Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ладоскин, A_∞ -модули над A_∞ -алгебрами и когомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 717–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 17:49:11

A_∞ -МОДУЛИ НАД A_∞ -АЛГЕБРАМИ И КОГОМОЛОГИИ КОМПЛЕКСА ХОХШИЛЬДА ДЛЯ МОДУЛЕЙ НАД АЛГЕБРАМИ

М. В. Ладоскин

Решается задача построения коцепного комплекса Хохшильда $S^*(A, M)$ для левого градуированного модуля M над градуированной алгеброй A , гомологии которого отвечали бы за возможность существования нетривиальных структур A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй на данном модуле.

Библиография: 9 названий.

В работе [1] при рассмотрении цепных комплексов A_∞ -пространств Сташеффом было введено понятие A_∞ -алгебры. Это понятие в настоящее время является важным инструментом в различных вычислительных задачах алгебраической топологии и гомологической алгебры. Например, в работе [2] понятие A_∞ -алгебры было использовано для описания гомологий дифференциальных алгебр. В частности, в [2] было показано, что на гомологиях любой заданной над полем дифференциальной алгебры имеется структура градуированной A_∞ -алгебры. Кроме того, в [2] было показано, что для любого заданного над полем дифференциального градуированного модуля над дифференциальной алгеброй на когомологиях этого модуля имеется структура градуированного A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй. С другой стороны, в работах [3] и, позднее в [4], была установлена связь между множеством всех структур A_∞ -алгебры на фиксированной градуированной алгебре и когомологиями Хохшильда, рассмотренными в [5], [6], этой алгебры. В частности, в указанных выше работах [4], [3] было показано, что равенство нулю когомологий Хохшильда в соответствующих размерностях означает, что на рассматриваемой алгебре имеется с точностью до изоморфизма только структура тривиальной градуированной A_∞ -алгебры.

В предлагаемой работе решается задача построения коцепного комплекса Хохшильда $S^*(A, M)$ для левого градуированного модуля M над градуированной алгеброй A , гомологии которого отвечали бы за возможность существования нетривиальных структур A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй на данном модуле. Основным результатом работы является утверждение (теорема 3.2) о том, что равенство нулю когомологий указанного выше комплекса Хохшильда $S^*(A, M)$ в размерностях $(n, 1 - n)$, т.е. равенство $H^{n, 1-n}(S^*(A, M)) = 0$, означает, что на A -модуле M с точностью до изоморфизма имеется только структура тривиального градуированного A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй.

Отметим, что в данной работе знаки во всех формулах написаны с учетом стандартного правила знаков при вычислении тензорного произведения отображений на тензорном произведении элементов.

1. Комплекс Хохшильда для модулей над алгебрами. Пусть A – градуированная алгебра над полем с умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, для которого выполнено условие ассоциативности $\pi(1 \otimes \pi) = \pi(\pi \otimes 1)$. Напомним, следуя [5], определение комплекса Хохшильда для алгебры A . *Коцепной комплекс Хохшильда* $(C^*(A, A), \delta)$ определяется следующим образом:

$$C^*(A, A) = \sum C^n(A, A), \quad C^n(A, A) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, A), \quad (1)$$

кограничный оператор $\delta: C^n(A, A) \rightarrow C^{n+1}(A, A)$ задается формулой

$$\delta f = \pi(1 \otimes f) + \sum (-1)^{n+i} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes 1) + (-1)^{n+1} \pi(f \otimes 1), \quad (2)$$

в которой суммирование идет по местам с номером i , на которых стоит π . Гомологии комплекса $(C^*(A, A), \delta)$ называются *когомологиями Хохшильда* и обозначаются $\text{Hoch}^*(A, A)$. Дифференциал δ положим согласованным с фильтрацией комплекса Хохшильда степенями отображений, т.е. $\delta: C^{n,k}(A, A) \rightarrow C^{n+1,k}(A, A)$, где $C^{n,k}(A, A) = \text{Hom}^k(A^{\otimes n}, A)$.

В работе [6] рассматриваются следующие умножения в комплексе Хохшильда:

$$f \cup g = \pi(f \otimes g),$$

$$f \cup_1 g = \sum (-1)^{(n+m)i + (m-1)(i-1)} f(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g \otimes 1 \cdots \otimes 1),$$

где $f \in C^m(A, A)$, $g \in C^n(A, A)$, суммирование идет по местам с номером i , на которых стоит g . Там же устанавливается связь между ними и умножением в комплексе Хохшильда.

Пусть теперь (M, μ) – левый градуированный модуль над алгеброй (A, π) , где структурное отображение $\mu: A \otimes M \rightarrow M$ для модуля M удовлетворяет условию $\mu(1 \otimes \mu) = \mu(\pi \otimes 1)$.

