Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, Оценка приближения периодических функций суммами Фурье,
Матем. заметки, 2006, том 79, выпуск 5, 784–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 04:04:34

“ $\mathcal{A}_\beta$ ” ($\beta = 1, \dots, 28$ и $\beta = 1, \dots, 24$, соответственно для $n = 13$ и $n = 15$) – обозначения арифметических типов L -тел $\mathbf{L}_\alpha$ ($\alpha = 0, \dots, 9$), входящих в L -звезду $\text{Star}(\mathbf{0})$ начальной точки решетки. В графе “Центр описанного шара $\mathcal{A}_\beta$ ” – степенная запись для арифметического типа центра шара, описанного вокруг L -тела, отвечающего $\mathcal{A}_\beta$. В графе “ $|\text{St}(\mathcal{A}_\beta)|$ ” – порядок группы стабилизатора для центра описанного шара, отвечающего $\mathcal{A}_\beta$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анзин М. М. // УМН. 2002. Т. 57. №2. С. 187–188.
2. Анзин М. М. О плотности решетчатого покрытия для $n = 11$ и $n = 14$ // К 70-летию со дня рожд. проф. Сергея Сергеевича Рышкова. Тр. МИАН. 2002. Т. 239. С. 20–51.
3. Рышков С. С., Барановский Е. П. C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелепипеды (с приложением к теории покрытий) // Тр. МИАН, Т. 137. М.: Наука, 1976.
4. Рышков С. С. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. №2. С. 303–305.
5. Vambah R. P., Sloane N. J. A. // Acta Arithm. 1982. V. 42. P. 107–109.
6. Valentin F. Sphere coverings, lattices, and tilings (in Low Dimensions). D. Dissertation. Technische Universität München, 2003.
7. Baranovskii E. P. // Europ. J. Comb. 1994. V. 15. P. 317–323.
8. Анзин М. М. // Материалы VIII Междунар. семинара “Дискретная математика и ее приложения”. МГУ. 2004. С. 374–377.
9. Smith W. D. Studies in computational geometry motivated by mesh generation: Ph.D. Diss. Dept. Appl. Math. Princeton Univ., 1988.
10. Анзин М. М. // Алгебра и теория чисел. Тез. докл. V Междунар. конф. Тула. 2003. С. 15–17.
11. Coxeter H. S. M. // Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 391–441.

E-mail: centr_on@mtu-net.ru

Поступило
19.08.2003
Исправленный вариант
10.10.2005

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ

О. В. Бесов

Везде далее f – 2π -периодическая непрерывная функция, $1 \leq p < \infty$,

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|,$$

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

$S_n(f; x)$ – сумма Фурье функции f .

ТЕОРЕМА. Пусть f – 2π -периодическая непрерывная функция, $f \not\equiv \text{const}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq C \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \left\{ 1 + p \ln \left[1 + \frac{n^{\frac{1}{p}} \omega(f, \frac{1}{n})_p}{\omega(f, \frac{1}{n})} \right] \right\}, \quad (1)$$

где C не зависит ни от f , ни от n , ни от p .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-01050, программы “Ведущие научные школы”, проект НШ-1549.2003.1, и программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Отсюда следует, в частности, достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье 2π -периодической непрерывной функции f , состоящее в том, что при некоторой последовательности $\{p_n\}_1^\infty$, $1 \leq p_n < \infty$,

$$p_n \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \ln \left[1 + \frac{n^{\frac{1}{p_n}} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) p_n}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)}\right] \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Этот признак равномерной сходимости установлен в [1]. Там же показано, что он обобщает признак Дини-Липшица [2, гл. II, п. 10.3] и признак Яно [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе Сато [4] анонсировано утверждение теоремы при $p = 1$; доказательство же опирается на теорему из другой работы Сато, в которой переход к оценке $|J|$ представляется необоснованным. Оценка (1) при $p = 1$, в которой $n\omega(f, 1/n)_1$ заменено на $V(f)$ (вариацию функции f), имеется у С. Б. Стечкина [5].

