Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Трушин, Вложение пространства Соболева в пространство Орлича для области с нерегулярной границей, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 767–778

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 12:26:48

УДК 517.518.232

ВЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА В ПРОСТРАНСТВО ОРЛИЧА ДЛЯ ОБЛАСТИ С НЕРЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Б. В. Трушин

В работе устанавливается вложение весового пространства Соболева в пространство Орлича для области с нерегулярной границей. Находится оценка порядка роста N -функции (определяющей пространство Орлича), и показывается, что при некоторых дополнительных ограничениях на веса эта оценка неумлучшаема. Установлено также вложение в пространство непрерывных функций.

Библиография: 18 названий.

Известная теорема вложения Соболева

$$W_p^s(G) \subset L_q(G), \quad s \in \mathbb{N}, \quad 1 < p < q < \infty,$$

установлена С. Л. Соболевым в 1938 г. (см. [1]) для области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса. Этот результат был перенесен на области более общего вида: области классов J_α , $I_{p,\alpha}$ (В. Г. Мазья, 1960 г., 1975 г., см. [2]), области с условием Джона (Ю. Г. Решетняк [3], [4]), области с условием гибкого σ -конуса (О. В. Бесов [5]).

Рядом авторов изучалось вложение пространства Соболева в пространство Орлича. С. И. Похожаев [6] в случае ограниченной области с границей, локально удовлетворяющей условию Липшица, доказал вложение

$$W_p^s(G) \subset L_\Phi^*(G), \quad \Phi(t) = e^{|t|^{p'}} - 1,$$

где через $L_\Phi^*(G)$ обозначено пространство Орлича с N -функцией Φ . Оценки интегралов типа потенциала, приводящие к этому вложению, были получены ранее В. И. Юдовичем [7]. Похожаев показал также [6], что такое вложение не имеет места, если в Φ заменить p' на $p' + \varepsilon$, ни при каком $\varepsilon > 0$.

Следует отметить также работы Трудингера [8], Стампакки [9], Ю. А. Брудного [10], Мозера [11], Эванса и Эдмундса [12], в которых рассматривались вложения в пространство Орлича.

Вложение в пространство непрерывных функций доказано Соболевым [1] при $s > n/p$ для области с условием конуса. В книге О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [13] оно обобщено на случай открытого множества с условием λ -рога.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-01050, и Российской программы поддержки ведущих научных школ, грант НШ 1549.2003.1.

В настоящей работе устанавливаются теоремы вложения пространства Соболева в пространство Орлича и пространство непрерывных функций для областей с условием гибкого σ -конуса. Показано также, что вложение в пространство Орлича не имеет места при любом сколь угодно малом увеличении порядка роста функции, определяющей это пространство, даже если область удовлетворяет условию внешнего пика. Результаты обобщаются и на случаи вложений пространства Соболева с весовой нормой со степенными весами.

Везде далее область $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $B(x, R) = \{y : |y - x| < R\}$, $Q(x, R) = x + [-R, R]^n$, $\rho(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$, $\rho_1(x) = \min\{\rho(x), 1\}$, $\delta > 0$ достаточно мало, $G_\delta = \{x \in G : \text{dist}(x, \partial G) > \delta/2\} \neq \emptyset$, весовые функции $v, w : G \rightarrow (0, \infty)$, $u : G_\delta \rightarrow (0, \infty)$, u, v, w локально суммируемы, χ — характеристическая функция шара $B(0, 1)$ или интервала $(0, 1)$, $1/p' = 1 - 1/p$.

Через $W_{p,v;r,u}^s(G)$ обозначают пространство Соболева функций f , имеющих на G все обобщенные по Соболеву производные $D^\alpha f$, $|\alpha| = s$, с конечной нормой

$$\|f|W_{p,v;r,u}^s(G)\| = \left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f|L_{p,v}(G)\| + \|f|L_{r,u}(G_\delta)\| \right),$$

где $\|f|L_{p,v}(E)\| = \|f v^{\frac{1}{p}}\|_{p,E} = \left(\int_E |f(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что функция $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу Орлича $L_\Phi(G)$ с N -функцией Φ , если

$$\int_G \Phi(|f|) dx < \infty.$$

Пространством Орлича $L_\Phi^*(G)$ называется совокупность всех функций $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что при некотором $\lambda = \lambda(f) > 0$

$$\int_G \Phi(\lambda|f|) dx < \infty.$$

За норму в $L_\Phi^*(G)$ принимается

$$\|f\|_{\Phi,G} = \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \int_G \Phi(\lambda|f|) dx \right).$$