По аналогии с комплексом Хохшильда алгебры, описывающим многоместные операции на алгебре, построим комплекс, отвечающий за подобные операции в случае модуля над алгеброй. Этот новый комплекс назовем *комплексом Хохшильда для модуля M над алгеброй A* и будем обозначать $S^*(A, M)$. Определим $S^*(A, M) = \sum_{n,k} S^{n,k}(A, M)$, где $S^{n,k}(A, M) = \text{Hom}^k(A^{\otimes n} \otimes M, M)$. Дифференциал $\delta: S^{n,k}(A, M) \rightarrow S^{n+1,k}(A, M)$ определяется формулой

$$\delta f = (-1)^{n+1} \mu(1 \otimes f) + \sum (-1)^{i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1) + f(1 \otimes \cdots \otimes \mu). \quad (3)$$

Покажем, что определяемое формулой (3) отображение является дифференциалом:

$$\delta(\delta f) = (-1)^{n+2} \mu(1 \otimes \delta f) + \sum (-1)^{i+n+2} \delta f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1) + \delta f(1 \otimes \cdots \otimes \mu);$$

учитывая формулу (3), получим

$$\begin{aligned}
 \delta(\delta f) = & f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(1 \otimes \mu)) + (-1)^{n+1} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes \mu)) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes \mu) + (-1)^{n+2} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes \mu)) \\
 & + (-1)^{n+2+n+1} \mu(1 \otimes \mu(1 \otimes f)) \\
 & + (-1)^{n+2} \sum (-1)^{n+i+2} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1)) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes \mu) \\
 & + (-1)^{(n+1)+(n+2)} f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(\pi \otimes 1)) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2+n+2} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1)) \\
 & + (-1)^{n+3+n+1} \mu(\pi \otimes f) + \sum (-1)^{(i+n+2)+(k+n+1)} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2+i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi(\pi \otimes 1) \otimes \cdots \otimes 1) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2+(i-1)+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi(1 \otimes \pi) \otimes \cdots \otimes 1) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2+(k-1+n+1)} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1),
 \end{aligned}$$

где суммирование идет по местам с номером i и k , на которых стоит π . После сокращения слагаемых, отличающихся только знаками, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \delta(\delta f) = & f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(1 \otimes \mu)) - \mu(1 \otimes \mu(1 \otimes f)) - f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(\pi \otimes 1)) \\
 & + \mu(\pi \otimes f) + \sum (-1)^{i+n+2+i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi(\pi \otimes 1) \otimes \cdots \otimes 1) \\
 & + \sum (-1)^{i+n+2+(i-1)+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi(1 \otimes \pi) \otimes \cdots \otimes 1).
 \end{aligned}$$

Учитывая согласованность действия μ модуля с умножением π в алгебре, а также ассоциативность умножения, получим следующее равенство:

$$\delta(\delta f) = 0,$$

что и требовалось показать.

На комплексе Хохшильда для модулей $S^*(A, M)$ введем умножение, которое по аналогии с умножением в комплексе Хохшильда для алгебр также будем обозначать $\cup$. Для элементов $f \in S^{n,k}(A, M)$, $g \in S^{m,t}(A, M)$ определим элемент $f \cup g \in S^{n+m,t+k}(A, M)$ следующей формулой:

$$f \cup g = (-1)^{(n+m-2)(m-1)} f(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g). \quad (4)$$

Легко видеть, что $\cup$ -умножение ассоциативно, т.е. $(f \cup g) \cup h = f \cup (g \cup h)$. Кроме того, $\cup$ -умножение удовлетворяет формуле Лейбница

$$\delta(f \cup g) = -\delta f \cup g + (-1)^n f \cup \delta g. \quad (5)$$

Покажем справедливость этой формулы. Рассмотрим левую часть формулы (5):

$$\begin{aligned}
 \delta(f \cup g) &= (f \cup g)(1 \otimes \cdots \otimes \mu) + (-1)^{n+m+1} \mu(1 \otimes (f \cup g)) \\
 &\quad + \sum (-1)^{i+n+m+1} (f \cup g)(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \\
 &= (-1)^{(n+m-2)(m-1)} f(1 \otimes \cdots \otimes g(1 \otimes \cdots \otimes \mu)) \\
 &\quad + (-1)^{(n+m+1)+(n+m-2)(m-1)} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes g)) \\
 &\quad + \sum (-1)^{i+n+m+1+(n+m-2)(m-1)} f(1 \otimes \cdots \otimes g(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1)).
 \end{aligned}$$

