Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Савченко, О числе некритических вершин в сильно связанных орграфах,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 5, 743–755

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:47:52

УДК 519.17

О ЧИСЛЕ НЕКРИТИЧЕСКИХ ВЕРШИН В СИЛЬНО СВЯЗНЫХ ОРГРАФАХ

С. В. Савченко

По определению, вершина w сильно связного (или, просто, сильного) орграфа D является некритической, если подорграф $D - w$ также сильно связан. Доказано, что если минимальная полустепень k исхода (захода) вершин D больше или равна двум, то в нем найдутся, по крайней мере, k некритических вершин. В отличие от неориентированного случая эта оценка не может быть улучшена для фиксированного k даже при большом порядке орграфа. Кроме того, показано, что если степень любой вершины сильного направленного графа порядка n больше или равна $3/4n$, то он содержит, по крайней мере, две некритические вершины. Соответствующее доказательство использует результаты теории максимальных собственных сильных подорграфов, основанной Мадером и в дальнейшем развитой автором. Аналог этой теории построен также для двусвязных (неориентированных) графов.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В почти во всех математических теориях наряду с понятием основного объекта теории (граф, группа, пространство) большую роль играет понятие подобъекта (подграф, подгруппа, подпространство). К сожалению, не всегда подобъект наследует дополнительные свойства исходного объекта. Поэтому имеет смысл выделять подобъекты, обладающие ими, и среди них рассматривать максимальные. В [1] это было сделано по отношению к свойству сильной связности ориентированного графа (орграфа). Цель данной работы – показать, как при помощи теории максимальных собственных сильных подорграфов можно получить обобщения и уточнения некоторых хорошо известных результатов. Основные утверждения этой теории (теоремы А и С, лемма В) читатель найдет в разделе 2.

Все результаты, полученные в работе, представляют собой оценки снизу для числа некритических вершин в сильно связном (в дальнейшем, просто, сильном) орграфе D . Напомним, что вершина w является *некритической* в D , если *вершинно-удаленный* подорграф $D - w$, полученный удалением вершины w и всех инцидентных ей дуг из D , также сильно связан. Аналогичное определение можно ввести и для связного неориентированного графа G . Хорошо известно, что любой такой граф G содержит остовное дерево T и, следовательно, имеет, по крайней мере, две некритические вершины (в частности, любая висячая вершина в T будет некритической как для T , так и для G). Используя это наблюдение в качестве базы индукции, нетрудно показать справедливость следующего утверждения.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

УТВЕРЖДЕНИЕ 0. Пусть G – связный неориентированный граф. Предположим, что степень каждой его вершины больше или равна k . Тогда он имеет по крайней мере $k + 1$ некритических вершин.

В разделе 3 мы докажем аналогичный результат (см. теорему 1) для сильного орграфа D : если минимальная полустепень исхода k его вершин больше или равна двум, то D содержит по крайней мере k некритических вершин. Даже при $k = 2$ (база индукции) доказательство этого утверждения уже не является таким очевидным, как в неориентированном случае, и его справедливость устанавливается при помощи теоремы А. Кроме того, шаг индукции существенно усложняется из-за возможного наличия вершин, полустепени захода которых равны единице.

В разделе 4 для сравнения мы рассмотрим сильный орграф D порядка n , имеющий k вершин с полустепенью исхода, равной $n - 1$, и при помощи стандартных методов теории графов покажем, что он содержит k некритических вершин. Если D имеет ровно k некритических вершин, то он является гамильтоновым орграфом. В свою очередь, при доказательстве этого утверждения будет использована теория максимальных собственных сильных подорграфов.

В разделе 5 предметом нашего изучения будет сильный направленный граф D порядка $n \geq 2$, степени вершин которого больше или равны $3/4n$. В частности, при помощи теоремы А будет показано (см. теорему 2), что в D найдутся, по крайней мере, две некритические вершины. Это утверждение хорошо известно в случае, когда D является сильным турниром порядка $n \geq 4$. Поэтому теорему 2 можно рассматривать как обобщение классического результата теории турниров на более широкий класс орграфов.

В конце нашей работы читатель найдет приложение, посвященное двусвязному (неориентированному) графу G . В нем сначала будет дано описание дополнения максимального собственного двусвязного подграфа в G , очень похожее на теорему А, а затем с его помощью будут передоказаны результаты, полученные ранее разными авторами при помощи различных методов. Кроме того, мы сделаем несколько замечаний о перспективах построения теории максимальных собственных h -связных подграфов в h -связных графах при $h \geq 3$.

2. Необходимые сведения о максимальных собственных сильных подорграфах. Хорошо известно, что терминология, общепринятая в российской литературе по дискретной математике (см. [2], [3]), не всегда совпадает с соответствующей англоязычной терминологией (см. [4]), а иногда они даже полностью противоречат друг другу. Например, термин “directed graph” используется в западной литературе для обозначения того, что мы называем “ориентированным графом”, и, наоборот, наш термин “направленный граф”, дословно переводимый как directed graph, означает “oriented graph” для англоязычного математика. Поэтому естественно, что на протяжении нашей статьи мы будем придерживаться терминологии [2], [3], а в ее английском переводе мы будем следовать определениям из монографии [4].

Итак, пусть D – ориентированный граф (орграф) без петель и параллельных дуг с множеством вершин $V(D)$ и множеством дуг $A(D)$. Обычно мы будем предполагать, что исходный орграф D является *сильным*. Это означает, что для любых двух вершин v и w существует путь в D из v в w . По определению длина наикратчайшего пути орграфа D из v в w является *расстоянием* $d(v, w)$ между v и w . Максимум величины $d(v, w)$ на множестве всех пар вершин v и w в D называется *диаметром* орграфа D . Очевидно,

диаметр любого сильного орграфа, по крайней мере, на единицу меньше его порядка. В дальнейшем мы будем считать, что орграф, состоящий из одной вершины, является сильным, а его диаметр равен нулю.

