Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Анзин, О плотности решетчатого покрытия для $n = 13$ и $n = 15$, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 781–784

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2750>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:28:37

О ПЛОТНОСТИ РЕШЕТЧАТОГО ПОКРЫТИЯ ДЛЯ $n = 13$ И $n = 15$

М. М. Анзин

1. Настоящая работа является продолжением работ [1], [2] и посвящена задаче о наименее плотных решетчатых покрытиях (см. [3]), которая состоит в отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n , которая дает наименьшее значение плотности $\theta_n(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ равными шарами.

Как и в [1], [2] мы сводим исследование функции $\theta_n(\Gamma)$ к исследованию функции $\eta_n(\Gamma)$:

$$\eta_n(\Gamma) = \eta_n(f_\Gamma) = \frac{D^2}{\sqrt[n]{\det f_\Gamma}} = \frac{(2R)^2}{\sqrt[n]{\det f_\Gamma}}, \quad (1)$$

где $D = D(\Gamma) = 2R$ – диаметр шара покрытия, $\det f_\Gamma$ – определитель матрицы положительной квадратичной формы f_Γ , отвечающей некоторому основному реперу решетки Γ . Очевидно, что $\eta_n(\Gamma) = 4(\theta_n(\Gamma)/\Omega_n)^{2/n}$, где Ω_n – объем n -мерного шара единичного радиуса.

Задача о наименее плотных решетчатых покрытиях полностью решена только для $n = 2, 3, 4, 5$ (см. [3]). Для других n известны только оценки. Существует гипотеза, что решетка Лича Λ_{24} дает абсолютный минимум функции $\eta_n(\Gamma)$ для $n = 24$: $\eta_{24}(\Lambda_{24}) = 8$. Оценки функции $\eta_n(\Gamma)$, лучшие (меньшие), чем $\eta_n(A_n^*) = n(n+2) \sqrt[n]{n+1}/(3n+3)$, были найдены для всех размерностей $n > 24$ в работах [4] и [5]. Для $5 < n < 24$ такие оценки получены только для: $n = 6$ – в [6], $n = 9$ – в [7], $n = 11, 14$ – в [1], [2] $n = 12$ – в [8], $n = 22, 23$ – в [9]. Настоящая работа посвящена подробному изложению аналогичного результата для $n = 13$ и $n = 15$, анонсированного в [10].

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \eta_{13} &\leq \eta_{13}(A_{13}^7) = \frac{248}{49} \sqrt[13]{\frac{7}{2}} = 5,573 \dots < \eta_{13}(A_{13}^*) = 5,687 \dots, \\ \eta_{15} &\leq \eta_{15}(A_{15}^8) = \frac{23}{4} \sqrt[15]{4} = 6,306 \dots < \eta_{15}(A_{15}^*) = 6,391 \dots, \end{aligned}$$

где $\eta_n = \inf_{\Gamma \subset \mathbb{E}^n} \eta_n(\Gamma) = \min_{\Gamma \subset \mathbb{E}^n} \eta_n(\Gamma)$, A_{13}^7 и A_{15}^8 – решетки Кокстера (см. [11]).

В пункте 3 мы приводим таблицы 1 и 2, информация в которых, фактически, и является доказательством основной теоремы. В свою очередь, таблицы 1 и 2 получены на основе полного описания строения L -разбиения решеток A_{13}^7 и A_{15}^8 (см. пункт 2, утверждения 1 и 2).

2. Как и в работах [1], [2] мы сводим исследование форм Кокстера A_{13}^7 и A_{15}^8 к исследованию эквивалентных им форм $\varphi^{(13,7)} \sim 2A_{13}^7$ и $\varphi^{(15,8)} \sim 2A_{15}^8$:

$$\varphi^{(n,r)}(\mathbf{x}) = q_1^2(\mathbf{x}) + q_2^2(\mathbf{x}) + \dots + q_{n+1}^2(\mathbf{x}),$$

где $q_i(\mathbf{x}) = x_i + x_n/r$, $i = 1, \dots, n-1$; $q_n(\mathbf{x}) = x_n/r$; $q_{n+1}(\mathbf{x}) = -x_1 - \dots - x_{n-1} - nx_n/r$.