Правая часть примет вид

$$\begin{aligned}
 (-1)(\delta f \cup g) &= (-1)(-1)^{(n+m-1)(m-1)} \delta f(1 \otimes \cdots \otimes g) \\
 &= (-1)((-1)^{(n+m-1)(m-1)} f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(1 \otimes g)) \\
 &\quad + \sum (-1)^{(n+m-1)(m-1)+i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi \otimes 1 \otimes \cdots \otimes g) \\
 &\quad + (-1)^{(n+m-1)(m-1)+(n+1)} \mu(1 \otimes f(1 \otimes \cdots \otimes g))); \\
 (-1)^n (f \cup \delta g) &= (-1)^n ((-1)^{(n+m-1)m} f(1 \otimes \cdots \otimes \delta g)) \\
 &= (-1)^n ((-1)^{(n+m-1)m} f(1 \otimes \cdots \otimes g(1 \otimes \cdots \otimes \mu)) \\
 &\quad + (-1)^{(n+m-1)m+(m+1)} f(1 \otimes \cdots \otimes \mu(1 \otimes g)) \\
 &\quad + \sum (-1)^{(n+m-1)m+i+n+m+1} f(1 \otimes \cdots \otimes g(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1))).
 \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для правой и левой частей формулы (5), убеждаемся в ее справедливости.

Отметим теперь, что комплекс Хохшильда $C^*(A, A)$ для алгебр действует на комплексе Хохшильда $S^*(A, M)$ для модулей над алгебрами. Опишем структурное отображение $\cup_1: S^*(A, M) \otimes C^*(A, A) \rightarrow S^*(A, M)$ этого действия. Для элементов $f \in S^{m,k}(A, M)$ и $\alpha \in C^{n,t}(A, A)$ определим элемент $f \cup_1 \alpha \in S^{m+n-1,t+k}(A, M)$, полагая

$$f \cup_1 \alpha = \sum (-1)^{i(n-1)+m+n-3} f(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \alpha \otimes \cdots \otimes 1). \quad (6)$$

Действие $\cup_1$ согласовано с $\cup$ -умножением в комплексе Хохшильда для модулей над алгебрами:

$$(f \cup g) \cup_1 \alpha = (-1)^n f \cup (g \cup_1 \alpha) + (f \cup_1 \alpha) \cup g. \quad (7)$$

Доказательство формулы (7) основывается на разбивке суммы $\sum (f \cup g)(1 \otimes \cdots \otimes \alpha \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$, которая стоит слева в формуле (7), на две части, каждая из которых отвечает за одно из слагаемых в правой части этой формулы.

2. Когомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами. Напомним основные определения, связанные с понятием скрещивающих коцепей в комплексе Хохшильда для алгебр [7].

Скрещивающей коцепью назовем элемент

$$a = a^{3,-1} + a^{4,-2} + \cdots + a^{i,2-i} + \cdots,$$

где $a^{i,2-i} \in C^{i,2-i}(A, A)$, удовлетворяющий условию $\delta a = a \cup_1 a$. Здесь $\cup_1$ — умножение в комплексе Хохшильда для алгебр. Множество всех скрещивающих коцепей обозначим $T\omega(A, A)$.

Следуя [8], две скрещивающие коцепи a и a' будем называть *эквивалентными*, если существует элемент $p = p^{2,-1} + p^{3,-2} + \dots + p^{i,1-i} + \dots$, где $p^{i,1-i} \in C^{i,1-i}(A, A)$, такой, что

$$a - a' = \delta p - p \cup_1 a + (-1)^{\dim a' - 1} a' \cup_1 p + (-1)^{\dim a' - 2} a' \cup_1 (p \otimes p) + \dots.$$

Множество $T\omega / \sim$, где $\sim$ — указанное выше отношение эквивалентности, обозначается $D(A, A)$. В работе [3] доказывается, что если $\text{Hoch}^{n,2-n}(A, A) = 0$ для любого $n > 2$, то $D(A, A) = 0$.

Проведем аналогичные построения для комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами $S^*(A, M)$. Пусть a — фиксированная коцепь из комплекса Хохшильда для алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Элемент вида $m = m^{2,-1} + m^{3,-2} + \dots + m^{i,1-i} + \dots$, $m^{i,1-i} \in S^{i,1-i}(A, M)$, будем называть *a -элементом*, если

$$-\delta m = m \cup m + m \cup_1 a, \quad (8)$$

где умножения $\cup, \cup_1$ определены формулами (4), (6). Множество всех a -элементов будем обозначать $T\omega(a)(A, M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Два a -элемента m и m' будем называть *эквивалентными* и обозначать $m \sim m'$, если существует элемент $t = t^{1,-1} + t^{2,-2} + \dots + t^{i,-i} + \dots$, $t^{i,-i} \in S^{i,-i}(A, M)$, такой, что

$$m - m' = \delta t + t \cup_1 a + m' \cup t + t \cup m. \quad (9)$$

Указанное отношение между a -элементами является отношением эквивалентности. Покажем это.

