Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Ламбурт, Д. Д. Соколов, В. Н. Тутубалин, Поля Якоби вдоль геодезической со случайной кривизной, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 416–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 10:03:09

УДК 514.74

ПОЛЯ ЯКОБИ ВДОЛЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ КРИВИЗНОЙ

В. Г. Ламбурт, Д. Д. Соколов, В. Н. Тутубалин

Вводится понятие обновляющейся геодезической, на которой кривизна является случайным процессом. Показано, что модуль поля Якоби вдоль этой геодезической экспоненциально растет. В тоже время демонстрируется существование с вероятностью 1 бесконечного числа сопряженных точек.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Основные результаты геометрии в целом о строении римановых многообразий и поверхностей в трехмерном пространстве можно рассматривать в контексте противопоставления свойств объектов с положительной и отрицательной кривизной. Например, односвязные многообразия отрицательной кривизны гомеоморфны пространству Лобачевского (теорема Адамара–Картана), а односвязные многообразия положительной и не слишком сильно меняющейся кривизны гомеоморфны сфере (теорема о сфере) [1]. Другой пример: полные поверхности положительной кривизны во многих отношениях напоминают сферу (теория Александрова–Погорелова [2], [3]), зато в трехмерном евклидовом пространстве отсутствуют не только полные регулярные поверхности постоянной отрицательной кривизны (теорема Гильберта [4]), но и полные регулярные поверхности с отделенной от нуля отрицательной кривизной (теорема Ефимова [5]–[7]). В основе доказательства этих фактов лежит противопоставление свойств близких геодезических на многообразиях положительной и отрицательной кривизны. На первых геодезические имеют тенденцию образовывать сопряженные точки, а на вторых – экспоненциально разбегаются.

Между тем, хотелось бы получить какие-нибудь общие результаты о строении объектов со знакопеременной кривизной. Конечно, изучение внутренней геометрии конкретного многообразия знакопеременной кривизны или конкретной поверхности знакопеременной кривизны не вызывает принципиальных затруднений, однако неясно, как выделить общие свойства подобных объектов, которые и могли бы составить предмет содержательной теории.

В настоящей работе сделана попытка взглянуть на эту проблему с другой стороны. Идея заключается в рассмотрении не всех многообразий, а “почти всех”. Иными словами, предлагается ввести некоторую вероятностную меру на множестве многообразий и формулировать результаты, справедливые, например, для некоторого подмножества, имеющего меру 1.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00297.

В настоящей работе рассматривается поведение поля Якоби вдоль некоторой геодезической. Для того, чтобы рассмотреть всевозможные варианты многообразий знакопеременной кривизны, мы будем считать, что кривизна вдоль этой геодезической является случайным процессом, принимающим как положительные, так и отрицательные значения.

2. Обновляющийся геодезический луч и показатель Ляпунова. Рассмотрим на двумерном римановом многообразии M^2 семейство геодезических $\gamma(\theta, x)$, пересекающихся в заданной точке P . При этом θ – угол, отсчитываемый в точке P от некоторой геодезической Γ этого семейства, а x – длина вдоль геодезических. Тогда *полем Якоби* y в точке x , или *геодезическим отклонением* вдоль геодезической Γ называется величина

$$y(x) = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}. \quad (1)$$

Поле Якоби можно найти из уравнения Якоби (см. [1]), которое также называют *уравнением геодезических отклонений*:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + K(x)y = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) дополняется начальными условиями $y(0) = 0$ (т.е. геодезические лучи выпущены из точки P) и $y'(0) = 1$ (условие нормировки).

В дальнейшем мы будем считать кривизну $K(x)$ при $x > 0$ случайным процессом. Предположим далее, что полуось $[0, \infty)$ значений x разбита точками $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$ на части, на которых значения $K(x) = K_n(x)$ при $x_{n-1} \leq x < x_n$ статистически независимы между собой. Точки x_n мы будем называть точками *обновления*. Последовательность $\{x_n\}$ может быть случайной. В дальнейшем нам потребуется, чтобы первые разности этой последовательности $x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1} \dots$ были независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Также мы будем предполагать независимость точек обновления от всех процессов $K_n(x)$. Введем следующее определение, которое понадобится нам в дальнейшем:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Геодезический луч, кривизна вдоль которого описываются процессом $K(x)$ с вышеописанными свойствами, будем называть *обновляющимся*.

