Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Левенштам, Равномерная экспоненциальная дихотомия параболических операторов с быстро осциллирующими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 729–735

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 07:52:40

УДК 517.937

РАВНОМЕРНАЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Левенштам

Работа посвящена усреднению параболических уравнений. Доказан результат о сохранении экспоненциальной дихотомии без предположения о почти-периодичности коэффициентов.

Библиография: 7 названий.

В работах [1], [2] (см. также [3, гл. XI]) метод усреднения обоснован для параболических уравнений с быстро осциллирующими во времени старшими коэффициентами. При этом развитая в [1], [2] методика непосредственно применима для параболических задач в ограниченных пространственных областях, так как в ней используется компактность соответствующих операторов вложения пространств. В связи с этим для параболических уравнений произвольного порядка во всем пространстве метод усреднения отдельно обоснован в [4], где на коэффициенты уравнения пришлось наложить условие почти периодичности. Последнее условие играет важную роль в доказательстве теоремы 1 [4] о равномерной экспоненциальной дихотомии (ЭД) соответствующего линейного оператора. Позже [5] мы другим путем (не используя, в отличие от [4], один известный результат об индексе оператора, изучение доказательства которого требует существенных усилий) установили критерий ЭД параболических операторов с почти периодическими коэффициентами. Далее, в монографии [6, гл. XI, § 6] теорема о равномерной ЭД и вытекающий из нее принцип усреднения установлены для параболических уравнений второго порядка во всем пространстве без предположения почти периодичности коэффициентов. В данной работе мы снимаем условие почти периодичности и в теореме 1 [4], налагая, правда, взамен требование дополнительной гладкости коэффициентов. Изложенное здесь доказательство теоремы о равномерной ЭД опирается на равномерные априорные оценки для линейных параболических уравнений произвольного порядка [4, лемма 3] и результат об их разрешимости всюду в $C(\mathbb{R}^{n+1})$. При выводе последнего мы следуем доказательству предложения 4 из [3, гл. XI, § 6].

Доказанная в данной работе теорема позволяет, следуя [4], установить результаты об усреднении линейных, полулинейных и квазилинейных параболических уравнений

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 01-01-00678, 06-01-00287-а, и научной программы “Университеты России”, грант УР.04.01.029.

произвольного порядка во всем пространстве без предположения о почти периодичности их коэффициентов. Однако здесь на этих результатах мы не останавливаемся.

Автор глубоко благодарен В. В. Жикову за полезное обсуждение результатов данной работы.

1. Пусть m и n – натуральные числа, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное вещественное арифметическое пространство, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная точка в нем. Через $C^r = C_x^r(\mathbb{R}^n)$, $C^{r,\gamma} \equiv C_{x,t}^{r,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$ и $C^{r,\gamma,0} \equiv C_{x,t,\tau}^{r,\gamma,0}(\mathbb{R}^{n+2})$, $r \geq 0$, $0 \leq \gamma \leq 1$, будем обозначать гёльдеровы пространства вещественных¹ функций $u(x)$, $u(x, t)$ и $u(x, t, \tau)$ с естественными нормами.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$L_\omega u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x, t, \omega t) D^\alpha u = f(x, t), \quad (1)$$

зависящее от параметра $\omega \gg 1$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс длины $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha \equiv D_x^\alpha = \partial^{\alpha_1} / \partial x_1^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} / \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n} / \partial x_n^{\alpha_n}$, $a_\alpha(x, t, \tau) \in C^{\gamma_0, \gamma_0/2m, 0}$, $f \in C^{\gamma_0, 0}$, $0 < \gamma_0 \leq 1$. Предположим, что для уравнения (1) выполнено условие равномерной параболичности, т. е. при некотором $\delta > 0$ для всех векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ и $(x, t, \tau) \in \mathbb{R}^{n+2}$ имеет место неравенство

$$(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x, t, \tau) \sigma^\alpha > \delta |\sigma|^{2m},$$

где $\sigma^\alpha = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}$. Пусть, кроме того, существуют производные $\frac{\partial^{\ell_0}}{\partial t^{\ell_0}} D^\ell a_\alpha(x, t, \omega t)$ при $2m\ell_0 + |\ell| \leq 2m + n$ и $\frac{\partial^{\ell_0}}{\partial t^{\ell_0}} D^{(\ell+\alpha)} a_\alpha(x, t, \omega t)$ при $2m\ell_0 + |\ell| \leq 2m$, которые при каждом фиксированном $\omega > 0$ удовлетворяют условию Гёльдера относительно $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Далее, пусть функции $a_\alpha(x, t, \tau)$ имеют равномерные средние по τ , т. е. равномерно относительно $(x, t, s) \in \mathbb{R}^{n+2}$ существуют не зависящие от s пределы

$$\bar{a}_\alpha(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_s^{s+N} a_\alpha(x, t, \tau) d\tau, \quad |\alpha| \leq 2m, \quad (2)$$

и это же условие пусть выполнено для всех производных $D^\beta a_\alpha(x, t, \tau)$, $\beta \leq \alpha$, где последнее неравенство мультииндексов понимается как такое же неравенство их соответствующих координат.