Введем еще пространство

$$L_{\Phi,w}^*(G) = \{f : fw \in L_\Phi(G), \|f|L_{\Phi,w}^*(G)\| = \|fw\|_{\Phi,G} < \infty\}.$$

Везде в дальнейшем

$$\Phi(t) = \Phi_\rho(t) = e^{|t|^\rho} - \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{1}{k!} |t|^{k\rho}, \quad k_0 \in \mathbb{N}, \quad k_0 > \rho^{-1}, \quad (1)$$

где $\rho > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. При $\sigma \geq 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называют *областью с условием гибкого σ -конуса*, если при некоторых $t^* > 0$, $\kappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma: [0, t^*] \rightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $|\gamma'| \leq 1$ почти всюду, такой, что $\rho(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma$ при $0 < t \leq t^*$.

В случае ограниченной области это определение эквивалентно определению области с σ -условием Джона (σ -John domain).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. На функциях $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ определим оператор

$$Kf(x) = \int_G k(x, y)f(y) dy, \quad x \in G, \quad (2)$$

где $k: G \times G \rightarrow (0, \infty)$ — измеримая функция. Положим

$$k(x, y, R) = \left[1 - \chi\left(\frac{x-y}{R}\right) \right] k(x, y).$$

При $1 \leq p < q < \infty$ и весовых функциях v, w рассмотрим следующую характеристику ядра k [14]–[16]:

$$|||kv^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} = \sup_{x \in G} \sup_{R>0} \|k(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{p', G(\mu(G \cap B(x, R)))^{\frac{1}{q}}},$$

где $\mu(\cdot)$ — мера Лебега.

1. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p < \infty$, $C > 0$, $\alpha \geq 0$, K — оператор из (2) с ядром k . Пусть для всех $q > p$

$$|||kv^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} \leq Cq^\alpha.$$

Тогда

1° для всех $q > p$

$$\|Kf\|_{q,G} \leq C^* \max\left\{1, \frac{1}{(q-p)^{\frac{q+1}{q}}}\right\} q^\alpha \|f\|_{L_{p,v}(G)}, \quad (1.1)$$

где C^* не зависит от q ;

2° при $\alpha > 0$, $\rho = \alpha^{-1}$, $k_0 > \alpha\rho$ и $\Phi = \Phi_\rho$ из (1)

$$\|Kf\|_{\Phi,G} \leq C' \|f\|_{L_{p,v}(G)},$$

где постоянная C' не зависит от f ;

3° при $\alpha = 0$ $\|Kf\|_{\infty,G} \leq C^* \|f\|_{L_{p,v}(G)}$, где C^* та же, что и в (1.1);

4° при $\alpha = 0$, $\rho \in (0, \infty)$, $k_0 > p/\rho$ и $\Phi = \Phi_\rho$ из (1)

$$\|Kf\|_{\Phi,G} \leq C_\rho \|f\|_{L_{p,v}(G)},$$

где постоянная C_ρ не зависит от f .

ЛЕММА 1. Пусть G — область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$), $1 < p < \infty$, $1 \leq r < \infty$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $a \geq 1 - n$, $w(x) = \rho_1(x)^b$, $b \geq 0$,

$$s - \frac{n}{p} \geq 0, \quad s + b - \frac{\sigma(n-1) + 1 + \sigma a}{p} \geq 0, \\ \left(\int_{G_\delta \cap Q(z, \frac{1}{2} + t^* + \delta)} u(x)^{-\frac{r'}{r}} dx \right)^{\frac{1}{r'}} < \infty. \quad (1.2)$$

Тогда

1° если выполнены условия

$$s - \frac{n}{p} = 0 \quad \text{или} \quad \left(b = 0, \quad s - \frac{\sigma(n-1) + 1 + \sigma a}{p} = 0 \right), \quad (1.3)$$

то для любого $q > p$, $q \geq r$

$$\|fw\|_{q,G} \leq C \left(\max \left\{ 1, \frac{1}{(q-p)^{\frac{q+1}{q}}} \right\} q^{\frac{1}{p'}} \sum_{|\beta|=s} \|D^\beta f\|_{L_{p,v}(G)} + \|f\|_{L_{r,u}(G_\delta)} \right), \quad (1.4)$$