Величину $\omega_0 = 1/E\Delta x_n$ (знак E – знак математического ожидания) естественно назвать *средней частотой обновлений*. Мы будем предполагать существование $E(\Delta x_n)^2$ и, следовательно, отличие ω_0 от нуля.

Мы будем считать, что значение кривизны между точками обновления постоянно: $K(x) \equiv K_n$ при $x_{n-1} \leq x \leq x_n$. Таким образом, случайный процесс $K(x)$ сводится к последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{K_n\}$.

От случайных величин $\{K_n\}$ мы будем требовать существования плотности вероятностного распределения и существования математического ожидания $E|K_n|$.

Положим $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y'(x)/\omega_0$, где ω_0 средняя частота обновлений. Перепишем уравнение (2) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(x)A(x), \quad (3)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ – двумерный вектор-строка, а матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -K(x)/\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Мы разделили y' на ω_0 для того, чтобы придать компонентам вектора $\mathbf{z}$ одинаковую размерность. Отметим, что уравнение Якоби по форме совпадает с уравнением математического маятника с переменной (случайной) длиной.

Введем фундаментальную матрицу $B(s, x)$ системы (3), т.е. матрицу, обладающую свойством $\mathbf{z}(x) = \mathbf{z}(s)B(s, x)$ при $s < x$. Поскольку внутри интервалов обновления кривизна принимает постоянные значения, фундаментальная матрица имеет вид

$$B(x_{n-1}, x_n) = \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & -K_n/\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} \Delta x_n \right], \quad (5)$$

где $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Если $K_n \geq 0$, то

$$B(x_{n-1}, x_n) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_n} \Delta x_n & -\frac{\sqrt{K_n}}{\omega_0} \sin \sqrt{K_n} \Delta x_n \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{K_n}} \sin \sqrt{K_n} \Delta x_n & \cos \sqrt{K_n} \Delta x_n \end{pmatrix}; \quad (6)$$

если же $K_n \leq 0$, фундаментальная матрица имеет вид

$$B(x_{n-1}, x_n) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \sqrt{-K_n} \Delta x_n & \frac{\sqrt{-K_n}}{\omega_0} \operatorname{sh} \sqrt{-K_n} \Delta x_n \\ \frac{\omega_0}{\sqrt{-K_n}} \operatorname{sh} \sqrt{-K_n} \Delta x_n & \operatorname{ch} \sqrt{-K_n} \Delta x_n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В дальнейшем нам понадобится оценка сверху нормы фундаментальной матрицы. Следующую лемму несложно получить, используя (6), (7).

ЛЕММА 1. Пусть $x_{n-1} \leq a \leq b \leq x_n$. Тогда имеет место следующая оценка:

$$\max\{\|B(a, b)\|_\infty, \|B^{-1}(a, b)\|_\infty\} \leq \left(1 + \frac{\sqrt{|K_n|}}{\omega_0}\right) \exp(\sqrt{|K_n|} \Delta x_n), \quad (8)$$

где $\|B\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2\}}\{|B_{i1}| + |B_{i2}|\}$.

Благодаря мультипликативному свойству фундаментальной матрицы имеем

$$B(0, x_n) = B(0, x_1) \dots B(x_{n-1}, x_n). \quad (9)$$

Отметим, что при увеличении n новые матрицы дописываются в произведение (9) справа. Именно поэтому мы считаем $\mathbf{z}$ строкой, а не столбцом, поскольку в этом случае новые матрицы дописывались бы слева.

