Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Редкозубов, Предельные множества отображения окружности, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 736–742

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2745>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:18:32

УДК 517.9

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

В. В. Редкозубов

Предложен прием, позволяющий редуцировать некоторые вопросы динамики отображения окружности в себя к соответствующим вопросам отображения отрезка в себя. В частности, таким образом получены ответы на два вопроса Блока и Коппеля.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Данная статья посвящена одномерной топологической динамике. В последние годы появилось множество работ по динамике отображений графов. Одна из причин значительного продвижения в этой области заключена в том, что граф обладает следующим топологическим свойством, тесно связанным с общеизвестной теоремой о промежуточном значении: малая окрестность точки разбивается этой точкой, в то время как для многообразий высших размерностей окрестность после выкалывания точки остается связной. В случае отрезка теория становится еще более содержательной, так как помимо указанного свойства отрезок упорядочен. Таким образом, актуальна проблема: какие свойства динамическая система приобретает, а какие свойства остаются неизменными при замене отрезка более “сложным” графом? В настоящей работе мы отвечаем на два поставленных в книге [1, с. 227, 230] вопроса о сохранении на окружности S^1 свойств предельного множества, известных в случае отрезка. Используемый нами прием позволяет переносить на окружность и другие результаты.

Пусть $f: X \rightarrow X$ является непрерывным отображением компактного метрического пространства X в себя, $f^0 = \text{id}$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Для точки $x \in X$ определим множество $\gamma(x, f) = \{f^n(x)\}_{n \geq 0}$, называемое *траекторией* или *орбитой* точки x . Традиционно топологическая динамика изучает такие асимптотические инварианты как возвращение и разбегание траекторий. При изучении этих характеристик весьма полезным оказывается рассмотрение предельных точек траектории точки x — ее ω -предельного множества. Обозначим объединение $\bigcup_{x \in X} \omega(x, f)$ всех таких множеств через $\Lambda(f)$. Понятие ω -предельного множества тесно связано со следующей формой возвращения траекторий. Точка $x \in X$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности $U \ni x$ существует $n > 0$ такое, что $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Пусть $\Omega(f)$ обозначает множество всех неблуждающих точек. Очевидно, что $\Omega(f)$ замкнуто и $\Omega(f) \supseteq \Lambda(f)$. Приведем важнейшие примеры неблуждающих точек. Точка $y \in X$ называется *рекуррентной*, если $y \in \omega(y, f)$, т.е. $y = \lim f^{n_k}(y)$ для некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$. Если к тому же выполняется равенство $f^n(y) = y$ для некоторого $n > 0$, то y называется *периодической*. Множества всех рекуррентных и периодических точек f обозначим через

$R(f)$ и $P(f)$ соответственно. Обозначим через $h(f)$ энтропию отображения f (определение см., например, в [1]).

2. Основная теорема.

ЛЕММА 1 [1, предложение 1.IV]. Пусть H – связное подмножество компактного метрического пространства X и $E = \bigcup_{k \geq 0} f^k(H)$. Тогда связными компонентами E являются либо множества $f^k(H)$, $k \geq 0$, либо найдутся такие $m \geq 0$ и $p > 0$, что связными компонентами E будут $f^k(H)$, $0 \leq k < m$, и $E_j = \bigcup_{k \geq 0} f^{m+j+kp}(H)$, $0 \leq j < p$.

Пусть K и P промежутки, т.е. множества, гомеоморфные связным подмножествам $\mathbb{R}$, такие, что $P \subset K$, $P \cap g^k(P) \neq \emptyset$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и отображения $g \in C(K, K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что P является *промежутком монотонного типа* (для g), если пересечения с P траекторий точек из P образуют (строго) монотонные последовательности одного и того же типа, т.е. если $x \in P$, $g^k(x) \in P$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ и $y \in P$, $g^n(y) \in P$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, то $(g^n(y) - y)(g^k(x) - x) > 0$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [1, лемма 9.IV]).