где C не зависит от q ;

2° если выполнены условия

$$s - \frac{n}{p} > 0, \quad \left(b > 0 \quad \text{или} \quad s - \frac{\sigma(n-1) + 1 + \sigma a}{p} \neq 0 \right), \quad (1.5)$$

то для любого $q > p$, $q \geq r$

$$\|fw\|_{q,G} \leq C \left(\max \left\{ 1, \frac{1}{(q-p)^{\frac{q+1}{q}}} \right\} \sum_{|\beta|=s} \|D^\beta f\|_{L_{p,v}(G)} + \|f\|_{L_{r,u}(G_\delta)} \right), \\ \|fw\|_{\infty,G} \leq C \|f\|_{W_{p,v;r,u}^s(G)},$$

где C не зависит от q .

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия леммы 1, функция $\Phi = \Phi_\rho$ определена в (1). Тогда

1° если $\rho = p'$, $k_0 > p/p'$, $k_0 \geq r/p'$ и выполнены условия (1.3), то

$$W_{p,v;r,u}^s(G) \subset L_{\Phi,w}^*(G)$$

и справедлива оценка

$$\|fw\|_{L_{\Phi}^*(G)} \leq C \|f\|_{W_{p,v;r,u}^s(G)},$$

где постоянная C не зависит от f ;

2° если $\rho \in (0, \infty)$, $k_0 > p/\rho$, $k_0 \geq r/\rho$ и выполнены условия (1.5), то

$$W_{p,v;r,u}^s(G) \subset L_{\Phi,w}^*(G)$$

и справедлива оценка

$$\|fw\|_{L_{\Phi}^*(G)} \leq C_\rho \|f\|_{W_{p,v;r,u}^s(G)},$$

где постоянная C_ρ не зависит от f .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 1° теоремы 2 нельзя усилить, заменив $\Phi_{p'}$ на Φ_ρ ни при каком $\rho > p'$.

Именно, при $1 < p < \infty$, $r \geq 1$, $\rho > p'$, $a \geq 0$, $\sigma \geq 1$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $s \in \mathbb{N}$ и

$$s - \frac{\sigma(n-1) + 1 + \sigma a}{p} = 0,$$

можно указать область G с условием гибкого σ -конуса и функцию $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f \in W_{p,v;r,u}^s(G)$ и $f \notin L_\Phi^*(G)$ при $\Phi = \Phi_\rho$.

Интересно отметить, что в построенном примере область G имеет вид внешнего σ -пика, так что теорему 2 нельзя усилить даже для такой области G .

ТЕОРЕМА 3. Пусть G – область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$), $1 < p < \infty$, $1 \leq r < \infty$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $a \geq 1 - n$, $w(x) = \rho_1(x)^b$, $b \geq 0$ и выполнены условия (1.2), (1.5). Тогда каждая функция $f \in W_{p,v;r,u}^s(G)$ эквивалентна непрерывной на G функции $\tilde{f}$ и справедлива оценка

$$\|\tilde{f}w|C(G)\| \leq C\|f|W_{p,v;r,u}^s(G)\|,$$

где постоянная C не зависит от f .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка (1.4) была установлена в [5] с постоянной, зависимость которой от q не выяснялась. Указанная же в (1.4) зависимость от q играет решающую роль для доказательства вложения $W_{p,v;r,u}^s(G) \subset L_{\Phi,w}^*(G)$.

2. Доказательство основных результатов для интегральных операторов.

Воспользуемся результатами работ [14]–[16], содержащих весовые оценки слабого типа для операторов вида (2).

ТЕОРЕМА А [14]–[16]. Пусть $1 \leq p < q < \infty$, K – оператор из (2) с ядром k . Тогда

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{x \in G: |Kf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C_n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} \|kv^{-\frac{1}{p}}\|_{p,q} \|f|L_{p,v}(G)\|, \quad (2.1)$$

где C_n – некоторая постоянная, зависящая лишь от размерности n .

