Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов, О дилатации сжимающих коциклов и коциклических возмущениях группы сдвигов на прямой, II, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 779–780

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2749>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:45:35

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ДИЛАТАЦИИ СЖИМАЮЩИХ КОЦИКЛОВ И КОЦИКЛИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ГРУППЫ СДВИГОВ НА ПРЯМОЙ, II

Г. Г. Амосов, А. Д. Баранов

Пусть $S = (S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ есть группа сдвигов в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$, действующая по формуле $(S_t f)(x) = f(x+t)$, $f \in H$. С группой S естественным образом связана фильтрация пространства H , образованная семейством подпространств $H_t \subset H$, состоящих из функций с носителями, принадлежащими интервалу $[-t, +\infty)$. Заметим, что $S_t H_0 = H_t$, $t \in \mathbb{R}$. Сильно непрерывное семейство ограниченных операторов $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется *коциклом* группы S , если выполнено условие

$$W_{t+s} = W_t S_t W_s S_{-t}, \quad s, t \geq 0, \quad W_0 = I$$

(I обозначает тождественный оператор), гарантирующее, что семейство ограниченных операторов $\tilde{S} = \{\tilde{S}_t = W_t S_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ образует C_0 -полугруппу ограниченных операторов. Полугруппа $\tilde{S}$ называется *коциклическим возмущением* S . Коцикл W называется *марковским*, если выполнено условие

$$W_t|_{H_t^\perp} = I, \quad t \geq 0.$$

В случае, если коцикл W состоит из унитарных операторов, его можно продолжить для отрицательных значений t так, что

$$W_{-t} = S_t W_t^* S_{-t}, \quad t \geq 0,$$

при этом марковское свойство может быть записано в виде

$$W_{-t}|_{H_0^\perp} = I, \quad t \geq 0.$$

Пусть $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — C_0 -группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве такая, что все меры, участвующие в спектральном представлении группы U сингулярны относительно меры Лебега. В [1] было показано, что, возмущая группу сдвигов S в $L^2(\mathbb{R})$ марковскими коциклами W со свойством

$$W_t - I \in \mathcal{S}_2, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

($\mathcal{S}_2$ — класс Гильберта–Шмидта), можно получить группу, унитарно эквивалентную группе $U \oplus S$. Более того, в [1] был приведен метод построения таких коциклов, основанный на теореме Ахерна и Кларка о триангуляции оператора сдвига в модельных подпространствах класса Харди.

В настоящем дополнении мы покажем, используя результаты статьи [1], что аналогичное утверждение имеет место для произвольной C_0 -группы унитарных операторов. Мы используем определения и обозначения из [1].

ТЕОРЕМА. Пусть U есть C_0 -группа унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Тогда группа $\tilde{S} = U \oplus S$ является коциклическим возмущением группы, унитарно эквивалентной группе S , марковским коциклом W со свойством (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно классической теореме Вейля–фон Неймана для всякого самосопряженного оператора G существует самосопряженный оператор $\tilde{G}$ с чисто точечным спектром такой, что $G - \tilde{G} \in \mathcal{S}_2$. Отсюда вытекает, что существует группа унитарных операторов $\tilde{U}$ такая, что $U_t - \tilde{U}_t \in \mathcal{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$, и меры, участвующие в спектральном представлении группы $\tilde{U}$, дискретны. Действительно, достаточно применить теорему Вейля–фон Неймана к генератору G группы U и положить $\tilde{U}_t = \exp(it\tilde{G})$. Тогда [2]

$$U_t - \tilde{U}_t = \int_0^t \tilde{U}_{t-s}(G - \tilde{G})U_s ds \in \mathcal{S}_2.$$

По теореме 3 из [1] группа $\tilde{U}$ унитарно эквивалентна группе $\tilde{V} = (\tilde{V}_t)_{t \in \mathbb{R}}$, действующей в некотором модельном пространстве $K = H_0 \ominus M_\Theta H_0$, такой, что группа $\tilde{V} \oplus S$ является с точностью до унитарной эквивалентности коциклическим возмущением группы S марковским коциклом W со свойством (1). При этом коцикл W имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{W}_t^* &= (\tilde{V}_t P_K + S_t P_E)S_{-t}P_{[t, +\infty)} + M_\Theta P_{[0, t]} + P_{H_0^\perp}, \\ \tilde{W}_{-t}^* &= S_{-t}\tilde{W}_t S_t, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Пусть унитарный оператор $\mathcal{U}$ осуществляет унитарную эквивалентность групп $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$, т.е. $\tilde{V} = \mathcal{U}\tilde{U}\mathcal{U}^{-1}$. Положим $V = \mathcal{U}U\mathcal{U}^{-1}$. Теперь достаточно определить марковский унитарный коцикл W формулой

$$\begin{aligned}W_t^* &= (V_t P_K + S_t P_E)S_{-t}P_{[t, +\infty)} + M_\Theta P_{[0, t]} + P_{H_0^\perp}, \\ W_{-t}^* &= S_{-t}W_t S_t, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Группа $V \oplus S$ является с точностью до унитарной эквивалентности коциклическим возмущением группы S коциклом W . В то же время, мы имеем $I - \tilde{W}_t \in \mathcal{S}_2$ и $\tilde{W}_t - W_t \in \mathcal{S}_2$, $t \in \mathbb{R}$, и, следовательно, коцикл W удовлетворяет (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенное выше рассуждение применимо как в случае сингулярного, так и в случае абсолютно непрерывного спектра группы U . Однако следует отметить, что в случае сингулярного спектра имеется явная конструкция коцикла W . Если же спектр имеет абсолютно непрерывную часть, то нам приходится ограничиться теоремой существования.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что генераторы G и $\tilde{G}$ группы сдвигов S и ее коциклического возмущения $\tilde{S}$ марковским коциклом удовлетворяют свойству $G - \tilde{G} \in S_1$ (класса со следом). Тогда $S_t - \tilde{S}_t \in S_1$, $t \in \mathbb{R}$. Абсолютно непрерывные части операторов G и $\tilde{G}$ унитарно эквивалентны согласно теореме Като–Розенблюма [2, с. 669]. Поскольку известно, что $\tilde{S}$ унитарно эквивалентна группе $U \oplus S$, получаем, что для данного случая спектральное представление группы U не содержит абсолютно-непрерывной составляющей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г., Баранов А. Д. // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 1. С. 3–18. 2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

(Г. Г. Амосов) Московский физико-технический институт
(А. Д. Баранов) Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: gramos@mail.ru
d.baranov@mail.ru

Поступило
28.09.2005
Исправленный вариант
22.11.2005