ЛЕММА. Пусть f — 2π -периодическая непрерывная функция, $n \in \mathbb{N}$, $\eta = \pi/n$. Тогда при $\eta < \pi/2$

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi-\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t+\eta)|}{t} dt + c_\eta \omega(f, \eta), \quad (3)$$

где $c_\eta = 13 + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{\pi^2}{2(\pi-2\eta)^2\eta}$,

$$\phi(t) = \phi_x(t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$S_n^*(x) = \frac{1}{2} \{S_n(f, x) + S_{n-1}(f, x)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |S_n(f, x) - S_n^*(x)| &= \frac{1}{2} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \omega(f, \eta), \\ f(x) - S_n^*(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \phi(t) \frac{\sin nt}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt \end{aligned}$$

(см. [2, гл. II, § 10]). Положим $\psi(t) = \phi(t)/(2 \operatorname{tg}(t/2))$. Тогда, пользуясь тем, что последний интеграл представляет собой синус-коэффициент Фурье, имеем

$$\begin{aligned} \pi(f(x) - S_n^*(x)) &= 2 \int_0^\pi \psi(t) \sin nt dt = -2 \int_{-\eta}^{\pi-\eta} \psi(t+\eta) \sin nt dt \\ &= \int_{\eta}^{\pi-\eta} [\psi(t) - \psi(t+\eta)] \sin nt dt + \int_{\pi-\eta}^\pi \psi(t) \sin nt dt \\ &\quad + \int_0^\eta \psi(t) \sin nt dt - \int_{-\eta}^\eta \psi(t+\eta) \sin nt dt = I + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$|I_2| + |I_3| \leq 2n \int_0^{2\eta} |\phi(t)| dt \leq 8\pi\omega(f, \eta).$$

Поскольку $\omega(f, t)/t \leq 2\omega(f, \eta)/\eta$ при $0 < \eta < t$,

$$|I_1| \leq \int_{\pi-\eta}^\pi \frac{|\phi(t)|}{t} dt \leq \int_{\pi-\eta}^\pi 4 \frac{\omega(f, \eta)}{\eta} dt \leq 4\pi\omega(f, \eta).$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно оценить

$$I = \int_{\eta}^{\pi-\eta} \frac{\phi(t) - \phi(t+\eta)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} \sin nt \, dt + \int_{\eta}^{\pi-\eta} \phi(t+\eta) \left\{ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} - \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{t+\eta}{2}} \right\} \sin nt \, dt = I' + I''.$$

Интеграл I' оценивается так:

$$|I'| \leq A := \int_{\eta}^{\pi-\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t+\eta)|}{t} \, dt.$$

Собирая оценки, имеем

$$\pi|f(x) - S_n(f, x)| \leq A + 13\pi\omega(f, \eta) + |I''|, \quad (4)$$

где

$$-I'' = \frac{1}{2} \int_{2\eta}^{\pi} \phi(t) \frac{\sin \frac{\eta}{2}}{\sin \frac{t-\eta}{2} \sin \frac{t}{2}} \sin nt \, dt$$

можно рассматривать как синус-коэффициент. Снова применяя сдвиг на η переменной интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} -I'' &= \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \left\{ \frac{\phi(t)}{\sin \frac{t-\eta}{2} \sin \frac{t}{2}} - \frac{\phi(t+\eta)}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{t+\eta}{2}} \right\} \sin nt \, dt \\ &\quad - \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{\eta}^{2\eta} \frac{\phi(t+\eta)}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{t+\eta}{2}} \sin nt \, dt \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{\pi-\eta}^{\pi} \frac{\phi(t) \sin nt \, dt}{\sin \frac{t-\eta}{2} \sin \frac{t}{2}} = J + J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Очевидны следующие оценки:

$$|J_1| + |J_2| \leq \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_0^{\eta} \frac{|\phi(t)| |nt \, dt|}{\sin \frac{t}{2} \sin \frac{\eta}{2}} + \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{\pi-\eta}^{\pi} \frac{|\phi(t)| \, dt}{\sin^2 \frac{\pi-2\eta}{2}} \leq \frac{1}{4} \pi^3 \omega(f, \eta) + \frac{\eta}{2} \frac{\pi^3}{(\pi-2\eta)^2} \omega(f, \eta).$$