Формы $\varphi^{(13,7)}$ и $\varphi^{(15,8)}$ имеют нижеследующие характеристики. Арифметический минимум $\min \varphi^{(13,7)} = 12/7$, $\min \varphi^{(15,8)} = 7/4$; число пар минимальных векторов $s(\varphi^{(13,7)}) = 91$, $s(\varphi^{(15,8)}) = 120$; определитель $\det \varphi^{(13,7)} = 2/7$, $\det \varphi^{(15,8)} = 1/4$. В обоих случаях порядок группы автоморфизмов

$$|G| = |G(\varphi^{(n,r)})| = 2(n+1)!.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. L -разбиение решетки $\varphi^{(13,7)}$ образовано многогранниками, конгруэнтными 10 попарно неэквивалентным L -многогранникам, характеристики которых указаны в таблице 1. Максимальное значение радиуса шара, описанного вокруг L -многогранника, достигается на многогранниках класса L_6 и квадрат радиуса решетчатого покрытия равен $R^2(\varphi^{(13,7)}) = 62/49$. Тем самым, $\eta_{13}(\varphi^{(13,7)}) = 248/49 \cdot \sqrt[13]{7/2} = 5,573 \dots$.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, проект 03-51-5070.

ТАБЛИЦА 1. Данные для формулы объемов решетки $\varphi^{(13,7)}$

L_α	R^2	#	Vol	$\mathcal{A}_\beta$	Центр описанного шара $\mathcal{A}_\beta$	$ \text{St}(\mathcal{A}_\beta) $
L_7	$1\frac{3}{14}$	14	1	$\boxed{\mathcal{A}_1}$	$(\frac{-5}{14})^2(\frac{5}{14})^2(\frac{-3}{14})^2(\frac{3}{14})^2(\frac{-1}{14})^2(\frac{1}{14})^2(\frac{-1}{2})^1(\frac{1}{2})^1$	128
L_5	$1\frac{101}{441}$	14	3	$\mathcal{A}_2$	$(\frac{-5}{21})^4(0)^3(\frac{8}{21})^3(\frac{2}{7})^2(\frac{-1}{7})^1(\frac{-13}{21})^1$	1728
				$\mathcal{A}_3$	$(\frac{5}{21})^4(\frac{-8}{21})^3(\frac{-1}{7})^3(\frac{1}{7})^2(\frac{-2}{7})^1(\frac{13}{21})^1$	1728
				$\mathcal{A}_4$	$(\frac{-4}{21})^4(\frac{4}{21})^4(\frac{-2}{7})^2(\frac{3}{7})^2(\frac{2}{7})^1(\frac{-4}{7})^1$	2304
				$\mathcal{A}_5$	$(\frac{-1}{3})^4(\frac{1}{21})^4(\frac{2}{7})^3(\frac{-3}{7})^1(\frac{4}{7})^1(\frac{1}{7})^1$	3456
				$\mathcal{A}_6$	$(\frac{-1}{21})^4(\frac{1}{3})^4(\frac{-3}{7})^3(\frac{-1}{7})^2(\frac{3}{7})^1$	6912
L_8	$1\frac{205}{882}$	14	3	$\mathcal{A}_7$	$(\frac{11}{42})^4(\frac{-17}{42})^3(\frac{-3}{14})^2(\frac{-1}{14})^2(\frac{1}{14})^2(\frac{25}{42})^1$	1152
				$\mathcal{A}_8$	$(\frac{-13}{42})^4(\frac{1}{42})^4(\frac{3}{14})^2(\frac{5}{14})^2(\frac{-1}{2})^1(\frac{1}{2})^1$	2304