Наряду с дифференциальным выражением $L_\omega u$ рассмотрим формально сопряженное выражение

$$L_\omega^* v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x, t, \tau) v) \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x, t, \tau) D^\alpha v.$$

Дифференциальные выражения

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \bar{a}_\alpha(x, t) D^\alpha \quad \text{и} \quad L^* = -\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \bar{b}_\alpha(x, t) D^\alpha$$

¹Это условие принято лишь для определенности; при рассмотрении комплекснозначных функций ход рассуждений не меняется.

называются *усредненными* (по отношению к L_ω и L_ω^* соответственно).

Напомним определение экспоненциальной дихотомии параболических операторов. Предварительно заметим, что в данной работе рассматриваются только классические решения параболических уравнений. В частности, мы рассматриваем классические ограниченные во всем пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ решения уравнения (1) при $f \in C^{\gamma_0, 0}$. При этом иногда удобно говорить о действующем в $C^{\gamma_0, 0}$ в соответствии с формулой (1) параболическом операторе L_ω с областью определения $D(L_\omega) = \{u \in C^{\gamma_0, 0}: L_\omega u \in C^{\gamma_0, 0}\}$. В аналогичном смысле мы понимаем и другие упоминаемые в работе параболические операторы: L , L^* и т. д.

Говорят, что оператор L_ω (значение параметра ω фиксировано) обладает экспоненциальной дихотомией (ЭД) на временной оси $t \in \mathbb{R}$, если для любого $t \in \mathbb{R}$ пространство $C^0 \equiv C(\mathbb{R}^n)$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $N_{\omega, 1}(t)$ и $N_{\omega, 2}(t)$: $C^0 = N_{\omega, 1}(t) \oplus N_{\omega, 2}(t)$ и существует такая пара положительных чисел c_1, c_2 , что при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ для решений $u(x, t)$, $t \geq t_0$ уравнения $L_\omega u = 0$ выполняются следующие утверждения:

- d_1) если $u(x, t_0) \in N_{\omega, i}(t_0)$, то $u(x, t) \in N_{\omega, i}(t)$, $t \geq t_0$, $i = 1, 2$;
- d_2) если $u(x, t_0) \in N_{\omega, 1}(t_0)$, то при $t \geq t_0$ выполняется оценка

$$\|u(x, t)\|_{C^0} \leq c_1 \|u(x, t_0)\|_{C^0} \exp[-c_2(t - t_0)];$$

- d_3) если $u(x, t_0) \in N_{\omega, 2}(t_0)$, то существует единственное продолжение до решения $u(x, t)$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченного на луче $t \leq t_0$ по норме C^0 , и при этом справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{C^0} \leq c_1 \|u(x, t_0)\|_{C^0} \exp[-c_2(t_0 - t)].$$

Если постоянные c_1, c_2 в оценках $d_2), d_3)$ при $\omega > \omega_0 = \text{const}$ можно выбрать не зависящими от ω , то говорят, что семейство L_ω , $\omega > \omega_0$ обладает *равномерной* ЭД.

ТЕОРЕМА 1. Пусть усредненный оператор L обладает ЭД. Тогда существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ справедливы следующие утверждения:

1. семейство L_ω , $\omega > \omega_0$, обладает равномерной экспоненциальной дихотомией;
2. если все решения $v(x, t)$, $t \geq t_0$, уравнения $Lv = 0$ при каком-нибудь (a , значит, и любом) $t_0 \in \mathbb{R}$ ограничены по норме C^0 , то при $\omega > \omega_0$ $N_{\omega, 2}(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$;
3. если хотя бы одно решение $v(x, t)$, $t \geq t_0$, уравнения $Lv = 0$ не ограничено по норме C^0 , то при $\omega > \omega_0$ $N_{\omega, 2}(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Заметим, что если $N_2(t_0)$ — подпространство C^0 , имеющее тот же смысл, что и $N_{\omega, 2}(t_0)$, но связанное с оператором L , то условия п.п. 2 и 3 теоремы эквивалентны соответственно условиям: $N_2(t_0) = 0$ и $N_2(t_0) \neq 0$.