1. *Рефлексивность.* Легко видеть, что $m \sim m$. Роль элемента t , осуществляющего эквивалентность, выполняет нулевой элемент комплекса S^* .

2. *Симметричность.* Покажем, что если $m \sim m'$, то $m' \sim m$. Пусть $t = t^{1,-1} + t^{2,-2} + \dots + t^{i,-i} + \dots$ осуществляет первую эквивалентность. Определим элемент $t' = t'^{1,-1} + t'^{2,-2} + \dots + t'^{i,-i} + \dots$, осуществляющий вторую эквивалентность, т.е. удовлетворяющий соотношению

$$\begin{aligned} m'^{n,1-n} - m^{n,1-n} &= \delta t'^{n-1,1-n} + \sum_k t'^{k,-k} \cup_1 a^{n-k+1,1-n+k} \\ &+ \sum_k m^{k,1-k} \cup t'^{n-k,k-n} + \sum_k t'^{k,-k} \cup m'^{n-k,1+k-n}, \end{aligned} \quad (10)$$

рекуррентной формулой $t'^{1,-1} = t^{1,-1}$, $t'^{n,-n} = t^{n,-n} + \sum_{i=1}^{n-1} t'^{i,-i} \cup t^{n-i,i-n}$, или, в безындексной форме,

$$t' = -t + t' \cup t. \quad (11)$$

Так как $m - m' = -(m' - m)$, необходимо показать справедливость равенства $\delta t' + t' \cup_1 a + m \cup t' + t' \cup m' = \delta t + t \cup_1 a + m' \cup t + t \cup m$ (здесь мы использовали безындексную форму записи для сокращения выражения). После преобразования левой части последней формулы, заменяя t' согласно (10), (11) и используя формулы (5), (7), получим

$$\begin{aligned} & \sum_j ((-1)^{j+1} \delta t'_j \cup t_{i-j} + t'_j \cup \delta t_{i-j}) \\ & - \sum_{j,k} ((-1)^k (t'_k \cup_1 a_{i-j+1}) \cup t_{j-k} + t'_k \cup (t_{j-k} \cup_1 a_{i-j+1})) \\ & - \sum_j (-1)^j m_j \cup t_{i-j} + \sum_{k,j} (-1)^{j+k} m_j \cup (t'_k \cup t_{i-j-k}) + \sum_j t_j \cup m'_{i-j} \\ & - \sum_{k,j} (-1)^k (t'_k \cup t_{j-k}) \cup m'_{i-j} + \sum_j (-1)^j m'_j \cup t_{i-j} - \sum_j t_j \cup m_{i-j}. \end{aligned}$$

В полученное равенство подставим выражения для δt , $\delta t'$ из (9), (10) и после сокращения слагаемых, отличающихся знаками, получим выражение

$$\sum_j (t'_j + t_j + \sum_k (-1)^k t'_k \cup t_{j-k}) \cup m'_{i-j} - \sum_j (t'_j + t_j + \sum_k (-1)^k t'_k \cup t_{j-k}) \cup m_{i-j},$$

которое согласно формуле (10) равно нулю, что и требовалось показать.

3. *Транзитивность.* Покажем, что если $m' \sim m$, $m'' \sim m$, то $m'' \sim m$. Если t' , t'' осуществляют соответственно первую и вторую эквивалентность, то искомым элементом $t = t' + t'' - (-1)^{\dim t' + \dim t''} t' \cup t''$. Доказательство проводится прямым вычислением с учетом формул (5), (7), (10), (11).

Введем обозначение $D(A, M) = T\omega(a)(A, M)/\sim$, где $\sim$ — описанное выше отношение эквивалентности. Сформулируем следующее предложение, которое нам понадобится далее.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $m \in T\omega(a)(A, M)$ и $p^{n,-n} \in S^{n,-n}(A, M)$, то можно построить a -элемент $\overline{m}$, удовлетворяющий следующим условиям:*

- 1) $m^{i,1-i} = \overline{m}^{i,1-i}$, $i < n+1$;
- 2) $\overline{m}^{n+1,-n} = m^{n+1,-n} + \delta p^{n,-n}$;
- 3) $\overline{m} \sim m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим $\overline{m} \sim m$, причем элементом p , доставляющий эквивалентность между m и $\overline{m}$, будет $p = 0 + \dots + p^{n,-n} + 0 + \dots$. Рассмотрим формулу (9) по размерностям. В размерностях, меньших n , правая часть формулы (9) будет равна нулю, что равносильно выполнению условия 1). В размерности $(n+1, -n)$ получим $\overline{m}^{n+1,-n} - m^{n+1,-n} = \delta p^{n,-n}$, что и требуется в условии 2). В размерности $(n+2, -n-1)$ будем иметь $\overline{m}^{n+2,-n-1} = m^{n+2,-n-1} + p^{n,-n} \cup_1 a^{3,-1} + m^{2,-1} \cup p^{n,-n} + p^{n,-n} \cup \overline{m}^{2,-1}$. Продолжая этот процесс, получим в размерности $(n+j, -n-j+1)$ следующее выражение:

$$\overline{m}^{n+j,-n-j+1} = m^{n+j,-n-j+1} + p^{n,-n} \cup_1 a^{1+j,-j+1} + m^{j,-j+1} \cup p^{n,-n} + p^{n,-n} \cup \overline{m}^{j,-j+1}.$$

Для доказательства предложения остается лишь заметить, что в полученной формуле для $\overline{m}^{n+j,-n-j+1}$ участвуют ранее определенные $\overline{m}^{j,-j+1}$.

Сформулируем теорему о связи когомологий комплекса Хохшильда для модулей над алгеброй и структуры множества a -элементов этого комплекса.

ТЕОРЕМА 2.2. Если $H^{n,-n+1}(S^*(A, M)) = 0$ при $n > 1$, то $D(A, M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать, что произвольный a -элемент при данных условиях будет эквивалентен нулевому. Рассмотрим формулу (8) по размерностям. В размерности $(3, -1)$ в левой части формулы (8) будет присутствовать только $\delta m^{2,-1}$, поэтому $\delta m^{2,-1} = 0$, т.е. $m^{2,-1}$ — коцикл. Но тогда, поскольку по условию $H^{n,-n+1}(S^*(A, M)) = 0$, существует $p^{1,-1} \in S^{1,-1}(A, M)$ такой, что $m^{2,-1} = \delta p^{1,-1}$, или $m^{2,-1} = 0 = \delta p^{1,-1}$. Согласно теореме 2.1 мы можем построить a -элемент $\overline{m}$ такой, что $\overline{m}^{2,-1} = 0$ и $m \sim \overline{m}$. Но тогда в размерности $(4, -2)$ $\delta \overline{m}^{3,-2} = \overline{m}^{2,-1} \cup_1 a^{3,-1} + \overline{m}^{2,-1} \cup \overline{m}^{2,-1}$ или, так как $\overline{m}^{2,-1} = 0$, $\delta \overline{m}^{3,-2} = 0$, то $\overline{m}^{3,-2}$ — коцикл. Так как $H^{3,-2}(S^*(A, M)) = 0$, существует $p^{2,-2}$ такой, что $\overline{m}^{3,-2} = 0 = \delta p^{2,-2}$, и мы получаем ситуацию, аналогичную ранее полученной. Повторяя предыдущие построения, получим последовательность a -элементов, эквивалентных начальному произвольному, но имеющих в нескольких начальных размерностях нули. На последнем шаге получим нулевой a -элемент, эквивалентный исходному, причем эквивалентность осуществляется элементом $p = p^{1,-1} + p^{2,-2} + \dots$, где элемент $p^{i,-i}$ определяется равенством $\delta p^{i,-i} = m^{i+1,-i}$, получаемым на i -м шаге указанного выше процесса.

3. A_∞ -модули над A_∞ -алгебрами и когомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами. Напомним определения, связанные с понятиями градуированной A_∞ -алгебры и градуированного A_∞ -модуля над градуированной A_∞ -алгеброй [1]. Во всех формулах в данном пункте суммирование ведется, кроме указанного, также по местам с номером k , на которых стоят операции внутри скобок.

A_∞ -алгеброй называется градуированный модуль A , снабженный набором операций $\{m_i\}: A^{\otimes i} \rightarrow A$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} m_i((A^{\otimes i})_q) &\subset A_{q+i-2}, \quad i \geq 2, \\ \sum_j (-1)^{(j+1)(k+1)+i} m_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Морфизмом из A_∞ -алгебры $(A, \{m_i\})$ в A_∞ -алгебру $(A', \{m'_i\})$ называется семейство гомоморфизмов $\{f_i: A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} f_i((A^{\otimes i})_q) &\subset A'_{q+i-1}, \quad i \geq 1, \\ \sum_j (-1)^{(i-1)+(i-1)(k+1)} f_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) \\ &+ \sum_{k_1+\dots+k_t=i} (-1)^{k_2+k_4+\dots} m'_t(f_{k_1} \otimes \dots \otimes f_{k_t}). \end{aligned} \quad (13)$$