				$\boxed{\mathcal{A}_9}$	$(\frac{-1}{6})^4(\frac{1}{6})^4(\frac{-5}{14})^2(\frac{5}{14})^2(\frac{-1}{2})^1(\frac{1}{2})^1$	4608
L_2	$1\frac{509}{2450}$	14	5	$\mathcal{A}_{10}$	$(\frac{13}{70})^6(\frac{-23}{70})^5(\frac{-1}{14})^2(\frac{47}{70})^1$	172800
				$\boxed{\mathcal{A}_{11}}$	$(\frac{-17}{70})^6(\frac{17}{70})^6(\frac{-1}{2})^1(\frac{1}{2})^1$	1036800
L_3	$1\frac{571}{2401}$	14	7	$\mathcal{A}_{12}$	$(\frac{-10}{49})^5(\frac{17}{49})^5(\frac{-1}{49})^3(\frac{-32}{49})^1$	86400
				$\mathcal{A}_{13}$	$(\frac{10}{49})^6(\frac{-17}{49})^4(\frac{-8}{49})^3(\frac{32}{49})^1$	103680
				$\mathcal{A}_{14}$	$(\frac{-11}{49})^6(\frac{11}{49})^5(\frac{20}{49})^2(\frac{-29}{49})^1$	172800
L_1	$1\frac{1}{7}$	15	21	$\mathcal{A}_{15}$	$(\frac{-1}{7})^7(\frac{2}{7})^6(\frac{-5}{7})^1$	3628800
				$\boxed{\mathcal{A}_{16}}$	$(\frac{-2}{7})^7(\frac{2}{7})^7$	50803200
L_4	$1\frac{23}{98}$	15	24	$\mathcal{A}_{17}$	$(\frac{-3}{14})^5(\frac{5}{14})^4(0)^3(\frac{-9}{14})^1(\frac{2}{7})^1$	17280
				$\mathcal{A}_{18}$	$(\frac{3}{14})^5(\frac{-5}{14})^4(\frac{-1}{7})^3(\frac{1}{7})^1(\frac{9}{14})^1$	17280
				$\mathcal{A}_{19}$	$(\frac{-3}{14})^5(\frac{3}{14})^5(\frac{3}{7})^2(\frac{-4}{7})^1(\frac{-2}{7})^1$	28800
				$\mathcal{A}_{20}$	$(\frac{-5}{14})^5(\frac{1}{14})^5(\frac{2}{7})^3(\frac{4}{7})^1$	86400
				$\mathcal{A}_{21}$	$(\frac{-1}{14})^5(\frac{5}{14})^5(\frac{-3}{7})^3(\frac{-1}{7})^1$	86400
L_9	$1\frac{25}{98}$	20	346	$\mathcal{A}_{22}$	$(\frac{5}{14})^5(\frac{-3}{14})^4(\frac{-1}{14})^4(\frac{-9}{14})^1$	69120
				$\mathcal{A}_{23}$	$(\frac{-3}{14})^6(\frac{3}{14})^4(\frac{5}{14})^3(\frac{-9}{14})^1$	103680
L_6	$1\frac{13}{49}$	23	1397	$\mathcal{A}_{24}$	$(\frac{-2}{7})^4(0)^3(\frac{1}{7})^3(\frac{3}{7})^3(\frac{-4}{7})^1$	5184
				$\mathcal{A}_{25}$	$(\frac{-1}{7})^4(\frac{1}{7})^3(\frac{2}{7})^3(\frac{-3}{7})^3(\frac{4}{7})^1$	5184
				$\mathcal{A}_{26}$	$(\frac{-2}{7})^4(0)^4(\frac{2}{7})^3(\frac{3}{7})^2(\frac{-4}{7})^1$	6912
				$\boxed{\mathcal{A}_{27}}$	$(\frac{-1}{7})^4(\frac{1}{7})^4(\frac{3}{7})^3(\frac{-3}{7})^3$	41472
L_0	$\frac{13}{14}$	28	12012	$\mathcal{A}_{28}$	$(\frac{1}{14})^{13}(\frac{-13}{14})^1$	6227020800