Пункты 2, 3 данной теоремы следуют из одноименных пунктов [4, теорема 1], поскольку при доказательстве последних почти периодичность коэффициентов оператора L_ω не использовалась. Доказательству п. 1 посвящена остальная часть работы.

2. Нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Существуют такие числа ω_1 и k , что при $\omega > \omega_1$ справедлива следующая оценка решений $u_\omega \in C^{0,0}$ уравнения (1):*

$$\|u_\omega\|_{C^{0,0}} \leq k \|f\|_{C^{\gamma_0,0}}. \quad (3)$$

Лемма 1 справедлива в силу леммы 3 работы [4], поскольку при доказательстве последней почти периодичность коэффициентов не использовалась.

ЛЕММА 2. *Существует такое значение ω_2 , что при $\omega > \omega_2$ для любой правой части $f \in C^{\gamma_0,0}$ существует единственное решение $u_\omega \in C^{0,0}$ уравнения (1).*

Доказательство этой леммы следует доказательству предложения 4 [3, гл. XI, § 6] и изложено в п. 4. В п. 3 содержатся некоторые вспомогательные результаты.

3. В дальнейшем нам понадобится более сильная, нежели (3), априорная оценка. Именно, из неравенства (3) и шаудеровских априорных оценок [6] (см. также [4, формула (1.21)]) вытекает оценка

$$\|u_\omega\|_{C^{2m+\gamma_1,\gamma_1}} \leq k_1 \|f\|_{C^{\gamma_0,0}}, \quad \omega > \omega_1, \quad (4)$$

где $\gamma_1 \in [0, \gamma_0]$, k_1 — не зависящая от ω и f постоянная.

В работе [2] использовались понятия локальной сходимости и локального замыкания для различных подмножеств векторов соответствующих пространств. Например, говорят, что $f_m \xrightarrow{\text{лок.}} f$ в $C^{0,0}$, если последовательность $\{f_m\}$ ограничена в $C^{0,0}$ и для любой гладкой финитной функции $\varphi(x, t)$ справедливо соотношение $\|\varphi(f_m - f_0)\|_{C^{0,0}} \rightarrow 0$.

Докажем, что область значений $R(L_\omega)$ оператора L_ω , $\omega > \omega_1$, не только замкнута (что легко следует из (4)), но и локально замкнута в $C^{\gamma_0,0}$. Для произвольного $N > 0$ введем функцию

$$\psi_N(x, t) = \varphi_N(t) \varphi_N(x_1) \dots \varphi_N(x_n),$$

где $\varphi_N: R \rightarrow [0, 1]$ — такая гладкая функция, что $\varphi_N(s) = 1$ при $s \in [-N, N]$, $\varphi_N(s) = 0$ при $s \notin [-2N, 2N]$ и при некоторой $c_0 = \text{const} > 0$ и всех $s \in \mathbb{R}$ справедливы оценки $|\varphi_N^{(k)}(s)| \leq c_0 N^{-k}$, $0 \leq k \leq 2m$. Пусть $L_\omega u = f$. Тогда для $v = \psi_N u$ имеем равенство

$$L_\omega v = \psi_N f - \frac{\partial \psi_N}{\partial t} u + M_x(\psi_N)u, \quad (5)$$

где $M_x(\psi_N)u$ — дифференциальное выражение относительно u порядка $2k - 1$, коэффициенты которого, очевидно, ограничены по норме $C^{0,0}$ величиной $c_1 N^{-1}$, где c_1 — некоторая, не зависящая от N , постоянная. Отсюда и из соотношений (4), (5) вытекает оценка

$$\sup_{\substack{|x_i| \leq N, |t| \leq N \\ i=1, \dots, n}} |u(x, t)| \leq c \left(\sup_{\substack{|x_i| \leq 2N, |t| \leq 2N \\ i=1, \dots, n}} |f(x, t)| + \frac{1}{N} \|f\|_{C^{\gamma_0,0}} \right). \quad (6)$$

Пусть $L_\omega u_m = f_m$ и $f_m \xrightarrow{\text{лок.}} f$ в $C^{\gamma_0,0}$. Тогда из оценки (6) следует, что $u_m \xrightarrow{\text{лок.}} u_0$ в $C^{0,0}$, где u_0 — некоторая функция в $C^{0,0}$. Переходя к пределу при фиксированных (x, t) в обеих частях равенства

$$u_m(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\omega(t, 0, x, \xi) u_m(\xi, 0) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^m} G_\omega(t, \tau, x, \xi) f_m(\xi, \tau) d\xi, \quad (7)$$

где $G_\omega(t, \tau, x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения $L_\omega u = 0$, получим равенство $L_\omega u_0 = f_0$, т.е. $f_0 \in R(L_\omega)$.