Мы будем интересоваться значениями вектора $\mathbf{z}(x)$ при стремлении x к бесконечности. Для этого выберем некоторую монотонно возрастающую к бесконечности последовательность. Последовательность может быть случайной; в этом случае требуется монотонное стремление этой последовательности к бесконечности с вероятностью 1. Примером такой случайной последовательности может служить последовательность обновлений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Показателем Ляпунова для обновляющегося геодезического луча, вычисленным по последовательности $\{a_n\} \uparrow \infty$, называется предел

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|z(a_n)\|}{a_n}. \quad (10)$$

Предел (10) понимается как предел с вероятностью 1 (почти наверное).

Поскольку все нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, показатель Ляпунова не зависит от выбора нормы в (10).

Ниже мы покажем, что при весьма широких условиях показатель Ляпунова существует и, более того, он не случаен и положителен. При доказательстве этих утверждений используются факты из теории Фюрстенберга, которые мы сформулируем в следующем разделе.

3. Теория Фюрстенберга. Теория Фюрстенберга предоставляет достаточно мощный аппарат для исследования произведений независимых случайных матриц. В настоящей главе мы сформулируем те из утверждений теории, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательства этих утверждений можно найти в [8], [9].

Пусть имеется последовательность независимых одинаково распределенных случайных матриц $B_n \in \mathbf{SL}(n)$. Пусть z_0 – произвольный единичный вектор; введем обозначение: $z_n = z_0 B_1 \dots B_n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если у какого-нибудь конечного произведения $B_1 \dots B_k$ существует плотность вероятностного распределения на группе $\mathbf{SL}(n)$, то с вероятностью 1 существует предел

$$\lambda^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|z_n\|}{n},$$

где λ^* – некоторая положительная константа.

Пусть u_n – единичный вектор, сонаправленный с вектором z_n . Случайный вектор u_n принимает значения на единичной сфере в n -мерном пространстве. отождествим противоположные точки сферы и обозначим получившееся случайное направление u_n^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. В условиях предыдущей теоремы последовательность u_n^* эргодична (т.е. по распределению $u_n^* \rightarrow u_\infty^*$ при $n \rightarrow \infty$), а λ^* вычисляется по формуле

$$\lambda^* = E \ln \|u_\infty^* B_n\|. \quad (11)$$

Отметим, что распределение вероятностей направления u_∞^* полностью определяется статистическими свойствами случайных матриц B_n . В тоже время, для нахождения этого распределения требуется решить некоторое интегральное уравнение, поэтому формула (11) не позволяет получить λ^* в явном виде. Однако эта формула оказывается удобной при доказательстве некоторых фактов.

4. Свойства показателя Ляпунова.

ТЕОРЕМА 1. Показатель Ляпунова для обновляющегося геодезического луча, вычисленный по последовательности обновлений, не случаен и положителен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку геодезический луч обновляется, сомножители, стоящие в произведении (9), независимы и одинаково распределены.

Покажем, что произведение трех сомножителей имеет плотность распределения на группе $\mathbf{SL}(2)$. Обозначим кривизны, определяющие каждую из трех матриц, k_1, k_2, k_3 . Поскольку случайные величины K_n независимы и имеют плотность распределения вероятностей, произведение трех матриц имеет вероятностную плотность в координатах k_1, k_2, k_3 .

Размерность группы $\mathbf{SL}(2)$ (как группы Ли) равна трем. Выберем какую-нибудь систему координат на этой группе: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для того, чтобы показать существование вероятностной плотности на группе, нужно убедиться в том, что якобиан преобразования $(k_1, k_2, k_3) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ отличен от нуля. Далее, поскольку выражения (6), (7) аналитичны, достаточно показать отличие якобиана преобразования от нуля лишь в одной точке, скажем в точке $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$. Последнее утверждение проверяется непосредственным подсчетом, который облегчается тем обстоятельством, что вычисления достаточно вести лишь с точностью до членов порядка квадрата кривизны.

Теперь из утверждения 1 следует, что с вероятностью 1 существует положительный и не случайный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{z}_n\|}{n} = \lambda^* > 0.$$

По усиленному закону больших чисел почти наверное $\lim n/x_n = \omega_0$. Поэтому

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{z}_n\|}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{z}_n\|}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = \lambda^* \omega_0 > 0, \quad (12)$$

что и требовалось доказать.