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. L -разбиение решетки $\varphi^{(15,8)}$ образовано многогранниками, конгруэнтными 10 попарно неэквивалентным L -многогранникам, характеристики которых указаны в таблице 2. Максимальное значение радиуса шара, описанного вокруг L -многогранника, достигается на многогранниках двух классов L_1 и L_2 , квадрат радиуса решетчатого покрытия равен $R^2(\varphi^{(15,8)}) = 23/16$. Тем самым, $\eta_{15}(\varphi^{(15,8)}) = 23/4 \cdot \sqrt[15]{4} = 6,306 \dots$

ТАБЛИЦА 2. Данные для формулы объемов решетки $\varphi^{(15,8)}$

$\mathbf{L}_\alpha$	R^2	$\#$	Vol	$\mathcal{A}_\beta$	Центр описанного шара $\mathcal{A}_\beta$	$ \text{St}(\mathcal{A}_\beta) $
$\mathbf{L}_4$	$1\frac{115}{288}$	16	6	$\mathcal{A}_1$	$(\frac{-1}{12})^4(\frac{5}{24})^3(\frac{7}{24})^3(\frac{-5}{12})^3(\frac{-1}{4})^2(\frac{7}{12})^1$	10368
				$\mathcal{A}_2$	$(\frac{-7}{24})^4(\frac{1}{24})^4(\frac{1}{3})^3(\frac{-1}{8})^2(\frac{5}{12})^2(\frac{-7}{12})^1$	13824
				$\mathcal{A}_3$	$(\frac{-1}{3})^4(\frac{1}{3})^4(\frac{-1}{24})^3(\frac{1}{24})^3(\frac{-1}{2})^1(\frac{1}{2})^1$	41472
$\mathbf{L}_8$	$1\frac{49}{128}$	18	92	$\mathcal{A}_4$	$(\frac{1}{4})^5(\frac{-3}{8})^4(\frac{-3}{16})^3(\frac{1}{16})^3(\frac{5}{8})^1$	103680
				$\mathcal{A}_5$	$(\frac{-1}{4})^5(\frac{1}{8})^5(\frac{5}{16})^3(\frac{-7}{16})^2(\frac{9}{16})^1$	172800
				$\mathcal{A}_6$	$(\frac{-3}{8})^5(0)^5(\frac{3}{16})^3(\frac{7}{16})^3$	518400
$\mathbf{L}_7$	$1\frac{59}{144}$	20	162	$\mathcal{A}_7$	$(\frac{-11}{48})^4(\frac{5}{48})^4(\frac{7}{16})^3(\frac{-5}{16})^2(\frac{3}{16})^2(\frac{-9}{16})^1$	13824
				$\mathcal{A}_8$	$(\frac{-1}{16})^4(\frac{13}{48})^4(\frac{-19}{48})^3(\frac{-5}{16})^2(\frac{3}{16})^2(\frac{29}{48})^1$	13824
				$\mathcal{A}_9$	$(\frac{-17}{48})^4(\frac{-1}{48})^4(\frac{5}{16})^4(\frac{1}{16})^2(\frac{-7}{16})^1(\frac{9}{16})^1$	27648
$\mathbf{L}_6$	$1\frac{53}{128}$	20	192	$\mathcal{A}_{10}$	$(\frac{1}{4})^5(\frac{-3}{8})^4(\frac{-1}{16})^4(\frac{-5}{16})^1(\frac{3}{16})^1(\frac{5}{8})^1$	69120
				$\mathcal{A}_{11}$	$(\frac{-1}{8})^5(\frac{1}{4})^5(\frac{-7}{16})^3(\frac{-3}{16})^1(\frac{5}{16})^1(\frac{9}{16})^1$	86400
				$\mathcal{A}_{12}$	$(0)^5(\frac{3}{8})^5(\frac{-5}{16})^4(\frac{-9}{16})^1(\frac{-1}{16})^1$	345600