A_∞ -модулем над A_∞ -алгеброй $(A, \{m_i\})$ называется градуированный модуль M , снабженный набором действий $\{p_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M\}$, $i \geq 1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} p_i((A^{\otimes i} \otimes M)_q) &\subset M_{q-i+1}, \\ \sum_j (-1)^{k(j+1)+i} p_{i-j+1}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \dots \otimes 1) \\ &+ \sum_j (-1)^{(i-1)(j-1)} p_{i-j}(1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes p_j) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Морфизмом A_∞ -модулей $(M, \{p_i\})$ и $(M', \{p'_i\})$ соответственно над A_∞ -алгебрами $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ называется пара семейств гомоморфизмов $\{f_i: A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, $\{g_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M'\}$, $i \geq 0$, где $\{f_i\}$ – морфизм A_∞ -алгебр, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_i(A^{\otimes i} \otimes M)_q &\subset M'_{q-i}, \\ \sum (-1)^{k(j-1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ &+ \sum (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes p_j) \\ &+ \sum_{k_1+\cdots+k_t=i+1} (-1)^{k_2+k_4+\cdots} p'_t(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_{t-1}} \otimes g_{k_t}). \end{aligned} \quad (15)$$

Формулы (12), (14) называются соотношениями *Сташеффа* соответственно для градуированных A_∞ -алгебр и градуированных A_∞ -модулей над градуированными A_∞ -алгебрами.

В [4] дается метод вычисления функтора Берикашвили [9], а именно доказано, что между множеством структур A_∞ -алгебры на фиксированной биградуированной алгебре и подкомплексом гомологий Хохшильда в размерности -1 существует биекция. С другой стороны, в [3] показано, что между множеством структур A_∞ -алгебры на фиксированной градуированной алгебре, обозначаемым $(A, \pi)(\infty)$, т.е. структур, для которых $m_1 = 0$, $m_2 = \pi$, где π – умножение в алгебре, и множеством скрещивающих коцепей комплекса Хохшильда, профакторизованному по отношению эквивалентности $\sim$, для которых вводится обозначение $D(A, A)$, существует биекция (с точностью до изоморфизма A_∞ -алгебр).

Проведем аналогичные [3] построения для A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами и a -элементов комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами. Рассмотрим множество всех структур градуированного A_∞ -модуля над фиксированной A_∞ -алгеброй, существующих на левом модуле M над данной алгеброй A с нулевым дифференциалом. Данное множество мы будем обозначать $(A, M, \mu)(\infty)$, где M – модуль над алгеброй A , $\mu: A \otimes M \rightarrow M$ – структурное отображение модуля M . Два элемента этого множества будем называть эквивалентными, если существует морфизм A_∞ -модулей, нулевая компонента g_0 которого является тождественным отображением. Докажем справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1. *Множества $(A, M, \mu)(\infty)$ и $D(A, M)$ биективны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент $(M, \{p_i\}) \in (A, M, \mu)(\infty)$ есть A_∞ -модуль над A_∞ -алгеброй с фиксированным $p_1 = \mu$. Если обозначить $\tilde{p} = p_2 + p_3 + \cdots$, то легко заметить, что условие (8) из определения a -элемента в комплексе Хохшильда для модулей над алгебрами $S^*(A, M)$ совпадает с соотношениями Сташеффа для A_∞ -модуля (14), где $a \in D(A, A)$ – скрещивающая коцепь из комплекса Хохшильда для алгебр, которая соответствует данной A_∞ -алгебре. Справедливо и обратное: каждый a -элемент определяет $\tilde{p}$, т.е. структуру A_∞ -модуля на M . Для завершения доказательства осталось показать, что две структуры A_∞ -модулей эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие им a -элементы. Докажем это. Пусть два элемента $(M, \{p_i\})$ и $(M, \{p'_i\}) \in (A, M, \mu)(\infty)$ эквивалентны, т.е. существует морфизм из $(M, \{p_i\})$ в $(M, \{p'_i\})$, нулевая компонента g_0 которого тождественное отображение. Так

как исходная структура A_∞ -алгебры одна и та же, отображения $\{f_i\}$ из формул (13), (15) имеют вид

$$f_1 = \text{id}, \quad f_i = 0 \quad \text{при } i > 1.$$

Учитывая все вышесказанное, условие (15) можно будет записать в виде

$$\begin{aligned} g_i(A^{\otimes i} \otimes M)_q &\in M'_{q-i}, \\ \sum (-1)^{k(j-1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ &+ \sum (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes p_j) \\ &+ \sum (-1)^{i+1} p'_t(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes g_{k_t}), \end{aligned}$$