Преобразуя интеграл J так же, как это проделывалось для I , имеем

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \frac{\phi(t) - \phi(t+\eta)}{\sin \frac{t-\eta}{2} \sin \frac{t}{2}} \sin nt \, dt \\ &\quad + \frac{1}{4} \sin \frac{\eta}{2} \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \phi(t+\eta) \left\{ \frac{1}{\sin \frac{t-\eta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t+\eta}{2}} \right\} \frac{\sin nt}{\sin \frac{t}{2}} \, dt = J' + J''. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} |J'| &\leq \frac{\eta}{8} \pi^2 \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \frac{|\phi(t) - \phi(t+\eta)|}{(t-\eta)^2} \, dt \leq \frac{\eta}{4} \pi^2 \omega(f, \eta) \int_{\eta}^{\pi-2\eta} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{4} \pi^2 \omega(f, \eta), \\ |J''| &\leq \frac{\pi^3}{2} \sin^2 \frac{\eta}{2} \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \frac{|\phi(t+\eta)|}{(t-\eta)(t+\eta)} \frac{dt}{t} \leq \frac{\pi^3 \eta^2}{4} \int_{2\eta}^{\pi-\eta} \frac{\omega(f, t+\eta)}{t+\eta} \frac{dt}{(t-\eta)^2} \leq \frac{\pi^3}{4} \omega(f, \eta). \end{aligned}$$

Учитывая (4) и собирая дальнейшие оценки, имеем

$$\pi|f(x) - S_n(f, x)| \leq A + \left[13\pi + \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{1}{2} \pi^3 + \frac{\pi^3}{2(\pi-2\eta)^2} \eta \right] \omega(f, \eta).$$

Доказательство теоремы. В силу леммы для доказательства теоремы достаточно учесть лишь оценку интеграла A , полученную в [1]:

$$A \leq 4p\omega(f, \eta) \ln \left[1 + \frac{n^{\frac{1}{p}} \omega(f, \eta)_p}{\omega(f, \eta)} \right].$$

Замечание. Оценку, близкую оценке (1), получил ранее В. В. Жук [6, с. 241]. Представление о ее характере можно получить, если формально в (1) заменить C на число $2/\pi^2$, а множитель p перед логарифмом – на $C(p)$ (зависимость $C(p)$ от p не выяснялась).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Признак равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. 2003. 2. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 3. Yano K. // Proc. Japan. Acad. 1957. V. 33. №2. P. 73–74. 4. Satō M. // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. №5. P. 261–263. 5. Стечкин С. Б. // УМН. 1952. Т. 7. №4. С. 139–141. 6. Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

02.02.2004

Исправленный вариант

27.12.2005

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С БОЛЬШИМ ПОТЕНЦИАЛОМ, СОСРЕДОТОЧЕННЫМ НА МАЛОМ МНОЖЕСТВЕ

А. Р. Бикметов, Р. Р. Гадыльшин

Всюду далее Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат и имеющая бесконечно дифференцируемую границу Γ , $n \geq 2$, λ_0 – простое собственное значение краевой задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B} \psi_0 = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $\mathbf{B}$ – граничный оператор любого из граничных условий Дирихле или Неймана, ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $0 < \alpha < 1$ – произвольное фиксированное число.

Обозначим $V_1(\xi) := V(\xi) \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i$, $V_2(\xi) := V(\xi) \sum_{i,j=1}^n \phi_i \phi_j \xi_i \xi_j$, где $\phi_i = \partial \psi_0 / \partial x_i$ при $x = 0$, а через $\langle v \rangle$ обозначим среднее значение функции v в $\mathbb{R}^n$. Содержанием настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Существует единственное и, к тому же, простое собственное значение λ^ε краевой задачи*

$$\left(-\Delta + \varepsilon^{-\alpha} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B} \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

сходящееся к λ_0 . Асимптотика λ^ε имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n-\alpha} (\psi_0^2(0) \langle V \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0), \langle V \rangle &\neq 0, \\ \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n+1-\alpha} (2\psi_0 \langle V_1 \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0) \neq 0, \quad \langle V \rangle &= 0, \\ \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n+2-\alpha} (\langle V_2 \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ниже будет также приведено представление для соответствующей собственной функции ψ^ε .

Далее будем использовать следующие обозначения: $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|_{0,Q}$ – норма в $L_2(Q)$, $\|\cdot\|_{m,Q}$ – норма в $W_2^m(Q)$, $\beta_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$, $\beta_n(\varepsilon) = \varepsilon^2$ при $n \geq 3$.

Пусть M, G – произвольные ограниченные области и M содержит начало координат. Обозначим через εG – сжатие области G в ε^{-1} раз. В [1] и [2] соответственно для $n \geq 3$ и $n = 2$ было доказано, что для любой функции $u \in W_2^1(M)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_1(M) \beta_n(\varepsilon) \|\nabla u\|_{0,M}^2, \quad (3)$$

Первый автор был поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 05-01-97912-р.агидель, второй – программами “Университеты России”, УР 04.01.484, и “Ведущие научные школы”, НШ-1446.2003.1.