном $\gamma \in \Gamma_0$ выполнено неравенство $C_L^\gamma[G] \geq 0$ для всех $G \in B_{\text{bs}}(\Gamma_0)$, удовлетворяющих условию $KG(\gamma) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Семейство квадратичных форм (27) неотрицательно определено тогда и только тогда, когда оно условно неотрицательно определено. Кроме того, имеет место равенство

$$C_L^\gamma[F] = C_L^\gamma[F + c\phi_0]$$

для любой постоянной c , где ϕ_0 – вакуумное состояние.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что неотрицательная определенность влечет условную неотрицательную определенность. Нетрудно также видеть, что достаточность первого условия вытекает из второго утверждения: если при фиксированном γ произвести замену $F(\alpha) \rightarrow \tilde{F}(\alpha) = F(\alpha) - (KF)(\gamma)\phi_0(\alpha)$, то $K\tilde{F}(\gamma) = 0$, так что из второго утверждения имеем $C_L^\gamma[F] = C_L^\gamma[\tilde{F}]$, что гарантирует достаточность условной неотрицательной определенности.

Второе утверждение проверяется прямым вычислением с учетом того, что $L(\eta, \emptyset) = 0$:

$$\begin{aligned} C_L^\gamma[F + c\phi_0] &= C_L^\gamma[F] + \sum_{\alpha, \beta, \eta \subset \Gamma} I_{\Omega(\gamma)}(\eta) \{ (cL(\eta, \alpha)I_\eta(\alpha)\bar{F}(\alpha) + \bar{c}L(\eta, \beta)I_\eta(\beta)F(\beta)) \\ &\quad - (\bar{c}L(\eta, \alpha)I_\eta(\alpha)F(\alpha) + cL(\eta, \beta)I_\eta(\beta)\bar{F}(\beta)) \} + |c|^2 \cdot 0 = C_L^\gamma[F], \end{aligned}$$

где слагаемые со знаком плюс получены из первого члена квадратичной формы *carré du champ*, а слагаемые со знаком минус – из второго и третьего.

Вопрос об исчерпывающей характеристизации структуры условно неотрицательно определенных операторов $\hat{L}$, порождающих неотрицательно определенные квадратичные формы *carré du champ*, остается открытым. Мы рассмотрим достаточно широкий класс таких операторов. Пусть $\Lambda(\eta, \nu)$ и $V(\eta, \nu)$ – неотрицательные функции на $\Gamma \times \Gamma$ и $\Gamma \times X$ соответственно, $\omega \in \Gamma$ – некоторая конфигурация и

$$L^\omega(\eta, \xi) = \sum_{\nu \subset \omega} \{ \Lambda(\eta, \nu) I_\nu(\xi) - \sum_{x \in \omega} V(\eta, \nu) I_\xi(\nu) \} = (C\Lambda(\eta, \cdot))(\xi) - (KV(\eta, \cdot))(\xi) \quad (28)$$

при условии, что соответствующему оператору $\hat{L}$ можно придать смысл на множестве $B_{bs}(\Gamma_0)$. Дополнительно будем предполагать, что выполнено условие

$$\sum_{\nu \in \gamma_L} \Lambda(\eta, \nu) = V(\eta, \emptyset), \quad (29)$$

которое эквивалентно условию $L(\gamma, \emptyset) = 0$ или $\hat{L}\phi_0(\gamma) = 0$ и в дальнейшем изложении является необходимым для того, чтобы полугруппа, порождаемая оператором $\hat{L}$, сохраняла вакуум. Условие (29) влечет неположительность символа $L(\eta, \xi)$ и его монотонное убывание как функция числа точек в конфигурации $|\xi|$: $\sum_{\nu \in \gamma_L} V(\eta, \nu) I_\xi(\nu) \geq V(\eta, \emptyset) = \sum_{\nu \in \gamma_L} \Lambda(\eta, \nu) \geq \sum_{\nu \in \gamma_L} \Lambda(\eta, \nu) I_\nu(\xi)$.

ЛЕММА 4. *Оператор C_L^γ , отвечающий символу (28), является условно неотрицательно определенным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая тождества

$$I_\nu(\alpha \cup \beta) = I_\nu(\alpha) I_\nu(\beta), \quad I_{\alpha \cup \beta}(x) = I_\alpha(x) + I_\beta(x) - I_\alpha(x) I_\beta(x), \quad |x| = 1, \quad (30)$$