где $p_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M$, $p'_i: A^{\otimes i} \otimes M' \rightarrow M'$ — действия A_∞ -модулей, $g_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M'$ — отображение A_∞ -модулей. Разобьем суммирование на части, отделяя слагаемые, соответствующие малым размерностям:

$$\begin{aligned} \sum_{j>2} (-1)^{k(j-1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ + \sum_k (-1)^{k+i} g_{i-1}(1 \otimes \cdots \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes 1) + \sum_{j>1} (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes p_j) \\ + (-1)^i g_{i-1}(1 \otimes \cdots \otimes p_1) + (-1) g_i(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes p_0) + g_0(p_i \otimes 1) \\ + \sum_{s=2}^{i-1} (-1)^{i-1} p'_s(1 \otimes \cdots \otimes g_{i-s}) + p'_1(1 \otimes g) + p'_i(1 \otimes \cdots \otimes g_0) + p'_0(g_i). \end{aligned}$$

Заметим, что $g_0 = \text{id}$, $p_0 = p'_0 = 0$, поскольку M и M' совпадают как градуированные модули. Кроме того, $p_1 = p'_1 = \mu$, поскольку структура A_∞ -модуля согласована со структурой градуированного модуля, и $m_2 = \pi$, поскольку структура A_∞ -алгебры согласована со структурой градуированной алгебры. Применяя эти замечания к последнему выражению, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j>2} (-1)^{k(j-1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ + \sum_k (-1)^{k+i} g_{i-1}(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1) \\ + \sum_{j>1} (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes p_j) + (-1)^i g_{i-1}(1 \otimes \cdots \otimes \mu) \\ + \sum_{s=2}^{i-1} (-1)^{i-1} p'_s(1 \otimes \cdots \otimes g_{i-s}) + \mu(1 \otimes g). \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя формулы (3), (5), (6), получим запись для (16) в сокращенном виде с учетом введенных обозначений

$$\sum_j g_{i-j+1} \cup_1 m_j + \delta g_{i-1} \sum_k g_{i-k} \cup p_k - p_i + p'_i + \sum_s p'_s \cup g_{i-s} = 0.$$

Поскольку индекс i выбирался произвольно, полученное равенство означает, вследствие (9), что $p \sim p'$ как a -элементы, причем эквивалентность осуществляется элементом g . Обратное утверждение доказывается аналогично, только вместо разбиения сумм из (15) придется дополнять соотношения (9), пользуясь свойствами ассоциативной алгебры и модуля над ней.

Из теоремы 3.1 и теоремы 2.2 вытекает

ТЕОРЕМА 3.2. *Если гомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами $H^{n,1-n}(S^*(A, M)) = 0$ при $n > 1$, то любая структура A_∞ -модуля на M над фиксированной A_∞ -алгеброй A эквивалентна тривиальной.*

Приведем пример, показывающий применение теоремы 3.2 в вычислениях.

Рассмотрим кольцо многочленов от двух переменных над полем $\mathbb{Z}_2$, обозначаемое $\mathbb{Z}_2[x, y]$ как модуль над алгеброй многочленов от одной переменной $\mathbb{Z}_2[x]$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Структурное действие

$$\mu: \mathbb{Z}_2[x] \otimes \mathbb{Z}_2[x, y] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x, y]$$

зададим на образующих формулой

$$\mu(x^k \otimes x^t y^q) = x^{k+t} y^q. \quad (17)$$

Исследуем вопрос о существовании структуры A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй с тривиальной структурой $\mathbb{Z}_2[x]$ на рассматриваемом модуле $\mathbb{Z}_2[x, y]$. Пусть отображение $f \in S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])$, причем $\delta f = 0$. Покажем, что в этом случае найдется элемент $h \in S^{*-1}(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])$ такой, что $\delta h = f$. Определим $h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^t y^q) = f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^t y^q)$. Докажем, что при этом условии $\delta h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^t y^q) = f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^t y^q)$. Учитывая, что π — обычное умножение многочленов в алгебре $\mathbb{Z}_2[x]$, т.е. $\pi(x^k \otimes x^n) = x^{k+n}$, а μ определяется формулой (17), применим формулу (3). Будем подразумевать, для краткости, что $x^{n+k} y^q = \mu(x^n \otimes x^k y^q) = x^n (x^k y^q)$,

$$\begin{aligned} \delta h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) &= x^{k_1} h(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &\quad + h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^{k_n + k_{n+1}} y^q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} h(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i + k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^n \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &= x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) + f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n-1}} \otimes x^{k_n + k_{n+1}} y^q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i + k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^n \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &= x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i + k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &= f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что $\delta f = 0$; в частности,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} y^q) = x^{k_1} f(x^{k_2} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} y^q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_i + k_{i+1}} \otimes \dots \otimes x^{k_{n+1}} y^q) + f(x^{k_1} \otimes \dots \otimes x^{k_n} \otimes x^{k_{n+1}} y^q). \end{aligned}$$

Приведенные вычисления показывают, что для любого $f \in \text{Ker } \delta^n$ существует $h \in S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])$ такое, что $\delta h = f$. Таким образом, получаем, что

$$H^n(S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])) = 0$$

при $n > 1$. Так как $H^n(S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])) = \bigoplus_i H^{n,i}(S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y]))$, справедливо $H^{n,1-n}(S^*(\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2[x, y])) = 0$. Применяя к полученному результату теорему 3.1, получим, что на $\mathbb{Z}_2[x, y]$ существует, с точностью до изоморфизма A_∞ -модулей, только тривиальная структура A_∞ -модуля.