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для всех $q > p$ верна оценка слабого типа

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{x \in G: |Kf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq \tilde{C} \max\left\{1, \frac{1}{q-p}\right\} q^\alpha \|f|L_{p,v}(G)\|, \quad (2.2)$$

где $\tilde{C}$ не зависит от q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замечая, что $q^{\frac{1}{q}} \rightarrow 1$ при $q \rightarrow \infty$, имеем

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{pq}{q-p}\right)^{\frac{p}{q}} = (pq)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{q-p}\right)^{\frac{p}{q}} \leq C_1 \max\left\{1, \frac{1}{q-p}\right\}.$$

Теперь из (2.1) следует утверждение леммы.

Следующий результат является частным случаем интерполяционной теоремы Марцинкевича (см., например, [17]).

ТЕОРЕМА В. Пусть $1 \leq p < q_0 < q < q_1 < \infty$, $1/(2q_0) + 1/(2q_1) = 1/q$. Пусть для оператора K из (2) выполнены оценки слабого типа

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{x \in G : |Kf(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q_i}} \leq K_i \|f\|_{L_{p,v}(G)}, \quad i = 0, 1.$$

Тогда

$$\|Kf\|_{q,G} \leq MK_0^{\frac{1}{2}} K_1^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_{p,v}(G)}, \quad (2.3)$$

где

$$M = 2q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q - q_0} + \frac{1}{q_1 - q} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть сначала $q \in (p, p+1)$. Тогда для $q_0 = (p+q)/2$, $q_1 = q(p+q)/(2p)$ в силу (2.2) выполнены условия теоремы В с

$$K_i = \tilde{C} \frac{q_i^\alpha}{q_i - p}, \quad i = 0, 1.$$

Из (2.4) имеем

$$\begin{aligned} M &= 2q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q - \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{\frac{q(p+q)}{2p} - q} \right)^{\frac{1}{q}} = 2(pq)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{p(q-p)} + \frac{2}{q(q-p)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{2^{\frac{q+1}{q}} (pq)^{\frac{1}{q}}}{(q-p)^{\frac{1}{q}}} (p^{-1} + q^{-1})^{\frac{1}{q}} \leq \frac{2^{\frac{q+1}{q}} (pq)^{\frac{1}{q}}}{(q-p)^{\frac{1}{q}}} (2p^{-1})^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C'}{(q-p)^{\frac{1}{q}}}, \end{aligned}$$

где последняя оценка верна в силу того, что $1 \leq p < q < p+1$. При этом C' не зависит от $q \in (p, p+1)$;

$$K_0 K_1 = \tilde{C}^2 \frac{(q_0 q_1)^\alpha}{\left(\frac{p+q}{2} - p\right) \left(\frac{q(p+q)}{2p} - p\right)} \leq C_1 \frac{1}{(q-p)^2},$$

так как $1 \leq p < q < p+1$. Отсюда следует (1.1).

Пусть теперь $q \geq p+1$, $q_0 = \lambda q$, $q_1 = \mu q$, где $\lambda \in (p/(p+1), 1)$, $1/\lambda + 1/\mu = 2$. Тогда $1/(2q_0) + 1/(2q_1) = 1/q$ и, следовательно, в силу (2.2) выполнены условия теоремы В с

$$K_i = \tilde{C} q_i^\alpha, \quad i = 0, 1.$$

Из (2.4) имеем

$$M = 2q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{q - \lambda q} + \frac{1}{\mu q - q} \right)^{\frac{1}{q}} = 2 \left(\frac{1}{1 - \lambda} + \frac{1}{\mu - 1} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C'',$$

где C'' не зависит от $q \geq p+1$;

$$K_0 K_1 = \tilde{C}^2 (\lambda \mu q^2)^\alpha = C_2 q^{2\alpha}.$$

Таким образом, для любого $q > p$

$$MK_0^{\frac{1}{2}}K_1^{\frac{1}{2}} \leq C^* \max\left\{1, \frac{1}{(q-p)^{\frac{q+1}{q}}}\right\} q^\alpha,$$

откуда в силу (2.3) получаем (1.1). Первое утверждение теоремы 1 установлено.

Третье утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$\|f\|_{\infty, G} \leq \overline{\lim}_{q \rightarrow \infty} \|f\|_{q, G}.$$

Второе и четвертое утверждения вытекают из (1.1) с помощью известного рассуждения, когда от оценок слагаемых в разложении экспоненты переходят к оценке самой экспоненты (см., например, [6]).

3. Некоторые вспомогательные факты. Приведем некоторые предложения из работы [5].