$\mathbf{L}_9$	$1\frac{167}{400}$	20	270	$\mathcal{A}_{13}$	$(\frac{19}{80})^6(\frac{-29}{80})^5(\frac{-1}{16})^4(\frac{51}{80})^1$	2073600
				$\mathcal{A}_{14}$	$(\frac{-21}{80})^6(\frac{11}{80})^6(\frac{7}{16})^3(\frac{-9}{16})^1$	3110400
$\mathbf{L}_3$	$1\frac{13}{32}$	22	624	$\mathcal{A}_{15}$	$(\frac{-7}{16})^3(\frac{-3}{16})^3(\frac{-1}{16})^3(\frac{3}{16})^3(\frac{5}{16})^3(\frac{9}{16})^1$	7776
				$\mathcal{A}_{16}$	$(\frac{-1}{16})^4(\frac{3}{16})^3(\frac{5}{16})^3(\frac{-5}{16})^3(\frac{-7}{16})^2(\frac{9}{16})^1$	10368
				$\mathcal{A}_{17}$	$(\frac{5}{16})^4(\frac{-5}{16})^3(\frac{-1}{16})^3(\frac{1}{16})^3(\frac{-7}{16})^2(\frac{9}{16})^1$	10368
				$\mathcal{A}_{18}$	$(\frac{-3}{16})^4(\frac{-7}{16})^3(\frac{1}{16})^3(\frac{3}{16})^3(\frac{7}{16})^3$	31104
$\mathbf{L}_5$	$1\frac{13}{32}$	23	1620	$\mathcal{A}_{19}$	$(\frac{-1}{4})^5(0)^5(\frac{3}{8})^5(\frac{-5}{8})^1$	1728000
				$\mathcal{A}_{20}$	$(\frac{-1}{4})^6(\frac{1}{8})^5(\frac{3}{8})^4(\frac{-5}{8})^1$	2073600
				$\mathcal{A}_{21}$	$(0)^6(\frac{-3}{8})^5(\frac{3}{8})^5$	20736000
$\mathbf{L}_2$	$1\frac{7}{16}$	32	50968	$\mathcal{A}_{22}$	$(\frac{-5}{16})^4(\frac{-1}{16})^4(\frac{3}{16})^4(\frac{7}{16})^3(\frac{-9}{16})^1$	82944
$\mathbf{L}_0$	$\frac{15}{16}$	32	51480	$\mathcal{A}_{23}$	$(\frac{1}{16})^{15}(\frac{-15}{16})^1$	1307674368000
$\mathbf{L}_1$	$1\frac{7}{16}$	32	154440	$\mathcal{A}_{24}$	$(\frac{-3}{16})^8(\frac{5}{16})^7(\frac{-11}{16})^1$	203212800

3. Далее мы доказываем утверждения 1 и 2, для чего вначале при помощи (2) – формулы объемов (см. [2]) – проверяем полноту списка L -многогранников, указанных в таблицах 1 и 2. В обоих случаях формула объемов удовлетворена, что говорит о полноте списка. Далее квадрат радиуса покрытия находится как максимальное из значений в графе “ R^2 ” таблиц 1 и 2.

Имеем

$$\sum_{\beta=1}^{28} \frac{|G(\varphi^{(13,7)})| \cdot \text{Vol}_{\text{отн}}(\mathbf{L}_\alpha)}{|\text{St}(\mathcal{A}_\beta)| \cdot \#(\mathbf{L}_\alpha)} = n! = 13! \quad \text{и} \quad \sum_{\beta=1}^{24} \frac{|G(\varphi^{(15,8)})| \cdot \text{Vol}_{\text{отн}}(\mathbf{L}_\alpha)}{|\text{St}(\mathcal{A}_\beta)| \cdot \#(\mathbf{L}_\alpha)} = n! = 15!. \quad (2)$$

Далее основная теорема доказывается на основе утверждений 1 и 2 при помощи формулы (1).