В заключение покажем, как введением некоторых дополнительных структур на комплексе Хохшильда для модулей описывается соответствие между a -элементами, у которых скрепляющие коцепи различны, хотя и лежат в одном классе эквивалентности.

На комплексе Хохшильда для модулей действует не только сам комплекс Хохшильда для алгебр, но и его тензорные степени $C^{\otimes n}$. Мы будем обозначать это действие $\cup_1$ по аналогии с введенным во втором пункте. Опишем это новое действие. Пусть $C^*(A, A)$ – комплекс Хохшильда для алгебр, $S^*(A, M)$ – комплекс Хохшильда для модулей и $p_1, p_2, \dots, p_k \in C^8(A, A)$, $m \in S^*(A, M)$; тогда

$$m \cup_1 (p_1 \otimes p_2 \otimes \dots \otimes p_k) = \sum m((1 \otimes \dots \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_k) \otimes \dots \otimes 1). \quad (18)$$

Пусть $a, a' \in C^*(A, A)$, причем a и a' – эквивалентные коцепи в комплексе Хохшильда, т.е. $a, a' \in [a]$, где $[a] \in D(A, A)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $m \in S^*(A, M)$ – a -элемент и $m' \in S^*(A, M)$ – a' -элемент. Будем называть a -элемент $m \in S^*(A, M)$ и a' -элемент $m' \in S^*(A, M)$ эквивалентными и записывать $m \sim m'$, если существует $t \in S^{i,-i}(A, M)$ такой, что

$$\begin{aligned} m - m' &= \delta t - t \cup_1 a - t \cup m + (-1)^\alpha (m' \cup_1 p) \cup t \\ &\quad + (-1)^\alpha (m' \cup_1 (p \otimes p)) \cup t + (-1)^\alpha (m' \cup_1 (p \otimes p \otimes p)) \cup t + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

где α – номер места, на котором происходит вставка первого p , а p – элемент, осуществляющий эквивалентность $a \sim a'$.

Можно показать, что данное отношение является отношением эквивалентности. Если теперь множество всех a -элементов и a' -элементов таких, что $a \sim a'$, обозначить $T\omega([a])(A, M)$, то по аналогии с предыдущими обозначениями будем записывать $D^*(A, M)$ вместо $T\omega([a])(A, M)/\sim$.

Рассмотрим множество всех структур A_∞ -модуля над изоморфными A_∞ -алгебрами, причем алгебры и модули совпадают как градуированные объекты, и обозначим это множество $(A, M, \mu)^*(\infty)$. На множестве $(A, M, \mu)^*(\infty)$ имеется отношение эквивалентности – изоморфизм A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 2.2.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Множество $(A, M, \mu)^*(\infty)/\sim$ и множество $D^*(A, M)$ изоморфны.

Автор выражает благодарность Лапину С. В. за помощь в данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stasheff J. D. Homotopy associativity of H -space, 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. №2. P. 275–313.
- [2] Кадеишвили Т. В. К теории гомологий расслоенных пространств // УМН. 1980. Т. 35. №3(213). С. 183–188.
- [3] Kadeishvili T. A_∞ -algebra structure and cohomology of Hochschild and Harrison // Proc. of Tbil. Math. Inst. 1988. V. 91. P. 19–27.
- [4] Смирнов В. А. A_∞ -структуры и функтор D // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №5. С. 145–162.
- [5] Barr M. Harrison homology, Hochschild homology and triples // J. Algebra. 1968. V. 8. P. 314–323.
- [6] Gerstenhaber M. The homology structure of an associative ring // Ann. of Math. 1963. V. 4. P. 267–288.
- [7] Brown E. Twisted Tensor Products // Ann. of Math. 1959. V. 69. P. 223–246.
- [8] Смирнов В. А. Функтор D для скрещенных тензорных произведений // Матем. заметки. 1976. Т. 20. №4. С. 465–472.
- [9] Берикашвили Н. А. Дифференциалы спектральной последовательности // Тр. Тбил. Матем. ин-та им. А. М. Размадзе. 1976. Т. 51. С. 1–105.

Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарева

Поступило
01.07.2003
Исправленный вариант
23.06.2005