Пусть φ_n^* – направление вектора $\mathbf{z}(x_n)$, т.е. φ_n^* принимает значение на окружности со склеенными точками. В силу утверждения 2 из (12) следует формула для показателя Ляпунова:

$$\lambda^* = \omega_0 \mathbf{E} \ln \|\varphi_\infty^* B(x_n, x_{n+1})\|, \quad (13)$$

где φ_∞^* – предел последовательности $\{\varphi_n^*\}$, чья эргодичность следует из второго утверждения Фюрстенберга.

ТЕОРЕМА 2. Показатель Ляпунова для обновляющегося геодезического луча не зависит от выбора последовательности, по которой он вычисляется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_n\} \uparrow \infty$ – последовательность, по которой вычисляется показатель Ляпунова. Покажем, что его значение совпадает с показателем Ляпунова, вычисленным по последовательности обновлений. Пусть k_n – номер наибольшей точки обновления, не превосходящей a_n . Тогда $x_{k_n} \leq a_n \leq x_{k_n+1}$. Благодаря тому, что $\{a_n\} \uparrow \infty$, последовательность $\{k_n\} \uparrow \infty$. Далее при доказательстве будем использовать $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(a_n)\|}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(x_{k_n}) B(x_{k_n}, a_n)\|}{x_{k_n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{k_n}}{a_n}.$$

Покажем, что второй предел, стоящий в правой части равенства, равен 1:

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{k_n}}{a_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{k_n}}{x_{k_n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1.$$

Далее, используя неравенства для норм, получаем

$$\frac{\|\mathbf{z}(x_{k_n})\|}{\|B^{-1}(x_{k_n}, a_n)\|} \leq \|\mathbf{z}(x_{k_n})B(x_{k_n}, a_n)\| \leq \|\mathbf{z}(x_{k_n})\| \cdot \|B(x_{k_n}, a_n)\|.$$

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|B(x_{k_n}, a_n)\|}{x_{k_n}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|B^{-1}(x_{k_n}, a_n)\|}{x_{k_n}} = 0. \quad (14)$$

Воспользовавшись леммой 1, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|B(x_{k_n}, a_n)\|}{n} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{|K_n|}}{\omega_0} \right) \exp(\sqrt{|K_n|} \Delta x_n) \right\}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt{|K_n|}}{\omega_0} \right)}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{|K_n|} \Delta x_n}{n}. \end{aligned}$$

Каждый из двух получившихся пределов является пределом отношения ξ_n/n , где ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины. Такой предел равен 0 с вероятностью 1, если существует $E\xi$ (по неравенству Коши–Буняковского $E\sqrt{|K_n|}\Delta x_n \leq \sqrt{E|K_n| \cdot E\Delta x_n^2} < \infty$).

Мы показали равенство нулю первого из двух пределов, стоящих в (14). Равенство нулю второго предела доказывается аналогично.

Это приводит к требуемому равенству:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(a_n)\|}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(x_{k_n})\|}{x_{k_n}}.$$

Из теоремы 2 можно извлечь важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ. Показатель Ляпунова для невырожденного обновляющегося геодезического луча может быть вычислен как предел (с вероятностью 1)

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(x)\|}{x}. \quad (15)$$

При доказательстве этого факта нельзя просто сослаться на эквивалентность определений пределов по Коши и по Гейне, поскольку мы показали равенство предела (10) только для монотонных последовательностей a_n , а не для всех последовательностей, как того требует определение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрицание равенства (15), где предел определен по Коши, означает, что существует $\varepsilon > 0$ и последовательность $b_n \rightarrow \infty$ такая, что $|\ln \|\mathbf{z}(b_n)\|/b_n - \lambda| > \varepsilon$. Последовательность b_n может оказаться не монотонной, однако из нее можно выбрать монотонную подпоследовательность b_{n_k} такую, что показатель Ляпунова вычисленный по ней не равен λ . Такой результат входит в противоречие с теоремой 2.