По определению орграф S является *подорграфом* в D , если его вершины содержатся в $V(D)$, а его дуги принадлежат $A(D)$. Мы будем рассматривать только *порожденные* подорграфы. Это означает, что любая дуга исходного орграфа D , соединяющая вершины S , принадлежит множеству дуг $A(S)$. В этом случае говорят, что подорграф S *порожден* множеством $V(S)$. Если S не совпадает с D , то он – *собственный* подорграф в D . Собственный сильный подорграф S является *максимальным*, если любой сильный подорграф в D , содержащий S , совпадает с S или D . Следующая теорема является критерием максимальности S , использующим только информацию о подорграфе $\bar{S}$, порожденном вершинами, которые не принадлежат S , и дугах, которые соединяют S и $\bar{S}$.

ТЕОРЕМА А [1]. Пусть D – сильный орграф и S – его собственный сильный подорграф. Тогда S будет максимальным таким подорграфом в D , если и только если выполнены следующие три условия:

- 1) существует такая вершина w_{in} в $\bar{S}$, что любая дуга, идущая из $V(S)$ в $V(\bar{S})$, заходит в w_{in} ;
- 2) существует такая вершина w_{out} в $\bar{S}$, что любая дуга, идущая из $V(\bar{S})$ в $V(S)$, исходит из w_{out} ;
- 3) расстояние между w_{in} и w_{out} на единицу меньше порядка орграфа $\bar{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы А, которое мы здесь не приводим, основано на следующей простой идее: если допустить существование хотя бы одной запрещенной условиями (1)–(3) дуги, то мы сразу получим собственный сильный подорграф, содержащий S и эту дугу. Так как хотя бы одна вершина любой запрещенной дуги принадлежит $V(\bar{S})$, то S не может быть максимальным собственным сильным подорграфом. Обратно, если выполнены все три условия теоремы А, то любой сильный подорграф, содержащий S и хотя бы одну вершину из $V(\bar{S})$, обязан также содержать вершины w_{in} и w_{out} (см. условия (1) и (2) теоремы А), и, следовательно, ему принадлежат все вершины множества $V(\bar{S})$ (см. условие (3) теоремы А). Отметим, что вершина w_{in} совпадает с вершиной w_{out} тогда и только тогда, когда подорграф S является вершинно-удаленным. В этом случае утверждение теоремы тривиально.

Очевидно, каждая вершина w любого сильного орграфа D , порядок которого больше или равен двум, принадлежит хотя бы одному максимальному собственному сильному подорграфу (в частности, он может совпадать с w). Поэтому D имеет по крайней мере два таких подорграфа.

ЛЕММА В. Пусть D – сильный орграф порядка $n \geq 2$. Тогда или любые два максимальных собственных сильных подорграфа имеют общую вершину (случай А), или каждая вершина D принадлежит ровно одному такому подорграфу (случай В).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что если два максимальных собственных сильных подорграфа $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$ не имеют общей вершины, то множество $V(S_{\max 1}) \cap V(S_{\max 3})$ также пусто для любого другого максимального собственного сильного подорграфа $S_{\max 3}$. Предположим противное. Тогда подорграф, порожденный множеством вершин $V(S_{\max 1}) \cup V(S_{\max 3})$, является сильным и, следовательно,

совпадает с D потому, что собственный сильный подорграф $S_{\max 1}$ максимален. Другими словами, $V(S_{\max 1}) \cup V(S_{\max 3}) = V(D)$. Так как $V(S_{\max 1}) \cap V(S_{\max 2}) = \emptyset$, то $V(S_{\max 2}) \subset V(S_{\max 3})$. Однако это противоречит тому факту, что собственный сильный подорграф $S_{\max 2}$ является максимальным. Лемма доказана.

По определению контур орграфа D является *гамильтоновым*, если он проходит через все вершины D . В этом случае орграф D называется *гамильтоновым*. Очевидно, любой максимальный собственный сильный подорграф $S_{\max}$ в D порождается некоторым отрезком гамильтонова контура γ орграфа D (в случае В все такие отрезки образуют разбиение γ). Таким образом, гамильтоновость исходного орграфа D влечет существование гамильтонова пути в $S_{\max}$. Однако она не может гарантировать наличие гамильтонова контура в $S_{\max}$. Следующая теорема характеризует случай В в стандартных терминах теории графов.

ТЕОРЕМА С. Пусть D – сильный орграф порядка $n \geq 2$. Тогда случай В имеет место для D , если и только если D содержит гамильтонов контур и существуют, по крайней мере, две пары вершин, расстояние между которыми в D на единицу меньше его порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – сильный орграф порядка $n \geq 2$, для которого справедлив случай В, и $S_{\max}$ – любой максимальный собственный сильный подорграф в D . Возьмем любую вершину w в $S_{\max}$ такую, что (w, w_{in}) является дугой в D , и рассмотрим любой контур γ в D , содержащий дугу (w, w_{in}) . Обозначим через $S(\gamma)$ сильный подорграф, порожденный множеством вершин $V(\gamma)$ контура γ . Предположим, что $V(\gamma) \neq V(D)$. Тогда сильный подорграф $S(\gamma)$ является собственным. Так как $w, w_{\text{in}} \in V(\gamma)$, то любой максимальный собственный сильный подорграф, содержащий $S(\gamma)$, отличен от $S_{\max}$ и имеет общую с $S_{\max}$ вершину w . Однако это невозможно, если случай В справедлив для орграфа D . Поэтому любой контур, проходящий через дугу (w, w_{in}) , должен быть гамильтоновым. В частности, это означает, что $d(w_{\text{in}}, w) = n - 1$. Так как D содержит, по крайней мере, два максимальных собственных сильных подорграфа и по условию их множества вершин не пересекаются, то число пар вершин, расположенных на расстоянии $n - 1$ друг от друга, больше или равно двум.