Пусть G — область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$). Положим $r(x) = \delta \tilde{\rho}_1(x)$, где $\delta \in (0, 1)$, $\tilde{\rho}_1$ — некоторая регуляризация функции ρ_1 , $\frac{1}{2}\rho_1(x) \leq \tilde{\rho}_1(x) \leq \rho_1(x)$ при $x \in G$. Тогда при некотором $C_0 \geq 1$ для любого кусочно гладкого пути $\gamma: [0, t^*] \rightarrow G$ из определения 2

$$\left| \frac{d}{dt} r(\gamma(t)) \right| \leq C_0 \quad \text{для п.в. } t \in (0, t^*]. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА С. Пусть G — область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$), $x \in G$, $\gamma: [0, t^*] \rightarrow G$ — кусочно гладкий путь из определения 2. Тогда

$$|f(x)| \leq CA_1 \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + CA_2 \left(\sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha f| \right)(x) + CA_3 f(x), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 g(x) &= \int_0^{r(x)} t^{s-1-n} \int_{|y-x|<t} g(y) dy dt, \\ A_2 g(x) &= \int_0^{t^*} (t+r(x))^{s-1} r(\gamma(t))^{-n} \int_{|y-\gamma(t)|<r(\gamma(t))} g(y) dy dt, \\ A_3 f(x) &= \int_{|y-\gamma(t^*)|<r(\gamma(t^*))} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

4. Оценки для операторов A_1, A_2, A_3 . Рассмотрим операторы A_1, A_2, A_3 из теоремы С.

В этом разделе будем считать, что пути γ из определения 2 выбраны таким образом, что при некоторых $\varepsilon_0 \in (0, 1]$, $\tilde{C} > 0$

$$\int_0^{t^*} \frac{1}{r(\gamma(t))} \chi\left(\frac{y-\gamma(t)}{\varepsilon_0 r(\gamma(t))}\right) dt \leq \tilde{C},$$

где $\tilde{C}, \varepsilon_0$ не зависят от γ и y . Возможность такого выбора обоснована в [18], [5].

ЛЕММА 4.1. Пусть $1 \leq r < \infty$, $w(x) = \rho_1(x)^b$ ($b \geq 0$) и выполнено условие (1.2). Тогда для всех $q \geq r$

$$\|wA_3f|L_q(G)\| \leq C' \|A_3f|L_q(G)\| \leq C \|f|L_{r,u}(G_\delta)\|,$$

где C не зависит от q .

Эта лемма установлена в [5] для фиксированного q . Из доказательства видно, что постоянную C можно выбрать не зависящей от q .

Пусть вес $v(\cdot)$ удовлетворяют условию: существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 v(x) \leq v(y) \leq c_2 v(x) \quad \text{при} \quad |y - x| \leq \delta \rho_1(x), \quad x \in G. \quad (4.1)$$

Запишем операторы A_i в виде

$$A_i f(x) = \int_G k_i(x, y) f(y) dy, \quad i = 1, 2.$$

Установим оценки для ядер k_i . Имеем

$$\begin{aligned} |k_1(x, y, R)| &= \left(1 - \chi\left(\frac{y-x}{R}\right)\right) \int_0^{r(x)} t^{s-1-n} \chi\left(\frac{y-x}{t}\right) dt \\ &\leq C \chi_{B(x, r(x)) \setminus B(x, R)}(y) \cdot \begin{cases} |y-x|^{s-n} & \text{при } s < n, \\ \ln \frac{r(x)}{|y-x|} & \text{при } s = n, \\ r(x)^{s-n} & \text{при } s > n. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае $s - n/p > 0$ из [5] следует, что

$$\|k_1(x, \cdot, R) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{p', G} \leq C_1 \chi\left(\frac{R}{r(x)}\right) v(x)^{-\frac{1}{p}} r(x)^{s-\frac{n}{p}}.$$