ЛЕММА 2. Если в промежутке P нет периодических точек отображения g , то P является промежутком монотонного типа.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $f \in C(S^1, S^1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть I и J – собственные подотрезки S^1 . Будем говорить, что I *накрывает* J , если найдутся такой отрезок $L \subseteq I$ и число $m \in \mathbb{N}$, что $f^m(L) = J$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что отношение “накрывания” на множестве собственных подотрезков S^1 является транзитивным отношением.

Введение понятия “накрывания” мотивировано следующим фактом: если I – накрывающий себя собственный подотрезок S^1 , то в I найдется периодическая точка.

Ориентируем окружность S^1 против часовой стрелки. Следующая лемма известна и широко используется для получения периодических точек (см., например, [2] и [3]).

ЛЕММА 3. Пусть $I = [a, b]$ – собственный подотрезок S^1 . Предположим, что $f(a) = c$, $f(b) = d$ и $c \neq d$. Тогда I накрывает или $[c, d]$, или $[d, c]$.

Непрерывные отображения окружности без периодических точек изучены в работе [4]. В этом случае множество $\Omega(f)$ представляет из себя единственное минимальное множество и рассматриваемые ниже свойства выполняются для него автоматически. Поэтому при изучении неблуждающих точек будем предполагать, что отображение имеет периодические точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть множество $P(f)$ непусто. Если для любой окрестности U точки $s \in S^1$ выполняется равенство $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U) = S^1$, то точка s лежит в $\overline{P(f)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую периодическую точку p . Пусть n есть ее (наименьший) период, а $O(p)$ – ее орбита. Предположим, что при выполнении условий предложения заключение его неверно. Тогда можно выбрать такую окрестность H точки s , что $f^i(H) \cap H = \emptyset$ при $1 \leq i \leq n$ и $H \cap P(f) = \emptyset$. Очевидно точка s является неблуждающей. Тогда найдутся [1, предложение 16.IV] последовательность точек x_k

и последовательность чисел n_k таких, что $x_k \rightarrow c$, $n_k \rightarrow \infty$ и $f^{n_k}(x_k) = c$. Без ограничения общности считаем, что все x_k лежат в H в отрицательном направлении от c и “монотонно” стремятся к c , т.е. точка $x_{k+1} \in [x_k, c]$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Предположим, что множество $\bigcup_{n \geq 0} f^n([x_k, c])$ при некотором k не совпадает со всей окружностью. В этом случае образ $f^{n_k}([x_k, c])$ есть собственное подмножество S^1 , к тому же этот образ невырожден (согласно выбору точек x_k), связан, содержит точку c и не лежит целиком в $[x_k, c]$. Тогда из леммы 3 и отсутствия периодических точек в H вытекает, что отрезок $[x_k, c]$ покрывает некоторый отрезок $[c, b_k]$. Отсюда заключаем $\bigcup_{n \geq 0} f^n([x_k, c]) = S^1$. По лемме 1 найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что множество $\bigcup_{n \geq 0} f^{nm}([x_k, c])$ является промежутком, инвариантным при f^m . Если рассмотреть сужение f^m на этот промежуток, то учитывая, что $\bigcup_{n \geq 0} f^n([x_{k+1}, c])$ совпадает с S^1 , нетрудно получить, что $[x_k, c]$ не может быть отрезком монотонного типа. По лемме 2 в отрезке $[x_k, c]$ имеется периодическая точка для f^m , а следовательно, и для f ; противоречие.