Рассмотрим теперь произвольный сильный орграф D порядка $n \geq 2$, в котором существует пара вершин v и w , расположенных на расстоянии $n - 1$ друг от друга. Так как диаметр любого собственного сильного подорграфа в D не больше, чем $n - 2$, вершины v и w принадлежат различным максимальным собственным сильным подорграфам $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$, соответственно. Пусть D также содержит (единственный) гамильтонов контур $\gamma = \{w_i\}_{i=0}^n$. Без ограничения общности можно считать, что $w_0 = w_n = v$ и $w_{n-1} = w$. Очевидно, в этом случае $V(S_{\max 1}) = \{w_0, \dots, w_p\}$ и $V(S_{\max 2}) = \{w_h, \dots, w_{n-1}\}$ для некоторых p и h . Пусть существует еще одна пара вершин на расстоянии $n - 1$ друг от друга. Тогда эти вершины должны следовать одна за другой в гамильтоновом контуре γ . Если $h \leq p$, то они принадлежат, по крайней мере, одному из подорграфов $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$. Как мы объяснили выше, это не возможно. Таким образом, $p < h$ и, следовательно, случай В имеет место для D . Теорема доказана.

В первой части доказательства теоремы С было показано, что $d(w_{\text{in}}, w) = n - 1$ для любой вершины $w \in V(S_{\max})$, из которой идет дуга в w_{in} . Очевидно, для любой фиксированной вершины в сильном орграфе порядка n найдется не более одной вершины, находящейся на расстоянии $n - 1$ от нее. Поэтому существует единственная вер-

шина w_{in}^- в S_{max} , из которой идет дуга в w_{in} . Таким образом, в случае В отображение $S_{\text{max}} \rightarrow \{w_{\text{in}}, w_{\text{in}}^-\}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между максимальными собственными сильными подорграфами в D и парами вершин, расположенных на расстоянии $n - 1$ друг от друга в D . Отметим, что если число m таких пар вершин в сильном орграфе порядка n больше или равно трем, то он автоматически будет гамильтоновым. Однако в общем случае условие $m = 2$ не влечет существование гамильтонова контура.

3. Сильные орграфы с достаточно большими полустепенями вершин. По определению число дуг орграфа D , исходящих из вершины w , является *полустепенью исхода* вершины w . Аналогично, число дуг орграфа D , заходящих в вершину w , называется *полустепенью захода* вершины w . В дальнейшем мы будем формулировать результаты для обоих полустепеней вершин, но соответствующие доказательства будут проводиться только для полустепени исхода. Для того, чтобы убедиться в справедливости того или иного утверждения, в котором полустепень исхода заменена полустепенью захода, достаточно рассмотреть орграф, полученный из D заменой направления каждой его дуги на противоположное.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий сильный орграф D , минимальная полустепень исхода (захода) вершин которого не меньше, чем $k \geq 2$, имеет, по крайней мере, k некритических вершин.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала утверждение теоремы для случая $k = 2$. Пусть S_{max} — любой максимальный собственный сильный подорграф в D . Утверждение (3) теоремы А означает, что при $|V(\overline{S_{\text{max}}})| \geq 2$ существует единственный путь из w_{in} в w_{out} , и этот путь проходит через все вершины $\overline{S_{\text{max}}}$. Следовательно, в силу утверждения (1) теоремы А из вершины w_{in} исходит ровно одна дуга. Таким образом, если минимальная полустепень исхода больше или равна двум, то любой S_{max} в D является вершинно-удаленным. В частности, орграф D имеет, по крайней мере, две некритические вершины.

Доказательство для произвольного k проведем при помощи индукции. Пусть m — любое натуральное число, большее или равное двум. Предположим, что мы показали справедливость утверждения теоремы при любом $k = 2, \dots, m$, и рассмотрим сильный орграф D , минимальная полустепень исхода вершин которого не меньше, чем $m + 1$.

Пусть v_0 — любая некритическая вершина в D . Построим максимальную последовательность вершин $\{v_p\}_{p=0}^d$ такую, что при любом $p \geq 1$ орграф $D - v_0 - \dots - v_p$ сильно связан и (v_p, v_{p-1}) является единственной дугой, идущей из $V(D) \setminus \{v_0, \dots, v_{p-1}\}$ в v_{p-1} . Очевидно, если $V(D) = \{v_0, \dots, v_d\}$, то $d \geq 1$ и по построению (v_d, v_{d-1}) будет единственной дугой в D , исходящей из v_d . Это противоречит условию $k \geq 2$ теоремы. Поэтому множество вершин $V_d = V(D - v_0 - \dots - v_d)$ не пусто. Так как для любого $w \in V_d$ дуга (w, v_p) отсутствует в D при каждом $p = 0, \dots, d - 1$, то минимальная полустепень исхода вершин сильного подорграфа $D - v_0 - \dots - v_d$ не меньше, чем m . По предположению индукции этот подорграф имеет m некритических вершин $w_1, \dots, w_m$. Максимальность последовательности $\{v_p\}_{p=0}^d$ означает, что реализуется одна из следующих двух возможностей:

- 1) из V_d в v_d исходят по крайней мере две дуги;
- 2) для единственной вершины v в V_d , из которой идет дуга в v_d , подорграф $D - v_0 - \dots - v_d - v$ не является сильным.

Поэтому в обоих случаях для любой вершины w_i из множества $\{w_1, \dots, w_m\}$ существует вершина v_d^- в сильном подорграфе $D - v_0 - \dots - v_d - w_i$ такая, что (v_d^-, v_d) — дуга в D . В первом случае v_d^- является началом одной из двух дуг и, вообще говоря, зависит от выбора вершины w_i , а во втором — она всегда совпадает с v .