В случае $s - n/p = 0$

$$\begin{aligned} \|k_1(x, \cdot, R) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{p', G} &\leq C \left(\int_{B(x, r(x)) \setminus B(x, R)} |y-x|^{(s-n)p'} v(y)^{-\frac{p'}{p}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_7 v(x)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_R^{r(x)} r^{n-1} r^{(s-n)p'} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= C_7 v(x)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_R^{r(x)} r^{-1} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_8 \chi\left(\frac{R}{r(x)}\right) v(x)^{-\frac{1}{p}} \left(\ln \frac{r(x)}{R} \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|k_1(x, \cdot, R) v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{p', G} \leq C \chi\left(\frac{R}{r(x)}\right) v(x)^{-\frac{1}{p}} \cdot \begin{cases} \left(\ln \frac{r(x)}{R} \right)^{\frac{1}{p'}} & \text{при } s - \frac{n}{p} = 0, \\ r(x)^{s-\frac{n}{p}} & \text{при } s - \frac{n}{p} > 0. \end{cases}$$

Через $(wk)(x, y, R)$ будем обозначать функцию $w(x)k(x, y, R)$.

Пусть выполнены условия леммы 1; тогда

$$s + b - \frac{n + a}{p} \geq s + b - \frac{\sigma(n - 1) + 1 + \sigma a}{p} \geq 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} |||(wk_1)v^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} &\leq C_1 \sup_{x \in G} \sup_{0 < R \leq \delta_{\rho_1(x)}} \chi\left(\frac{R}{\rho_1(x)}\right) \rho_1(x)^b \rho_1(x)^{-\frac{a}{p}} R^{\frac{n}{q}} \\ &\quad \times \begin{cases} (\ln \frac{\rho_1(x)}{R})^{\frac{1}{p'}} & \text{при } s - \frac{n}{p} = 0, \\ \rho_1(x)^{s - \frac{n}{p}} & \text{при } s - \frac{n}{p} > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае $s - n/p = 0$ из (4.3) и оценки

$$\ln t \leq \frac{t}{e} \quad \text{при } t \geq 1 \quad (4.4)$$

при $t = (\rho_1(x)/R)^{\frac{np'}{q}}$ имеем

$$\begin{aligned} |||(wk_1)v^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} &\leq C_1 \sup_{x \in G} \sup_{0 < R \leq \delta_{\rho_1(x)}} \chi\left(\frac{R}{\rho_1(x)}\right) \rho_1(x)^{b - \frac{a}{p}} R^{\frac{n}{q}} \left(\frac{q}{enp'} \left(\frac{\rho_1(x)}{R}\right)^{\frac{np'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_2 q^{\frac{1}{p'}} \sup_{x \in G} \rho_1(x)^{\frac{n}{q} - \frac{a}{p} + b} \leq C_2 q^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В случае $s - n/p > 0$

$$|||(wk_1)v^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} \leq C_1 \sup_{x \in G} \rho_1(x)^{s - \frac{n+a}{p} + \frac{n}{q} + b} \leq C_1; \quad (4.6)$$

оценки (4.5), (4.6) верны в силу (4.2).

В работе [5] установлено, что при выполнении условия (4.1) имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\|k_2(x, \cdot, R)v(\cdot)^{-\frac{1}{p}}\|_{p',G} \\ &\leq C \left\| \chi\left(\frac{R}{|\gamma(t) - x| + r(\gamma(t))}\right) (\cdot + r(x))^{s-1} r(\gamma(\cdot))^{\frac{1-n}{p}} v(\gamma(\cdot))^{-\frac{1}{p}} \right\|_{p', (0, t^*]}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть G — область с условием гибкого σ -конуса ($\sigma \geq 1$), $1 < p < \infty$, $v(x) = \rho_1(x)^a$, $a \geq 1 - n$, $w(x) = \rho_1(x)^b$, $b \geq 0$,

$$s + b - \frac{\sigma(n - 1) + 1 + \sigma a}{p} \geq 0.$$

Тогда для всех $q > p$

$$|||(wk_2)v^{-\frac{1}{p}}|||_{p,q} \leq C(q), \quad (4.8)$$

где

$$C(q) = C \cdot \begin{cases} q^{\frac{1}{p'}} & \text{при } b = 0, \quad s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} = 0, \\ 1 & \text{при } b > 0 \text{ или } s - \frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p} \neq 0, \end{cases}$$

причем постоянная C не зависит от q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $2r(\gamma(t)) \geq \kappa t^\sigma$, $t \in (0, t^*]$, и тогда из (4.7) имеем

$$\| (wk_2)v^{-\frac{1}{p}} \|_{p,q} \leq \sup_{x \in G} \sup_{R > 0} (J_1 + J_2),$$