Заметим теперь, что из регулярности оператора L следует регулярность оператора L^* . Это вытекает из предложений 3 и 4 [3, гл. XI, § 6], которые мы переформулируем применительно к нашей ситуации и снабдим номерами 1 и 2 соответственно. Предварительно напомним два определения.

Оператор L называется *корректным*, если существует такая постоянная $k > 0$, что для всех $u \in D(L)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{C^{\gamma_0,0}} \leq k \|Lu\|_{C^{\gamma_0,0}}.$$

Оператор L называется *слабо регулярным*, если его образ совпадает с $C^{\gamma_0,0}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3, с. 196]. Если L слабо регулярен, то уравнение $L^*u = 0$ не имеет ненулевых решений в $C^{0,0}$, так что L^* корректен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [3, с. 197]. Если оператор L^* корректен и уравнение $Lu = 0$ не имеет ненулевых решений в $C^{0,0}$, то L^* регулярен.

Доказательство предложения 2 можно провести точно так же, как ниже, в п. 4, регулярность оператора L_ω выведена из его корректности и тривиальности ядра оператора L_ω^* .

Докажем предложение 1, внося в соответствующее доказательство [3] необходимые изменения. Пусть $L^*g = 0$, $0 \neq g \in C^{\gamma_0,0}$. Обозначим через $\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow [0, 1]$ гладкую нечетную функцию такую, что $\psi(s) = 1$ при $s \geq 1$. Пусть

$$g^\varepsilon(x, t) = g(x, t) \exp \left[-\varepsilon \left(\int_0^t \psi(s) ds + \int_0^{x_1} \psi(s) ds + \dots + \int_0^{x_n} \psi(s) ds \right) \right].$$

Тогда g^ε является нетривиальным решением уравнения вида

$$\hat{L}^* g^\varepsilon \equiv L^* g^\varepsilon + \varepsilon P_{2m-1}(x, t, \varepsilon) g^\varepsilon = 0,$$

где $P_{2m-1}(x, t, \varepsilon)$ — дифференциальное выражение относительно x порядка $2m - 1$ с гладкими и ограниченными по $(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1}$ коэффициентами. Пусть $Q_{2m-1}(x, t, \varepsilon)$ — формально сопряженное (с $P_{2m-1}(x, t, \varepsilon)$) дифференциальное выражение. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вместе с L слабо регулярным является и оператор

$$\hat{L} = L + \varepsilon Q_{2m-1}(x, t, \varepsilon),$$

и пусть $u^\varepsilon \in C^{\gamma_0,0}$ — решение уравнения $\hat{L}u = g^\varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Теперь заметим, что в силу известной [6] априорной оценки решения задачи Коши из ограниченности решения g ($g \in C^{0,0}$) следует ограниченность и его производных $D^\alpha g$, $|\alpha| \leq 2k - 1$, а поэтому $D^\alpha g^\varepsilon(x, t) \rightarrow 0$ при $|x|, |t| \rightarrow \infty$. Отсюда согласно формуле Грина получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\hat{L}u^\varepsilon g^\varepsilon) dx dt = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (u^\varepsilon \hat{L}^* g^\varepsilon) dx dt,$$

т.е. $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (g^\varepsilon)^2 dx dt = 0$, или $g^\varepsilon = 0$, $g = 0$. Итак, доказано, что ядро оператора L^* тривиальное, а поскольку он замкнут, то по теореме Банаха корректен.

4. Перейдем к непосредственному доказательству леммы 2. Из установленной в начале пункта 3 локальной замкнутости $R(L_\omega)$ в $C^{0,0}$ следует, что лемма 2 будет доказана, если установить, что $R(L_\omega)$, $\omega \gg 1$, содержит все бесконечно дифференцируемые финитные в $\mathbb{R}^{n+1}$ функции. Предположим противное и пусть f_0 — гладкая финитная функция, не принадлежащая $R(L_\omega)$ при некотором $\omega > \omega_2$, где ω_2 — такое число, что при $\omega > \omega_2$ для решений уравнения (1) выполнена оценка (3) и того же типа оценка для решений аналогичного (так как L^* регулярен) уравнения $L_\omega^* u = f$. Обозначим через $\bar{L}_\omega$ замыкание оператора L_ω , как оператора в $C^{0,0}$. Существование такого замыкания вытекает из обычного интегрального представления решений уравнения $L_\omega u = f$ с помощью фундаментального решения задачи Коши. Из этого же интегрального представления с применением известных оценок [6] фундаментального решения методом “от противного” выводится корректность оператора $\bar{L}_\omega$:

$$\|u\|_{C^{0,0}} \leq c_\omega \|\bar{L}_\omega u\|_{C^{0,0}}, \quad c_\omega = \text{const}, \quad u \in R(\bar{L}_\omega),$$