5. Показатель Ляпунова обновляющейся геодезической. При определении обновляющегося геодезического луча мы рассматривали последовательность моментов обновления, начинающуюся в некоторой фиксированной точке P . Если рассмотреть последовательность обновлений занумерованную не натуральными числами, а целыми, т.е. “бесконечную в обе стороны”, то можно говорить об обновляющейся геодезической. Понятие обновляющейся геодезической вводится аналогично понятию обновляющегося геодезического луча.

ЛЕММА 2. *Обновляющиеся геодезические лучи, лежащие на одной и той же обновляющейся геодезической, обладают равными показателями Ляпунова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство показателей Ляпунова для разных геодезических лучей следует из формулы (13). В эту формулу входят исключительно вероятностные характеристики кривизны на интервале между точками обновления и вероятностные характеристики длины этого интервала. Эти характеристики постоянны для данной обновляющейся геодезической и не зависят от точки, являющейся началом луча.

Теперь мы можем сформулировать определение показателя Ляпунова обновляющейся геодезической.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Показателем Ляпунова λ обновляющейся геодезической называется предел (с вероятностью 1)*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\mathbf{z}(x)\|}{x}. \quad (16)$$

Заметим, что в определении (16) x стремится к ∞ , в то время как, в равенстве (15) x стремится к $+\infty$.

В определении 3 показатель Ляпунова определяется через вектор $\mathbf{z}$, компоненты которого выражаются через геодезическое отклонение. Геодезическое отклонение, в свою очередь, зависит от точки, которую мы зафиксировали на геодезической. Лемма 2 демонстрирует корректность данного определения.

Наконец мы можем сформулировать центральный результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. *Показатель Ляпунова обновляющейся геодезической неслучаен и положителен с вероятностью 1.*

Из теоремы 3 следует экспоненциальный рост модуля вектора $\mathbf{z}$ с асимптотически постоянной скоростью. В следующем разделе будет рассмотрено поведение отдельных компонент этого вектора.

6. Поведение геодезического отклонения. Выясним, как ведет себя геодезическое отклонение вдоль обновляющейся геодезической. Для этого рассмотрим предел

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \|y(x_n)\|}{x_n}. \quad (17)$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Предел (17) существует в смысле сходимости по вероятности и равен показателю Ляпунова λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ_n – угол наклона вектора $\mathbf{z}(x_n)$, а φ_n^* – его направление. Учитывая, что $\varphi_n^* \rightarrow \varphi_\infty^*$ по распределению, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |y_n(x_n)|}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\cos \varphi_n| |\mathbf{z}_n(x_n)|}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\cos \varphi_n^*| |\mathbf{z}_n(x_n)|}{x_n} \\ &= \lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\cos \varphi_n^*|}{x_n} = \lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\cos \varphi_n^*|}{n} \\ &= \lambda + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\cos \varphi_n^\infty|}{n} = \lambda. \end{aligned}$$

Это доказывает существование предела (17) по распределению. В общем случае сходимость по распределению слабее, чем сходимость по вероятности. Однако в случае сходимости к неслучайной константе эти два вида сходимости эквивалентны. Поскольку показатель Ляпунова не случаен, предел (17) существует и по вероятности. Что и требовалось доказать.

Теорема 4 дает наглядную геометрическую интерпретацию показателя Ляпунова обновляющейся геодезической.

ТЕОРЕМА 5. Если $\mathbf{P}\{K_n > 0\} > 0$, то с вероятностью 1 существует случайная последовательность $\{x'_n\} \uparrow \infty$ такая, что $y(x'_n) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathbf{P}\{K_n > 0\} > 0$, в силу счетной аддитивности вероятностной меры существует a^2 такое, что $\mathbf{P}\{K_n > a^2 k\} = p > 0$.

Построим следующую последовательность точек обновления x_{k_n} . Положим $x_{k_0} = x_0 = 0$. Далее пусть построено n точек. Тогда $x_{k_{n+1}}$ – первая точка обновления, расстояние от которой до точки x_{k_n} превосходит $\pi/\sqrt{k}$. Тогда для всех n получаем $x_{k_{n+1}} - x_{k_n} > \pi/\sqrt{k}$.