Существуют такие номер k_0 и отрезок $I_0 \subset S^1$, что $f^n(I_0) = [x_{k_0}, c]$ (их существование можно показать, например, рассматривая точки $a_k \in f^{-n}(x_k)$ и пользуясь равномерной непрерывностью f). Рассмотрим цепочку из $n+1$ отрезка $I_0, I_1 = f(I_0), \dots, I_n = f^n(I_0) = [x_{k_0}, c] \subset H$. В силу выбора H построенные отрезки не пересекаются и в их объединении нет точек орбиты $O(p)$. Множество $O(p)$ разбивает окружность S^1 на n дуг; следовательно, в одной из таких дуг содержится, по крайней мере, 2 построенных отрезка, например, I_i и I_j . По доказанному в предыдущем абзаце найдется такое число $l \in \mathbb{N}$, что пересечение $f^l([x_{k_0}, c]) \cap O(p) \neq \emptyset$ и $f^l([x_{k_0}, c])$ содержит точку, лежащую между отрезками I_i и I_j . Поэтому отрезок $[x_{k_0}, c]$ покрывает или I_i , или I_j , а следовательно, и себя. Тогда в $[x_{k_0}, c]$ найдется периодическая точка; противоречие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Собственный подотрезок $I \subset S^1$ называется *периодическим* (периода n), если $f^n(I) = I$ и отрезки $I, \dots, f^{n-1}(I)$ имеют непересекающиеся внутренние. В этом случае множество $\bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(I)$ называется *орбитой* отрезка I .

Из леммы 1 и предложения 1 легко получается наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть множество $P(f)$ непусто. Если неблуждающая точка c не лежит в замыкании периодических точек, то у нее найдется такая окрестность U , что отрезок $\overline{U}$ является периодическим и точка c принадлежит $\Omega(g)$, где g – сужение f^n на $\overline{U}$, а n – период $\overline{U}$.

3. Следствия. Теорема 1 позволяет некоторые результаты по топологической динамике отображений отрезка переносить на окружность буквально. Приведем иллюстрирующие примеры.

Остается в силе критерий Шарковского принадлежности точки $\Lambda(f)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для отображения $f \in C(S^1, S^1)$ точка c принадлежит $\Lambda(f)$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n > 0$ такое, что $(c - \varepsilon, c) \cap f^n(c - \varepsilon, c) \neq \emptyset$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n > 0$ такое, что $(c, c + \varepsilon) \cap f^n(c, c + \varepsilon) \neq \emptyset$;
- 3) $c \in P(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует непосредственно из определения предельной точки. Предположим, что точка c удовлетворяет условию теоремы. Значит, c является неблуждающей точкой. Согласно работе [4] можно считать, что отображение f имеет периодические точки. Из работы [5] вытекает, что $\Lambda(f)$ содержит замыкание $\overline{P(f)}$. Поэтому если $c \in \overline{P(f)}$, то теорема доказана. Если точка $c \notin \overline{P(f)}$, то

используя тот факт, что на отрезке аналогичная теорема справедлива, результат следует по теореме 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть отображение $f \in C(S^1, S^1)$ имеет периодическую точку и $c \in \Omega(f) \setminus \overline{P(f)}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что пересечение $J \cap f^n(J_1) = \emptyset$ для всех $n > 0$, где $J = [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ и J_1 есть один из отрезков $[c, c + \varepsilon]$, $[c - \varepsilon, c]$.

Предложение 2 также редуцируется с помощью теоремы 1 к случаю отрезка (где этот факт известен [1, предложение 19.IV]) и, в свою очередь, дает справедливость на S^1 следующего факта, полученного Нитецки для отрезка.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если отображение f имеет периодическую точку, то множество $\Omega(f) \setminus \overline{P(f)}$ не более чем счетно и нигде не плотно в S^1 .

Следующим утверждением мы отвечаем на поставленный Блоком и Кошпелем вопрос [1, с. 227].

СЛЕДСТВИЕ 3 (Формула Блоха). Для отображения $f \in C(S^1, S^1)$ справедливо равенство

$$\Lambda(f) = \bigcap_{k \geq 0} f^k(\Omega(f)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае отсутствия у отображения f периодических точек утверждение следует из [4]. Поэтому будем предполагать, что $P(f) \neq \emptyset$.