где

$$\begin{aligned} J_1(x, R) &= \rho_1(x)^b \left(\int_0^{\tau_x} \chi \left(\frac{R}{3\rho_1(x)} \right) \rho_1(x)^{(s-1+\frac{1-n-a}{p})p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} R^{\frac{n}{q}}, \\ J_2(x, R) &= \rho_1(x)^b \left(\int_{\tau_x}^{t^*} \chi \left(\frac{R}{3C_0 t} \right) t^{(s-1)p'} t^{\sigma \frac{1-n-a}{p} p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} R^{\frac{n}{q}}, \\ \tau_x &= \min \left\{ t^*, \frac{1}{C_0} \rho_1(x) \right\}, \end{aligned}$$

C_0 взято из (3.1). Но

$$J_1(x, R) \leq C_1 \chi \left(\frac{R}{3\rho_1(x)} \right) \rho_1(x)^{s-\frac{n+a}{p}+\frac{n}{q}+b} \leq C_1,$$

где последнее неравенство верно в силу (4.2);

$$J_2(x, R) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{C_0} \rho_1(x) \geq t^*,$$

а при $\tau_x = \frac{1}{C_0} \rho_1(x) < t^*$ имеем следующее.

В случае $s - (\sigma(n-1) + 1 + \sigma a)/p < 0$

$$J_2(x, R) \leq C_2 \chi \left(\frac{R}{3C_0 t^*} \right) (\rho_1(x) + R)^{s-\frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p}+\frac{n}{q}+b} \leq C_2.$$

В случае $s - (\sigma(n-1) + 1 + \sigma a)/p > 0$

$$J_2(x, R) \leq C_3 \chi \left(\frac{R}{3C_0 t^*} \right) (t^*)^{s-\frac{\sigma(n-1)+1+\sigma a}{p}+\frac{n}{q}+b} \leq C_3.$$

В случае $s - (\sigma(n-1) + 1 + \sigma a)/p = 0$, используя оценку (4.4), получаем

$$\begin{aligned} J_2(x, R) &\leq C_4 \chi \left(\frac{R}{3C_0 t^*} \right) \left(\ln \frac{6C_0 t^*}{R + \rho_1(x)} \right)^{\frac{1}{p'}} (R + \rho_1(x))^{\frac{n}{q}+b} \\ &\leq C_5 \cdot \begin{cases} q^{\frac{1}{p'}} & \text{при } b = 0, \\ 1 & \text{при } b \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Из оценок, полученных для $J_1(x, R)$, $J_2(x, R)$, вытекает утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что оценки, аналогичные (4.5), (4.6) и (4.8), были установлены в [5] с постоянными, зависимость которых от q не выяснялась. Выяснение зависимости от q в (4.5), (4.6) и (4.8) понадобится для доказательства вложения $W_{p,v;r,u}^s(G) \subset L_{\Phi,w}^*(G)$.

5. Доказательство вложений пространства Соболева. Заметим, что если $v(x) = \rho_1(x)^a$, $a \geq 1 - n$, то условие (4.1) выполнено в силу оценки

$$|\rho_1(x) - \rho_1(y)| \leq |x - y|.$$

Доказательство леммы 1. Из леммы 4.1, а также утверждения 1° теоремы 1 (условия которого выполнены в силу (4.5), (4.6) и (4.8)), примененного к операторам wA_1 , wA_2 , получаем первое утверждение леммы.

Доказательство второй части леммы аналогично доказательству утверждения 3° теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 сводится в силу (3.2) к доказательству ограниченности операторов $wA_1, wA_2: L_{p,v}(G) \rightarrow L_{\Phi}^*(G)$, $wA_3: L_{r,u}(G_\delta) \rightarrow L_{\Phi}^*(G)$.

В силу (4.5), (4.6) и (4.8) ограниченность операторов wA_1, wA_2 следует из утверждения 2° теоремы 1.

Ограниченность оператора wA_3 доказывается в силу леммы 4.1 аналогично утверждению 4° теоремы 1.

Приведем пример, упомянутый в замечании 1, т.е. показывающий, что в теореме 2 в Φ нельзя заменить $\rho = p'$ ни на какое $\rho > p'$. Пусть $0 < R < 1/e$, область

$$G = \left\{ x \in B(0, R): x_1 \in (0, R), \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2} < x_1^\sigma \right\}.$$

Следуя Похожаеву [6], рассмотрим функцию

$$f = \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{\rho}} \ln \ln \frac{1}{t},$$

где $t = t(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} < R$, $\rho > p'$.