По условию из вершины v_d исходят, по крайней мере, три дуги. По построению, дуга (v_d, v_p) отсутствует в D для любого $p = 0, \dots, d-2$. Следовательно, хотя бы две дуги идут из v_d в V_d . Выберем наименьший номер s такой, что из вершины v_s исходят, по крайней мере, две дуги в V_d . Очевидно, что конец хотя бы одной из этих двух дуг отличен от w_i . Обозначим его через v_s^+ .

В силу выбора числа s при $p = 0, \dots, s-1$ из v_p в V_d исходит не более одной дуги. Кроме того, существует ровно одна дуга, идущая из v_p в $\{v_0, \dots, v_{p-1}\}$. Так как полустепень исхода вершины v_p не меньше, чем три, то хотя бы одна дуга исходит из v_p в множество вершин $\{v_{p+1}, \dots, v_d\}$ при любом $p = 0, \dots, s-1$. Напомним также, что по построению последовательность $v_d, \dots, v_0$ является путем в D . Поэтому существует маршрут $\gamma_{v_0 v_s}$ орграфа D из v_0 в v_s , содержащий вершины только из множества $\{v_0, \dots, v_d\}$.

По определению маршрут является *остовным*, если он проходит через все вершины орграфа. Пусть $\gamma_{v_s^+ v_d^-}$ — остовный маршрут сильного подорграфа $D - v_0 - \dots - v_d - w_i$, идущий из v_s^+ в v_d^- . Тогда

$$\gamma_{v_s^+ v_d^-}, v_d, \dots, v_1, \gamma_{v_0 v_s}, v_s^+$$

будет остовным циклическим маршрутом в подорграфе $D - w_i$. Хорошо известно (см., например, утверждение 63.1 в [3, гл. 10]), что орграф сильно связан тогда и только тогда, когда в нем найдется остовный циклический маршрут. Поэтому орграф $D - w_i$ сильно связан. Таким образом, вершины $v_0, w_1, \dots, w_m$ являются некритическими для D . Шаг индукции $m \rightarrow m+1$ сделан. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 1 является оптимальным в следующем смысле: гарантированное им число k некритических вершин не может быть увеличено. Для того, чтобы построить соответствующий пример (он принадлежит Д. С. Любшину), возьмем полный граф на $k \geq 2$ вершинах $v_1, \dots, v_k$, заменим каждое его ребро на пару встречных дуг, а затем выпустим из каждой вершины v_i , где $i = 1, \dots, k$, путь длины ℓ с концом в вершине w_i и для любой вершины w , отличной от $v_1, \dots, v_k$, добавим дуги $(w, v_1), \dots, (w, v_k)$. Очевидно, минимальная полустепень исхода построенного таким образом сильного орграфа D равна k . С другой стороны, только вершины $w_1, \dots, w_k$ будут некритическими в D . Заметим, что увеличивая длину ℓ , мы можем сделать порядок D сколь угодно большим (при фиксированном k). Совсем другая ситуация имеет место для неориентированных графов. В этом случае число некритических вершин будет расти линейно относительно порядка n при любой минимальной степени вершин $k \geq 3$ (см. [5], [6]).

4. Сильные орграфы порядка n с вершинами, полустепень исхода (захода) которых равна $n-1$. Для сравнения рассмотрим еще один класс орграфов, в определении которого также присутствует параметр k , связанный с полустепенями вершин. Скажем, что вершина орграфа D является *доминирующей* (*доминируемой*), если ее полустепень исхода (захода) на единицу меньше порядка D . Очевидно, подорграф, порожденный всеми доминирующими (доминируемыми) вершинами в D , является полным и, следовательно, содержит гамильтонов контур. Оказывается, некритические и доминирующие (доминируемые) вершины связаны следующим образом.

ЛЕММА 1. Пусть D – сильный орграф и γ – самый длинный контур, содержащий все доминирующие (доминируемые) вершины в D . Тогда вершина, следующая за (перед) любой доминирующей (доминируемой) вершиной в γ , является некритической в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = \{w_i\}_{i=0}^\ell$ – самый длинный контур, содержащий все доминирующие вершины в D . Без ограничения общности можно считать, что вершина $w_0 = w_\ell$ является доминирующей. Очевидно, для того, чтобы доказать сильную связность подорграфа $D - w_1$, достаточно показать, что для любых двух вершин x и y в D , отличных от w_1 , существует маршрут из x в y , не содержащий вершины w_1 . Пусть γ_{xy} – наикратчайший путь из x в y в D . Если γ_{xy} не проходит через w_1 , то он – искомый маршрут. В противном случае он допускает представление $\gamma_{xy} = x, \dots, w_1^-, w_1, w_1^+, \dots, y$. Вершина w_1^- принадлежит контуру γ . Действительно, в противном случае последовательность вершин $w_1^-, w_1, \dots, w_\ell, w_1^-$ также является контуром, и его длина на единицу больше длины γ , что противоречит определению γ . Таким образом, $w_1^- = w_s$, где $2 \leq s \leq \ell - 1$. Замена вершины w_1 в γ_{xy} отрезком $w_{s+1}, \dots, w_\ell$ приводит к маршруту из x в y , не содержащему вершину w . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно показать, что, на самом деле, контур γ в условии леммы 1 имеет наибольшую длину среди всех контуров в D .