Так как множество $\Lambda(f)$ инвариантно под действием f (см., например, предложение 3), то справедливо включение $\Lambda(f) \subseteq \bigcap_{k \geq 0} f^k(\Omega(f))$. Докажем, что выполняется также и обратное включение. Пусть точка $c \in \bigcap_{k \geq 0} f^k(\Omega(f))$. Если $c \in \overline{P(f)}$, то $c \in \Lambda(f)$ согласно [5] и теорема доказана. Если $c \notin \overline{P(f)}$, то по теореме 1 найдется периодический отрезок I периода $n > 0$, содержащий внутри себя точку c . Учитывая определение неблуждающей точки, отсюда вытекает, что последовательность точек $c_k \in f^{-k}(c) \cap \Omega(f)$, $k = 1, 2, \dots$, целиком лежит в орбите отрезка I , а так как пересечение прообраза $f^{-n}(I)$ с орбитой отрезка I совпадает с I , то $c_{nk} \in I$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому $c \in \bigcap_{k \geq 0} g^k(\Omega(g))$, где g – сужение f^n на I . Так как на отрезке формула Блоха справедлива, заключаем, что c лежит в $\Lambda(g)$, а следовательно, и в $\Lambda(f)$.

4. Отображения окружности малых степеней. Рассмотрим универсальное накрытие $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\pi(t) = e^{2\pi i t}$. Поднятие F отображения f на универсальное накрывающее можно определить как отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойством $f \circ \pi = \pi \circ F$. В дальнейшем нам понадобится следующее свойство поднятия:

$$F(X + m) = F(X) + m \cdot \deg(f), \quad (1)$$

справедливое для произвольного целого m и любой точки $X \in \mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть X и Y – топологические пространства. Отображение $g: Y \rightarrow Y$ называется *фактором* отображения $f: X \rightarrow X$, если существует такое сюръективное непрерывное отображение $\Phi: X \rightarrow Y$, что $\Phi \circ f = g \circ \Phi$. Отображение Φ называется *полуопределением*.

Если отображение f имеет точку периода n , то будем говорить, что у f есть период n .

ЛЕММА 4. *Отображение окружности на себя, у которого в качестве нечетного периода есть только 1, является фактором сужения на инвариантный отрезок некоторого своего поднятия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\deg(f)| > 1$, то у отображения f есть нечетный период больше 1. Поэтому будем предполагать, что $|\deg(f)| \leq 1$. Так как отображение имеет неподвижную точку, можно выбрать поднятие F так, чтобы и оно имело неподвижную точку: найдется точка $p \in [0, 1)$ такая, что $F(p) = p$. Докажем существование у отображения F инвариантного отрезка.

Пусть $\deg(f) = 0$. Так как в этом случае функция F периодична с периодом 1, то выполняется равенство $F(\mathbb{R}) = F([0, 1])$. Положим $A = \min\{F(X) : X \in [0, 1]\}$ и $B = \max\{F(X) : X \in [0, 1]\}$; тогда $F(\mathbb{R}) = F([A, B]) = [A, B]$.

Пусть $|\deg(f)| = 1$. Обозначим через A_n и B_n соответственно левый и правый конец отрезка $F^n[p - 1, p + 1]$. Предположим, что хотя бы одна из последовательностей $\{A_n\}$ или $\{B_n\}$ неограничена.