Пусть A_n – событие, состоящее в том, что $K(x) > a^2$ при $x \in [x_{k_n}, x_{k_{n+1}}]$. Поскольку A_n зависят от значений кривизны на разных участках обновления, события A_n независимы в совокупности. По формуле полной вероятности получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_n\} &= \mathbf{P}\{K(x) > a^2, x \in [x_{k_n}, x_{k_{n+1}}]\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{k_{n+1} - k_n = j\} \cdot \mathbf{P}\{K_i > a^2, i = k_n, \dots, k_n + j - 1\} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{k_{n+1} - k_n = j\} \cdot p^j = p_* > 0. \end{aligned}$$

Поскольку расстояния между соседними точками обновления являются независимыми случайными величинами, разности $k_{n+1} - k_n$ имеют одинаковые статистические свойства, так что p_* не зависит от n .

Если на отрезке длины π/a кривизна больше чем a^2 , то на этом отрезке y обратится в нуль. Следовательно, если произошло событие A_n , то на отрезке $[\pi n/a, \pi(n+1)/a]$ геодезическое отклонение y обратится в нуль. Далее имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_* = \infty.$$

Поскольку ряд расходится и события A_n независимы, по теореме Бореля–Кантелли заключаем, что с вероятностью 1 произойдет бесконечное число событий A_n . Иными

словами, с вероятностью 1 геодезическое отклонение $y(x)$ обратится в нуль бесконечное число раз.

Конечно, последовательность x'_n не совпадает с последовательностью обновлений x_n . Поэтому теорема 5 не противоречит теореме 4.

Заметим, что показатель Ляпунова нельзя определить по аналогии с (10) через геодезическое отклонение как предел при $n \rightarrow \infty$ последовательности $a_n^{-1} \ln |y(a_n)|$. Действительно, из теорем 3 и 4 следует, что этот предел существенно зависит от последовательности a_n .

7. Обсуждение. Введя определение обновляющейся геодезической, мы наложим весьма жесткие ограничения на случайный процесс $K(x)$. Представляется, что все доказанные результаты останутся справедливыми при существенно более слабых условиях. По-видимому, можно отказаться от требования постоянства кривизны между точками обновления. При этом требование существования плотности у случайных величин K_n должно быть заменено каким-нибудь требованием невырожденности для случайного процесса $K_n(x)$. Конечно, при этом явные выражения для фундаментальной матрицы (5), (6) будут содержать мультипликативный интеграл, но эта трудность кажется вполне преодолимой.

В теореме 4 показан экспоненциальный рост поля Якоби в смысле сходимости по вероятности. Несколько более тонкое исследование показывает, что рост происходит с вероятностью 1.

В той же теореме 4 доказан экспоненциальный рост поля Якоби, вычисленного в точках обновлений. Представляется, что экспоненциальный рост наблюдается не только в точках обновления, но и в “почти любой” случайной последовательности точек, не зависящей от значений кривизны. Заметим, что последовательность сопряженных точек x'_n , существование которой доказано в теореме 5, существенно зависит от значений кривизны. Конечно, формализация понятия “почти любой” представляет некоторую сложность.

Итак, мы обнаружили, что поведение поля Якоби на многообразии со случайной кривизной имеет общие черты как с многообразиями отрицательной, так и с многообразиями положительной кривизны. На первых близкие геодезические экспоненциально удаляются друг от друга, а на вторых имеют тенденцию образовывать сопряженные точки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Громов Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
- [2] Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
- [3] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1975.
- [4] Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
- [5] Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Матем. сб. 1968. Т. 64. № 2. С. 286–320.
- [6] Ефимов Н. В. Гиперболические задачи теории поверхностей. // Труды международного конгресса математиков (Москва, 1966). М.: Мир 1968. С. 177–188.
- [7] Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию “в целом”. М.: Наука, 1973.
- [8] Furstenberg H. A Poisson formula for semi-simple Lie groups // Ann. Math. 1963. V. 77. № 2. P. 335–386.
- [9] Furstenberg H. Noncommuting random products // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. № 3. P. 377–428.