Очевидно, для двух различных доминирующих (доминируемых) вершин в D следующие за (перед) ними вершины на контуре γ также различны. Поэтому если сильный орграф содержит k доминирующих (доминируемых) вершин, то он также имеет, по крайней мере, k некритических вершин. Пример сильного орграфа D , построенного в конце предыдущего раздела, показывает, что гарантируемое число k некритических вершин не может быть увеличено. Действительно, вершины $v_1, \dots, v_k$ являются доминируемыми в D , и он имеет ровно k некритических вершин. Нетрудно проверить также, что орграф D содержит гамильтонов контур. Оказывается, это свойство D не является случайным.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть D – сильный орграф с $k \geq 1$ доминирующими (доминируемыми) вершинами. Предположим, что D имеет ровно k некритических вершин. Тогда D является гамильтоновым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим самый длинный контур γ , проходящий через все доминирующие вершины в D . В силу леммы 1 он содержит k некритических вершин. Предположим, что γ – негамильтонов контур. Пусть $S_{\max}$ – любой максимальный собственный сильный подорграф, содержащий γ . Так как $S_{\max}$ имеет хотя бы одну доминирующую вершину, то из $S_{\max}$ идет дуга в w_{out} . Если $S_{\max}$ не является вершинно-удаленным, то наличие такой дуги в D противоречит теореме А. Следовательно, $S_{\max} = D - w$ для некоторой вершины $w \in V(D)$. Другими словами, вершина w является $(k+1)$ -й некритической вершиной в D , что, однако, противоречит условию. Поэтому контур γ гамильтонов. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если какой-то максимальный собственный сильный подорграф в D не является вершинно-удаленным, то $k = 1$ и единственная доминирующая (доминируемая) вершина совпадает с соответствующим w_{out} (w_{in}).

Пусть P_n – неориентированный путь с множеством вершин $V(P_n) = \{1, \dots, n\}$, где $n \geq 5$. Заменим каждое его ребро на пару противоположно направленных дуг и добавим

дуги $(1, m)$ и (n, t) , где $m \leq t$. Очевидно, полученный сильный орграф D негамильтонов, и полустепень исхода любой его вершины равна двум. Кроме того, только вершинно-удаленные подорграфы $D - 1$ и $D - n$ являются сильными. Поэтому утверждение 1 не будет справедливым, если k – минимальная полустепень исхода.

5. Сильные направленные графы с достаточно большими степенями вершин. Сумма полустепеней исхода и захода вершины w называется *степенью* w . По определению, орграф D является *направленным* графом, если для любых двух его различных вершин v и w существует не более одной дуги из множества $\{(v, w), (w, v)\}$. Другими словами, в D отсутствуют контуры длины два. Например, любой турнир T порядка n является направленным графом, степень каждой вершины которого равна $n - 1$. Из теоремы Муна о вершинной панцикличности (см. [2, гл. 3, теорема 3.43]) следует, что любой сильный турнир порядка $n \geq 4$ содержит, по крайней мере, две некритические вершины (см. [4, гл. 1, упражнение 1.29]). Оказывается, это утверждение остается справедливым и при более слабых ограничениях на степени вершин.

ТЕОРЕМА 2. *Всякий сильный направленный граф D порядка n , степень каждой вершины которого не меньше, чем $3/4n$, имеет, по крайней мере, две некритические вершины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если каждый максимальный собственный сильный подорграф в D является вершинно-удаленным, то D содержит две некритические вершины. Пусть теперь некоторый $S_{\max}$ не является вершинно-удаленным. Предположим, что $|V(\overline{S_{\max}})| \geq 3$, и рассмотрим любую вершину v в $S_{\max}$. В силу утверждений (1) и (2) теоремы А вершина v не смежна с любой вершиной w из (непустого) множества $V(\overline{S_{\max}}) \setminus \{w_{\text{in}}, w_{\text{out}}\}$. Кроме того, только вершины из $V(\overline{S_{\max}})$ могут быть смежны вершине w . Если степени вершин v и w в D не меньше, чем $n - 1 - m$, то $n - 1 - m \leq |V(\overline{S_{\max}})| - 1 \leq m + 1$ и, следовательно, $n \leq 2m + 2$. Однако это противоречит условию теоремы $n \geq 4m + 4$. Поэтому $|V(\overline{S_{\max}})| = 2$.

Пусть V_1 – множество вершин в $S_{\max}$, из которых не идет дуга в w_{in} , и V_2 – множество вершин в $S_{\max}$, в которые не идет дуга из w_{out} . Если степени вершин w_{in} и w_{out} не меньше, чем $n - 1 - m$, то $|V_1| \leq m$ и $|V_2| \leq m$. Для любой вершины $v \in V_1$ обозначим через v^+ конец некоторой дуги, идущей из v в $V(S_{\max}) \setminus V_1$ (если такая дуга существует). Аналогичным образом, для любой вершины $v \in V_2$ обозначим через v^- начало некоторой дуги, идущей из $V(S_{\max}) \setminus V_2$ в v (если она существует). Положим $V_1^+ = \{v^+ : v \in V_1\}$ и $V_2^- = \{v^- : v \in V_2\}$. Очевидно, $|V_1^+| \leq |V_1|$ и $|V_2^-| \leq |V_2|$. Поэтому для числа вершин в множестве $W = V(S_{\max}) \setminus V_1 \cup V_2 \cup V_1^+ \cup V_2^-$ справедливо неравенство

$$|W| \geq |V(D)| - |V_1| - |V_2| - |V_1^+| - |V_2^-| - |V(\overline{S_{\max}})| \geq n - 4m - 2 \geq 2.$$

Для того, чтобы показать, что для любой вершины $w \in W$ соответствующий подорграф $D - w$ является сильным, достаточно для любых двух данных вершин v и $\hat{v}$ построить маршрут, соединяющий эти вершины в $D - w$. Пусть $\gamma = \{v_i\}_{i=0}^r$ – любой путь орграфа D из v в $\hat{v}$. Если γ не содержит вершины w , то он является искомым маршрутом. В противном случае $w = v_s$ для некоторого s такого, что $0 < s < r$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $v_{s-1} \in V_1$ и $v_{s+1} \in V_2$ (остальные случаи могут быть рассмотрены аналогичным образом). Так как (v_{s-1}, w) является дугой в D и вершина w не принадлежит $V_1 \cup V_1^+$, то вершина v_{s-1}^+ определена и отлична от w . Аналогичным

образом, вершина v_{s+1}^- существует и не совпадает с w . Заменяя вершину w путем v_{s-1}^+ , w_{in} , w_{out} , v_{s+1}^- в γ , мы получим маршрут из v в $\hat{v}$, не содержащий вершину w . Таким образом, любая вершина множества W является некритической в D . Теорема доказана.