а затем и замкнутость $R(\bar{L}_\omega)$ в $C^{0,0}$. При этом $f_0 \notin R(\bar{L}_\omega)$, так как в противном случае в силу гладкости f_0 имели бы $f_0 \in R(L_\omega)$. Введем теперь функционал $g \in (C^{0,0})^*$ такой, что

$$g(R(\bar{L}_\omega)) = 0, \quad g(f_0) \neq 0. \quad (8)$$

Представим g в виде обобщенной производной (см., например, [7, п. 6.26]). Для этого на множестве C_0 непрерывных финитных в $\mathbb{R}^{n+1}$ функций v определим функционал

$$g_1(v) = g\left(\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} v(\xi, \tau) d\xi d\tau\right). \quad (9)$$

Так как $g \in (C^{0,0})^*$, из (9) следует, что g_1 продолжается до ограниченного функционала на $L_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Поэтому существует функция $F \in L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ такая, что

$$g_1(v) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x, t) v(x, t) dx dt, \quad v \in C_0. \quad (10)$$

Полагая в равенствах (9), (10) $v(\xi, \tau) = \partial^{n+1} w(\xi, \tau) / \partial \tau \partial \xi_1 \dots \partial \xi_n$, где w — непрерывно дифференцируемая финитная функция, получим

$$g(w) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x, t) \frac{\partial^{n+1} w(x, t)}{\partial t \partial x_1 \dots \partial x_n} dx dt. \quad (11)$$

Отсюда в силу равенства (8) для всех гладких финитных функций $\varphi(x, t)$ вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x, t) \frac{\partial^{n+1}}{\partial t \partial x_1 \dots \partial x_n} L_\omega \varphi(x, t) dx dt = 0.$$

Последнее в соответствии с [6, с. 214] означает, что функция $F_1(x, t) = \frac{\partial^{n+1} F}{\partial t \partial x_1 \dots \partial x_n}$ является обобщенным решением уравнения

$$L_\omega^* v = 0 \quad (12)$$

в пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$. В силу наших предположений о гладкости коэффициентов a_α согласно [6, гл. II, теорема 5.2] F_1 является и классическим решением уравнения (12), причем (см. [6, с. 215]) для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ при $|t - t_0| \leq 1$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо представление

$$F_1(x, t) = - \int_t^{t_0+2} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi, \tau) \frac{\partial^{n+1}}{\partial \tau \partial \xi_1 \dots \partial \xi_n} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(\xi, \tau) D_\xi^\alpha \right] \times Z(\tau, t, \xi, x) [\alpha(\xi - x, \tau - t) - 1] d\xi, \quad (13)$$

где $Z(t, \tau, x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения $L_\omega u = 0$, а $\alpha(x, t)$ — гладкая функция, равная 1 в некоторой окрестности точки $(x, t) = 0$ и равная нулю при $|x| > 1$, $|t| > 1$. Так как $F \in L_\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, из (13) следует, что функция F_1 равномерно ограничена на $\mathbb{R}^{n+1}$, причем согласно соотношениям (8), (11) $F_1 \neq 0$. Таким образом пришли к противоречию с тем, что уравнение (12) при $\omega > \omega_2$ не имеет ненулевых решений в $C^{0,0}$ (поскольку в силу наших предположений о коэффициентах b_α уравнения $L_\omega^* u = f$ для него справедлива априорная оценка (3)). Лемма 2 и теорема 1 доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жиков В. В. Принцип усреднения для параболических уравнений с переменной главной частью // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208. № 1. С. 32–35.
- [2] Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. С. 1380–1408.
- [3] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [4] Левенштам В. Б. Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 4. С. 813–851.
- [5] Левенштам В. Б. Об однозначной разрешимости параболических уравнений с почти периодическими коэффициентами в пространствах Гельдера // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 6. С. 861–877.
- [6] Эйдельман С. Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.
- [7] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Ростовский государственный университет,
Южный научный центр РАН

Поступило
13.11.2003
Исправленный вариант
14.06.2004