Дадим краткие пояснения к таблицам 1 и 2 (более подробную информацию см. в [2]). В графе “ $\mathbf{L}_\alpha$ ” (в обоих случаях $\alpha = 0, \dots, 9$) указаны обозначения L -тел решеток $\varphi^{(13,7)}$ и $\varphi^{(15,8)}$. В графе “ R^2 ” – значение $R^2(\mathbf{L}_\alpha)$ – квадрата радиуса шара, описанного вокруг L -тела $\mathbf{L}_\alpha$. В графе “Vol” – относительный объем $\text{Vol}_{\text{отн}}(\mathbf{L}_\alpha)$ L -тел. В графе “ $\#$ ” – число вершин $\#(\mathbf{L}_\alpha)$ L -тел. В графе

“ $\mathcal{A}_\beta$ ” ($\beta = 1, \dots, 28$ и $\beta = 1, \dots, 24$, соответственно для $n = 13$ и $n = 15$) – обозначения арифметических типов L -тел $\mathbf{L}_\alpha$ ($\alpha = 0, \dots, 9$), входящих в L -звезду $\text{Star}(\mathbf{0})$ начальной точки решетки. В графе “Центр описанного шара $\mathcal{A}_\beta$ ” – степенная запись для арифметического типа центра шара, описанного вокруг L -тела, отвечающего $\mathcal{A}_\beta$. В графе “ $|\text{St}(\mathcal{A}_\beta)|$ ” – порядок группы стабилизатора для центра описанного шара, отвечающего $\mathcal{A}_\beta$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анзин М. М. // УМН. 2002. Т. 57. №2. С. 187–188.
2. Анзин М. М. О плотности решетчатого покрытия для $n = 11$ и $n = 14$ // К 70-летию со дня рожд. проф. Сергея Сергеевича Рышкова. Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 20–51.
3. Рышков С. С., Барановский Е. П. C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // Тр. МИАН, Т. 137. М.: Наука, 1976.
4. Рышков С. С. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. №2. С. 303–305.
5. Vambah R. P., Sloane N. J. A. // Acta Arithm. 1982. V. 42. P. 107–109.
6. Valentin F. Sphere coverings, lattices, and tilings (in Low Dimensions). D. Dissertation. Technische Universität München, 2003.
7. Baranovskii E. P. // Europ. J. Comb. 1994. V. 15. P. 317–323.
8. Анзин М. М. // Материалы VIII Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения”. МГУ. 2004. С. 374–377.
9. Smith W. D. Studies in computational geometry motivated by mesh generation: Ph.D. Diss. Dept. Appl. Math. Princeton Univ., 1988.
10. Анзин М. М. // Алгебра и теория чисел. Тез. докл. V Междунар. конф. Тула. 2003. С. 15–17.
11. Coxeter H. S. M. // Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 391–441.

E-mail: centr_on@mtu-net.ru

Поступило
19.08.2003
Исправленный вариант
10.10.2005

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ

О. В. Бесов

Везде далее f – 2π -периодическая непрерывная функция, $1 \leq p < \infty$,

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|,$$

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$S_n(f; x)$ – сумма Фурье функции f .

ТЕОРЕМА. Пусть f – 2π -периодическая непрерывная функция, $f \not\equiv \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq C \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \left\{ 1 + p \ln \left[1 + \frac{n^{\frac{1}{p}} \omega(f, \frac{1}{n})_p}{\omega(f, \frac{1}{n})} \right] \right\}, \quad (1)$$

где C не зависит ни от f , ни от n , ни от p .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-01050, программы “Ведущие научные школы”, проект НШ-1549.2003.1, и программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.