Хорошо известно, что сильный турнир T порядка $n \geq 4$, диаметр которого на единицу меньше его порядка, содержит ровно два сильных вершинно-удаленных подорграфа. Поэтому гарантированное число некритических вершин в утверждении теоремы 2 не может быть увеличено. Что касается константы при n в условии на степени вершин, то в процессе доказательства мы не ставили перед собой задачу получения ее наименьшего возможного значения c . Можно показать, что оно не меньше, чем $1/2$. Для этого достаточно ориентировать полный двудольный граф четного порядка n с двумя одинаковыми по мощности долями W_1 и W_2 так, чтобы полустепень захода любой вершины в W_1 и полустепень исхода любой вершины в W_2 были равны единице. Очевидно, в этом случае степень любой вершины равна $n/2$ и полученный сильный орграф порядка n является критическим (т.е. он не содержит некритических вершин). Таким образом, $1/2 \leq c \leq 3/4$ и проблема нахождения точного значения c остается пока открытой.

Приложение: максимальные собственные двусвязные подграфы в двусвязных графах. В приложении к нашей работе мы рассмотрим неориентированный граф G с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. По определению G является *двусвязным* графом, если удаление любой вершины v и инцидентных ей ребер приводит к связному подграфу $G - v$. Например, цикл C_n длины n является двусвязным графом при $n \geq 3$. Однако в дальнейшем мы не будем рассматривать C_n в качестве исходного двусвязного графа G .

В силу утверждения (2) теоремы 34.1 главы 5 в [3] двусвязность графа G эквивалентна существованию для любых двух вершин в G цикла, проходящего через них. Поэтому если $G \neq C_n$, то через любую вершину двусвязного графа G проходит негамильтонов цикл. Множество вершин такого цикла порождает собственный двусвязный подграф в G . Следовательно, любая вершина G принадлежит максимальному собственному двусвязному подграфу. Для дополнения к такому подграфу можно сформулировать следующее утверждение, которое очень похоже на теорему А.

ЛЕММА 2. Пусть G – двусвязный граф и S – его собственный двусвязный подграф. Тогда S будет максимальным таким подграфом, если и только если он является вершинно-удаленным или выполнены следующие четыре условия:

- 1) подграф $\bar{S}$, порожденный вершинами, которые не принадлежат S , является путем с концевыми вершинами v_S и w_S ;
- 2) существует ровно одна вершина v_S^* в S , смежная вершине v_S ;
- 3) существует ровно одна вершина w_S^* в S , смежная вершине w_S ;
- 4) (v_S, v_S^*) и (w_S, w_S^*) являются единственными ребрами, соединяющими подграфы S и $\bar{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – максимальный собственный двусвязный подграф в G , который не является вершинно-удаленным. В силу утверждения (6) теоремы 34.1 главы 5 в [3] двусвязность графа G эквивалентна существованию для любых трех вершин x, y, z пути из x в y , проходящего через z . Выберем любой путь γ , соединяющий две различные вершины в S и проходящий через некоторую вершину в $\bar{S}$. Заменяя, если надо, γ на его отрезок, можно считать, что γ имеет вид $v_S^*, v_S, \dots, w_S, w_S^*$, где v_S^*

и w_S^* принадлежат $V(S)$, а все остальные вершины, начиная с v_S и кончая w_S , содержатся в $V(\overline{S})$. Очевидно, вершины v_S^* и w_S^* различны и, следовательно, подграф, порожденный множеством вершин $V(S) \cup V(\gamma)$, является двусвязным и содержит S в качестве своего подграфа. Так как собственный двусвязный подграф S максимален, то $V(S) \cup V(\gamma) = V(D)$. Поэтому любой путь, проходящий через две различные вершины в $V(S)$ и некоторую вершину в $V(\overline{S})$, обязан содержать также любую вершину из $V(\overline{S})$.

Пусть $\gamma = \{w_i\}_{i=0}^\ell$ – путь, рассмотренный выше (в частности, $w_0 = v_S^*$, $w_1 = v_S$, $w_{\ell-1} = w_S$ и $w_\ell = w_S^*$). Предположим, что для некоторого $v \in V(S)$ и $i = 1, \dots, \ell - 1$ существует ребро (v, w_i) , отличное как от (v_S^*, v_S) , так и от (w_S, w_S^*) . Тогда, по крайней мере, один из путей $v, w_i, w_{i-1}, \dots, v_S, v_S^*$ и $v, w_i, w_{i+1}, \dots, w_S, w_S^*$ соединяет две различные вершины в S , но содержит не все вершины $\overline{S}$. Как было показано выше, существование такого пути противоречит максимальнойности собственного двусвязного подграфа S . Поэтому ребро указанного вида отсутствует в G и, следовательно, условия (2), (3) и (4) необходимы. Кроме того, если (w_i, w_j) является ребром графа G при некотором $j \geq i + 2$, то путь $v_S^*, v_S, \dots, w_i, w_j, \dots, w_S, w_S^*$ также проходит не через все вершины подграфа $\overline{S}$. Это означает, что подграф $\overline{S}$ является путем с концевыми вершинами v_S и w_S и, следовательно, условие (1) также необходимо. Достаточность условий леммы очевидна. Лемма доказана.