найдем значение квадратичной формы $C_L^\gamma[G]$ на векторах, удовлетворяющих условию $KG(\gamma) = 0$. Оно равно сумме неотрицательных квадратичных форм ранга 1:

$$\begin{aligned} C_L^\gamma[G] &= \sum_{\alpha, \beta, \eta \subset \gamma} L(\eta, \alpha \cup \beta) \overline{G}(\alpha) G(\beta) I_\eta(\alpha) I_\eta(\beta) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \eta \subset \gamma} \sum_{\nu \in \gamma_L} \{ \Lambda(\eta, \nu) I_\nu(\alpha) I_\nu(\beta) + V(\eta, \nu) I_\alpha(\nu) I_\beta(\nu) \} I_\eta(\alpha) \overline{G}(\alpha) I_\eta(\beta) G(\beta) \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

5. Заключение. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия положительной определенности матриц с булевыми индексами. Эти условия использованы для характеристики необходимых условий, которым должен удовлетворять класс эволюционных уравнений, разрешающие операторы которых действуют как автоморфизмы в конусе корреляционных функций вероятностных мер в бесконечномерных конфигурационных пространствах. Основные наблюдения состоят в том, что классы неотрицательно определенных матриц с булевыми индексами описываются в терминах вполне монотонных и абсолютно монотонных функций, а генераторы уравнений, сохраняющих конус корреляционных функций мер, имеют структуру, аналогичную генераторам вполне положительной марковской эволюции на алгебрах фон Неймана.

Авторы выражают благодарность администрации Университета Билефельда и Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова за гостеприимство при организации научных обменов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kondratiev Yu. G., Kuna T. Harmonic analysis on configuration space I. General theory. SFB 256. Preprint № 626. Univ. of Bonn, 1999.
- [2] Kondratiev Yu. G., Kuna T. Harmonic analysis on configuration space. I. General theory // Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability. 2002. V. 5. №2. P. 201–233.
- [3] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. P. 241–256.
- [4] Bogoliubov N. N. Problems of the Dynamical Theory in Statistical Physics. Moscow: Gostekhizdat, 1946.
- [5] Pastur L. A. Spectral theory of Kirkwood–Saltsberg equations in finite volume // Theor. Math. Phys. 1974. V. 18.
- [6] Zagrebnov V. A. On the solutions of correlation equations for classical continuous systems // Physica. A. 1981. V. 199. P. 403–424.
- [7] Маслов В. П., Таривердиев С. Э. Асимптотика уравнения Колмогорова–Феллера для системы большого числа частиц // Итоги науки и техники. Теор. вероятн., матем. статистика, теор. кибернетика. Т. 19: ВИНТИ АН СССР, 1982. С. 85–125.
- [8] Маслов В. П., Чеботарев А. М. О случайных полях, отвечающих цепочкам Боголюбова, Власова, Больцмана // ТМФ. 1983. Т. 54. №1. С. 78–88.
- [9] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I // Arch. Rational Mech. Anal. 1975. V. 59. P. 219–239.
- [10] Nazin G. I. Method of the generating functional // J. Sov. Math. 1985. №31. P. 2859–2886.
- [11] Fichtner K.-H., Freudenberg W. Characterization of states of infinite boson systems. I. On the construction of states of boson system // Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 315–357.
- [12] Kondratiev Yu. G., Kuna T., Oliveira M. J. Analytic aspects of Poissonian white noise analysis // Methods of Functional Analysis in Topology. 2002. V. 8. №1. P. 15–48.
- [13] Kondratiev Yu. G., Kuna T. Correlation functionals for Hibbs measures and Ruelle bounds // Methods of Functional Analysis in Topology. 2003. V. 9. №1. P. 9–58.
- [14] Kondratiev Yu. G., Kuna T., Kutoviy O. On relations between a priori bounds for measures on configuration spaces // Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability. 2004. V. 7. №2. P. 195–213.
- [15] Kondratiev Yu. G., Kuna T., Oliveira M. J. On the relations between Poissonian white noise analysis and harmonic analysis on configuration space // J. Funct. Anal. 2004. V. 213. №1. P. 1–30.
- [16] Berezanskii Yu. M., Kondratiev Yu. G., Kuna T., Lytvinov E. On a spectral representation for correlation measures in configuration space analysis // Methods of Functional Analysis. 1999. V. 5. №4. P. 87–100.
- [17] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967.
- [18] Widder D. V. The Laplace Transform. Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.
- [19] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
- [20] Mazet O. A characterization of Markov property for semigroups with invariant measure // Potential Analysis. 2002. V. 16. P. 279–287.
- [21] Lindblad G. On generators of quantum dynamical semigroups // Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119–130.

(А.М. Чеботарев)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: a.m.chebotarev@newmail.ru
 (Ю.Г. Кондратьев)
 Университет Билефельда
E-mail: Kondrat@mathematik.Uni-Bielefeld.DE

Поступило
 08.07.2004
 Исправленный вариант
 01.12.2005