Пусть $\deg(f) = 1$. Предположим, что неограничена последовательность $\{B_n\}$. Тогда найдется такое натуральное n , что выполняется включение $F^{2n+1}[p - 1, p + 1] \supseteq [p, p + 2]$. Отсюда вытекает наличие точки $Y \in [p - 1, p + 1]$, для которой справедливо равенство $F^{2n+1}(Y) = Y + 1$. Точка $y = \pi(Y)$ удовлетворяет условию $f^{2n+1}(y) = y$. Предположим, что точка y неподвижна. Тогда для некоторого целого k выполнено равенство $F(Y) = Y + k$. Последовательно применяя формулу (1), получаем $F^{2n+1}(Y) = Y + (2n + 1)k$. С другой стороны, $F^{2n+1}(Y) = Y + 1$ и мы приходим к противоречию. Значит, отображение f имеет периодическую точку нечетного периода, которая не является неподвижной. Это противоречит условию. Следовательно, последовательность $\{B_n\}$ ограничена. Аналогично доказывается ограниченность последовательности $\{A_n\}$.

Пусть $\deg(f) = -1$. Из (1) вытекает, что если одна из последовательностей $\{A_n\}$ или $\{B_n\}$ неограничена, то неограничена и другая последовательность, а также существование такого натурального l , что отрезок $[p + l - 1, p + l + 1]$ не пересекается со своим образом и, в частности, не содержит неподвижных точек. Так как справедливо равенство $F^{2n+1}[p + l - 1, p + l + 1] = [A_{2n+1} - l, B_{2n+1} - l]$, для некоторого натурального n выполняется включение $F^{2n+1}[p + l - 1, p + l + 1] \supseteq [p + l - 1, p + l + 1]$, т.е. существует точка $Y \in [p + l - 1, p + l + 1]$ такая, что $F^{2n+1}(Y) = Y$. Точка $y = \pi(Y)$ удовлетворяет условию $f^{2n+1}(y) = y$. Если точка y является неподвижной, то учитывая, что в отрезке $[p + l - 1, p + l + 1]$ нет неподвижных точек, справедливо равенство $F(Y) = Y + k$ для некоторого целого $k \neq 0$. Следуя схеме рассуждений из предыдущего абзаца, приходим к противоречию. Следовательно, отображение f имеет периодическую точку нечетного периода, не являющуюся неподвижной; противоречие с условием. Поэтому последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ ограничены.

Обозначим через $A = \inf A_n$, $B = \sup B_n$. Тогда отрезок $[A, B]$ F -инвариантен: $F([A, B]) = [A, B]$. Так как отображение f является отображением “на”, то длина $[A, B]$ не меньше 1. В качестве полусопряжения Φ возьмем сужение проекции π на инвариантный отрезок.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так как отрезок $[A, B]$ компактен, то сужение $\Phi = \pi|_{[A, B]}$ имеет ограниченную кратность – некоторое число k . Нетрудно заметить, что число k не может быть “большим”. Однако его оценка в дальнейшем не существенна.

Известно [2], что положительность энтропии отображения окружности эквивалентна существованию у него периодов, отношение которых не является степенью 2. Отсюда и из леммы 4 легко получается

ТЕОРЕМА 2. Пусть для отображения окружности на себя множество $P(f)$ непусто. Если энтропия f нулевая, то найдется такое натуральное n , что итерация f^n является фактором сужения на инвариантный отрезок некоторого своего поднятия.

Для доказательства утверждений ниже нам понадобятся основные свойства предельного множества.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. 1) Предельное множество $\omega(x, f)$ непусто, замкнуто и

$$f(\omega(x, f)) = \omega(x, f). \quad (2)$$

2) Для любого натурального i

$$f^i(\omega(x, f^n)) = \omega(f^i(x), f^n). \quad (3)$$

3) Предельные множества отображения f и его n -й итерации f^n связаны соотношением

$$\omega(x, f) = \omega(x, f^n) \cup \omega(f(x), f^n) \cup \dots \cup \omega(f^{n-1}(x), f^n). \quad (4)$$

Указанные свойства выполняются для отображения произвольного компактного метрического пространства в себя. Их доказательство можно найти, например, в [1].