По определению степень вершины неориентированного графа равна числу инцидентных ей ребер. В дальнейшем мы будем использовать не только лемму 2, но и сформулированное ниже ее следствие, касающееся степеней вершин.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – двусвязный граф и $S_{\max}$ – любой максимальный собственный двусвязный подграф в G . Тогда или $S_{\max}$ является вершинно-удаленным подграфом, или степень любой вершины, которая не принадлежит $S_{\max}$, равна двум.

Очевидно, любой двусвязный граф G , отличный от цикла, содержит, по крайней мере, два максимальных собственных двусвязных подграфа. Кроме того, в силу леммы 2 любые два таких подграфа $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$ в G имеют, по крайней мере, две общие вершины. Поэтому подграф, порожденный множеством вершин $V(S_{\max 1}) \cup V(S_{\max 2})$, является двусвязным. Это, в частности, означает, что $V(S_{\max 1}) \cup V(S_{\max 2}) = V(G)$ и, следовательно, $V(\overline{S_{\max 1}}) \cap V(\overline{S_{\max 2}}) = \emptyset$.

В случае, когда подграф $G - v$ не является двусвязным при любом $v \in V(G)$, исходный двусвязный граф G называется *критическим*. Другими словами, $|V(\overline{S_{\max}})| \geq 2$ для любого максимального собственного двусвязного подграфа $S_{\max}$ в G . В силу сделанных выше замечаний и следствия 1 любой критический двусвязный граф G содержит четыре вершины степени два. Этот результат был впервые доказан Небески в [7, § 3, теорема 4]. Очевидно, если критический двусвязный граф G имеет не более пяти вершин степени два, то в G существуют ровно два максимальных собственных двусвязных подграфа. В силу следующей леммы граф G обязан быть гамильтоновым (для критического двусвязного графа, содержащего ровно четыре вершины степени два, этот результат был получен в [8, § 8, лемма 6] и совсем недавно передоказан в [9, § 9, следствие 9.4]).

ЛЕММА 3. Предположим, что двусвязный граф G имеет ровно два максимальных собственных двусвязных подграфа. Тогда граф G является гамильтоновым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$ — два максимальных собственных двусвязных подграфа в двусвязном графе G . Возьмем любую вершину v в $\overline{S_{\max 1}}$ и любую вершину w в $\overline{S_{\max 2}}$. В силу двусвязности G найдется цикл γ , содержащий вершины v и w . Предположим, что γ — негамильтонов цикл. Тогда двусвязный подграф, порожденный вершинами γ , является собственным и, следовательно, содержится в некотором максимальном собственном двусвязном подграфе $S_{\max 3}$, отличном от $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$. Однако наличие третьего максимального собственного двусвязного подграфа в G противоречит условию. Поэтому цикл γ обязан быть гамильтоновым. Лемма доказана.

Следующее утверждение показывает, что двусвязные графы, содержащие ровно два максимальных собственных двусвязных подграфа, получаются из критических двусвязных графов с двумя “ручками” (или, согласно другой терминологии, “ухами”) при помощи стягивания одной (или каждой) из его “ручек” в точку. Поэтому для их описания и классификации могут быть использованы результаты работы [9] (см. следствие 9.3 там).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что двусвязный граф G имеет ровно два максимальных собственных двусвязных подграфа $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$. Тогда степень любой вершины в $V(\overline{S_{\max 1}}) \cup V(\overline{S_{\max 2}})$ равна двум.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно рассматривать только подграф $\overline{S_{\max 1}}$. Если он содержит, по крайней мере, две вершины, то справедливость утверждения следствия об их степенях вытекает из следствия 1. Пусть теперь $\overline{S_{\max 1}} = G - w$ при некотором $w \in V(G)$. В силу леммы 2 вершины множества $V(\overline{S_{\max 1}})$ образуют безхордовый сегмент $\gamma_{\max 2}$ гамильтонова цикла γ , существование которого гарантирует лемма 3. Если степень вершины w больше или равна трем, то также существует хорда (w, v) цикла γ , соединяющая две его несоседние вершины w и v . Так как $w \in V(S_{\max 2})$, то по лемме 2 или вершина v не принадлежит $\gamma_{\max 2}$, или $\gamma_{\max 2}$ состоит из одной вершины v (т.е. $S_{\max 2} = G - v$). В обоих случаях $\gamma_{\max 2}$ является отрезком одного из негамильтоновых циклов, полученных в результате добавления ребра (w, v) к γ . Наличие негамильтонова цикла, множество вершин которого содержит вершину w и множество $V(\overline{S_{\max 2}})$, влечет, в свою очередь, существование максимального собственного двусвязного подграфа, отличного от $S_{\max 1}$ и $S_{\max 2}$. Но это противоречит условию. Следовательно, степень вершины w равна двум. Следствие доказано.

По определению вершина v в двусвязном графе G является *некритической*, если подграф $G - v$ также двусвязен. Пусть все вершины степени два в G попарно не смежны. Тогда в силу леммы 2 любой максимальный собственный двусвязный подграф в G является вершинно-удаленным. Это наблюдение и следствие 2 гарантируют существование трех некритических вершин в G , если в G найдется не более одной вершины степени два. В силу одной из теорем Небески [10] любой двусвязный граф или содержит пару смежных некритических вершин, или имеет пару независимых вершин степени два. Поэтому две из трех некритических вершин смежны в G . В силу утверждения (3) теоремы 34.1 главы 5 в [3] граф двусвязен тогда и только тогда, когда любая его вершина и любое его ребро принадлежат одному и тому же циклу. Точно так же, как это было сделано при доказательстве следствия 2, можно показать, что если граф G , содержащий не более одной вершины степени два, имеет ровно три некритические вершины, то G гамильтонов, содержит ровно одну вершину степени два, и эта вершина является одной из трех некритических вершин в G . Кроме того, через них проходит негамильтонов цикл

и, следовательно, в G существует четвертая некритическая вершина, если степень любой вершины в G больше или равна трем. Последний результат известен и принадлежит Вельдману (см. [11]). Используя его теорему 1 в [11] и доказательство следствия 1 в [11], нетрудно показать, что если минимальная степень k вершин двусвязного графа G больше или равна трем, то G имеет, по крайней мере, $2(k - 1)$ некритических вершин.