В [6] показано, что

$$|D^\alpha f| \leq C_\alpha \frac{1}{t^s} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} \ln \ln \frac{1}{t},$$

где C_α — постоянные ($|\alpha| = s$). Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_G |D^\alpha f|^{p_v} dx &\leq C_\alpha^p \int_G \left(\frac{1}{t^s} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} \ln \ln \frac{1}{t} \right)^p t^{a\sigma} dx \\ &\leq C \int_0^R \frac{t^{a\sigma} t^{\sigma(n-1)}}{t^{sp}} \left(\left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{\rho}-1} \ln \ln \frac{1}{t} \right)^p dt; \end{aligned}$$

в силу условий замечания 1 получаем при $d = (1 - \frac{1}{\rho})p > (1 - \frac{1}{p'})p = 1$

$$\int_G |D^\alpha f|^{p_v} dx \leq C \int_0^R \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-d} \left(\ln \ln \frac{1}{t} \right)^p \frac{dt}{t} = C \int_{\ln \frac{1}{R}}^\infty \frac{\ln^p \tau}{\tau^d} d\tau < \infty.$$

В силу $\sup_{x \in G_\delta} f(x) < \infty$ и локальной суммируемости u имеем $\|f|L_{r,u}(G_\delta)\| < \infty$. Таким образом, $f \in W_{p,v;r,u}^s(G)$.

Покажем, что $f \notin L_{\Phi}^*(G)$ при $\rho > p'$. Действительно, при произвольном $\lambda > 0$

$$\int_G e^{|\lambda f|^\rho} dx = C \int_0^R \frac{t^{(n-1)\sigma}}{t^{(\lambda \ln \ln \frac{1}{t})^\rho}} dt = \infty,$$

откуда следует, что

$$\int_G \Phi(\lambda|f|) dx = \infty,$$

что и завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $x^0 \in G$, $\text{dist}(x^0, \partial G) \geq 2\varepsilon > 0$. Тогда $f \in W_p^s(B(x^0, \varepsilon))$ и по теореме вложения Соболева (см., например, [1]) f в $B(x^0, \varepsilon)$ эквивалентна непрерывной функции. Отсюда и из последней части леммы 1 следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [2] Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
- [3] Решетняк Ю. Г. Интегральные представления функций в областях с негладкой границей // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.
- [4] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
- [5] Бесов О. В. Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 3. С. 3–26.
- [6] Похожаев С. И. О теореме вложения С. Л. Соболева в случае $pl = n$ // Докл. научно-технической конференции Московского энергетического ин-та. 1965. С. 158–170.
- [7] Юдович В. И. О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 4. С. 805–808.
- [8] Trudinger N. S. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications // J. Math. Mech. 1967. V. 17. № 5. P. 473–483.
- [9] Stampacchia G. The spaces $\mathcal{C}^{(p,\lambda)}$, $\mathfrak{H}^{(p,\lambda)}$ and interpolation // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa. Ser. III. 1965. V. 19. Fasc. 3. P. 443–462.
- [10] Брудный Ю. А. Пространства, определяемые с помощью локальных приближений // Тр. Моск. матем. об-ва. 1971. Т. 24. С. 69–132.
- [11] Moser J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 20. № 11. P. 1077–1092.
- [12] Edmunds D. E., Evans W. D. Orlicz and Sobolev spaces on unbounded domains // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1975. V. 342. P. 373–400.
- [13] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. 1 изд.. М.: Наука, 1975; 2 изд.. М.: Наука, 1996.
- [14] Кокилашвили В. М., Габидзашвили М. А. О весовых неравенствах для анизотропных потенциалов и целых функций // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 6. С. 1304–1306.
- [15] Габидзашвили М. А. Весовые неравенства для анизотропных потенциалов // Тр. Тбилисского матем. ин-та. 1986. Т. 82. С. 25–36.
- [16] Бесов О. В. Вложение пространств дифференцируемых функций переменной гладкости // Тр. МИАН. 1997. Т. 214. С. 25–58.
- [17] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [18] Kilpeläinen T., Malý J. Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries // Z. Anal. Anwendungen. 2000. V. 19. № 2. P. 369–380.