Согласно [2] положительность энтропии отображения окружности влечет существование бесконечного ω -предельного множества, содержащего периодическую точку. В книге [1, с. 230] спрашивается: является ли наличие такого множества достаточным для $h(f) > 0$?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для отображения $f \in C(S^1, S^1)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) энтропия $h(f)$ положительна;
- 2) найдется такая точка $x \in S^1$, что ее предельное множество $\omega(x, f)$ счетно;
- 3) найдется такая точка $x \in S^1$, что ее предельное множество $\omega(x, f)$ бесконечно и содержит периодическую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка того, что из положительности энтропии следует наличие счетного предельного множества получается компиляцией известных фактов (см., например, [2] и [6]).

Проверка того, что из условия 2) следует 3) сводится к применению следующих широко известных фактов из теории динамических систем:

- a) всякое замкнутое инвариантное множество (каким является по формуле (2) $\omega(x, f)$) содержит минимальное подмножество;
- b) минимальное множество в компактном метрическом пространстве либо конечно, либо несчетно;
- c) конечное минимальное множество является периодической орбитой.

Покажем, что условие 3) влечет положительность энтропии.

Предположим, что энтропия $h(f) = 0$ и нашлась такая точка $x \in S^1$, что ее предельное множество $\omega(x, f)$ бесконечно и содержит периодическую точку. Можно считать, что отображение f является отображением “на”, иначе результат следует из справедливости аналогичного утверждения для отрезка [1, предложение 6. VI]. Тогда по теореме 2 найдется такое натуральное n , что отображение $g = f^n$ является фактором сужения некоторого своего поднятия G на инвариантный отрезок.

По формуле (4) $\omega(x, f) = \omega(x, f^n) \cup \dots \cup \omega(f^{n-1}(x), f^n)$; учитывая (3) и то, что в левой части равенства стоит бесконечное множество $\omega(x, f)$, заключаем, что все предельные множества, стоящие в равенстве справа, также бесконечны. Далее, так как множество $\omega(x, f)$ содержит периодическую точку, найдется такое натуральное i , $0 \leq i \leq n-1$, что $\omega(f^i(x), f^n)$ также содержит периодическую точку. Следовательно, отображение g имеет бесконечное предельное множество, содержащее периодическую точку.

Так как кратность полусопряжения ограничена, отображение G также имеет бесконечное предельное множество, содержащее периодическую точку. В этом случае энтропия $h(G) > 0$ [1, предложение 6. VI]. Учитывая равенство $h(f^n) = nh(f)$ и не уменьшение энтропии при полусопряжении, заключаем, что энтропия $h(f)$ также положительна.

В заключение выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю С.А. Богатому за постановку задач и внимательное отношение к моей работе.

После того, как настоящая работа была сдана в печать, автору стал известен замечательный результат – декомпозиционная теорема Блоха [7]. Из него вытекает, что следствия теоремы 1 и предложение 4 (учитывая работу [3]) выполняются для произвольных графов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Block L. S., Coppel W. A. Dynamics in One Dimension. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
- [2] Block L., Coven E., Mulvey I., Nitecki Z. Homoclinic and nonwandering points for maps of the circle // Ergod. Theor. Dynam. Syst. 1983. V. 3. P. 521–532.
- [3] Llibre J., Misiurewicz M. Horseshoes, entropy and periods for graph maps // Topology. 1993. V. 32. №3. P. 649–664.
- [4] Auslander J., Katznelson Y. Continuous maps of the circle without periodic points // Israel. J. Math. 1979. V. 32. P. 375–381.
- [5] Bae J., Yang K. ω -limit sets for maps of the circle // Bull. Korean Math. Soc. 1988. V. 25. P. 233–242.
- [6] Evans M., Humke P., Lee Ch., O'Malley R. Characterizations of turbulent one-dimensional mappings via ω -limit sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 326. №1. P. 261–280.
- [7] Блох А. М. О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. 1, 2, 3 // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1986. Т. 46. С. 8–18; 1986. Т. 47. С. 67–77; 1987. Т. 48. С. 32–46.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило

30.04.2003

Исправленный вариант

18.10.2004