Пусть $\ell(v, w; z)$ — длина наикратчайшего цикла в двусвязном графе G , проходящего через его ребро (v, w) и вершину z . Положим

$$\ell(G) = \min_{(v,w) \in E(G)} \max_{z \in V(G)} \ell(v, w; z). \quad (1)$$

Очевидно, $\ell(G) \leq \nu(G)$, где $\nu(G)$ — порядок G , причем равенство в этом неравенстве имеет место, если и только если G является циклом. Обозначим через $m(G)$ число максимальных собственных двусвязных подграфов в G . Пусть $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x . Тогда величины $\nu(G)$, $m(G)$ и $\ell(G)$ связаны следующим образом.

ЛЕММА 4. Пусть G — двусвязный граф, отличный от цикла. Тогда

$$m(G) \geq \left\lceil \frac{\nu(G) - 2}{\ell(G) - 2} \right\rceil. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_{\max 1}, \dots, S_{\max m}$ — все максимальные собственные двусвязные подграфы в G (таким образом, $m = m(G)$). Возьмем любое ребро (v, w) в G , на котором достигается минимум в (1), и для любого $p = 1, \dots, m$ выберем вершину z_p , не принадлежащую подграфу $S_{\max p}$. Пусть γ_p — наикратчайший цикл в G , проходящий через ребро (v, w) и вершину z_p . Предположим, что $V(\gamma_1) \cup \dots \cup V(\gamma_m) \neq V(G)$. Тогда двусвязный подграф, порожденный множеством вершин $V(\gamma_1) \cup \dots \cup V(\gamma_m)$, является собственным и, следовательно, существует максимальный собственный двусвязный подграф в G , отличный от $S_{\max p}$ при любом $p = 1, \dots, m$. Поэтому $V(\gamma_1) \cup \dots \cup V(\gamma_m) = V(G)$. По определению величины $\ell(G)$ справедливо неравенство $\ell(\gamma_p) \leq \ell(G)$ при $p = 1, \dots, m$. Любые два цикла из множества $\{\gamma_p\}_{p=1}^m$ содержат, по крайней мере, две общие вершины v и w . Это влечет неравенство $|V(\gamma_1) \cup \dots \cup V(\gamma_m)| \leq 2 + m(\ell(G) - 2)$. Таким образом, $\nu(G) \leq 2 + m(\ell(G) - 2)$. Лемма доказана.

Нетрудно построить двусвязный граф G , для которого оценка леммы 4 является точной. Для этого достаточно склеить m копий цикла C_ℓ длины ℓ вдоль одного ребра. В этом случае порядок полученного двусвязного графа $C_{m,\ell}$ равен $m(\ell - 2) + 2$ и $m(C_{m,\ell}) = m$. Поэтому для $C_{m,\ell}$ имеет место равенство в (2). Если каждый максимальный собственный двусвязный подграф в G является вершинно-удаленным, то неравенство (2) превращается в оценку снизу для числа некритических вершин в G . Она будет точной, например, для двусвязного графа $C_{m,3}$, множество вершин степени два которого независимо.

В заключение заметим, что при $h \geq 3$ проблема построения теории максимальных собственных h -связных подграфов в h -связных графах оказывается намного более сложной по следующим двум причинам. Во-первых, очень трудно сформулировать необходимое и достаточное условие, гарантирующее существование собственного h -связного

подграфа в h -связном графе при больших значениях h . Во-вторых, структура дополнения $\overline{S_{\max}}$ к максимальному такому подграфу $S_{\max}$ становится довольно сложной, а множество различных вариантов для $\overline{S_{\max}}$ практически необозримым. Например, одним из таких дополнений при $h = 3$ будет, безусловно, произведение $P_2 \times P_m$ двух неориентированных путей P_2 и P_m (см. рис. 3.2 в [3, гл. 1, § 3]). Отметим, что при $m \geq 3$ каждая вершина степени два в $P_2 \times P_m$ может быть соединена двумя ребрами с вершинами подграфа $S_{\max}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Mader W. Critically n -connected digraphs // Graph Theory, Combinatorics, and Applications II. / ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellermann, A. J. Schwenk. New York–London–Sydney–Toronto: John Wiley and Sons, 1991. P. 811–829.
- [2] Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука, Физматлит, 1997.
- [3] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.
- [4] Bang-Jensen J., Gutin G. Digraphs: Theory, Algorithms and Applications. London: Springer-Verlag, 2000.
- [5] Clark L. H., Entringer R. C. The number of cutvertices in graphs with given minimum degree // Discrete Math. 1990. V. 81. P. 137–145.
- [6] Albertson M. O., Berman D. M. The number of cut-vertices in a graph of given minimum degree // Discrete Math. 1991. V. 89. P. 97–100.
- [7] Nebesky L. On induced subgraphs of a block // J. Graph Theory. 1977. V. 1. P. 69–74.
- [8] Kriesell M. Contractible subgraphs in 3-connected graphs // J. Combin. Theory Ser. B. 2000. V. 80. P. 32–48.
- [9] Nelson D. A. The structure of saturated critical blocks // J. Graph Theory. 2003. V. 43. P. 223–237.
- [10] Nebesky L. A theorem on 2-connected graphs // Časopis. přest. mat. 1975. V. 100. P. 116–117.
- [11] Veldman H. J. Non- κ -critical vertices in graphs // Discrete Math. 1983. V. 44. P. 105–110.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау РАН
E-mail: sav@icp.ac.ru

Поступило
23.12.2004
Исправленный вариант
02.12.2005