Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Бикметов, Р. Р. Гадыльшин, О спектре оператора Шрёдингера с большим потенциалом, сосредоточенным на малом множестве, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 787–790

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2752>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:55:51

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Признак равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. 2003. **2**. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. **3**. Yano K. // Proc. Japan. Acad. 1957. V. 33. №2. P. 73–74. **4**. Satō M. // Proc. Japan Acad. 1955. V. 31. №5. P. 261–263. **5**. Стечкин С. Б. // УМН. 1952. Т. 7. №4. С. 139–141. **6**. Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

02.02.2004

Исправленный вариант

27.12.2005

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С БОЛЬШИМ ПОТЕНЦИАЛОМ, СОСРЕДОТОЧЕННЫМ НА МАЛОМ МНОЖЕСТВЕ

А. Р. Бикметов, Р. Р. Гадыльшин

Всюду далее Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат и имеющая бесконечно дифференцируемую границу Γ , $n \geq 2$, λ_0 – простое собственное значение краевой задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B} \psi_0 = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $\mathbf{B}$ – граничный оператор любого из граничных условий Дирихле или Неймана, ψ_0 – соответствующая нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $0 < \alpha < 1$ – произвольное фиксированное число.

Обозначим $V_1(\xi) := V(\xi) \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i$, $V_2(\xi) := V(\xi) \sum_{i,j=1}^n \phi_i \phi_j \xi_i \xi_j$, где $\phi_i = \partial \psi_0 / \partial x_i$ при $x = 0$, а через $\langle v \rangle$ обозначим среднее значение функции v в $\mathbb{R}^n$. Содержанием настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Существует единственное и, к тому же, простое собственное значение λ^ε краевой задачи*

$$\left(-\Delta + \varepsilon^{-\alpha} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \psi^\varepsilon = \lambda^\varepsilon \psi^\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B} \psi^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

сходящееся к λ_0 . Асимптотика λ^ε имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n-\alpha} (\psi_0^2(0) \langle V \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0), \langle V \rangle &\neq 0, \\ \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n+1-\alpha} (2\psi_0 \langle V_1 \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0) \neq 0, \quad \langle V \rangle &= 0, \\ \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon^{n+2-\alpha} (\langle V_2 \rangle + o(1)), & \text{если } \psi_0(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ниже будет также приведено представление для соответствующей собственной функции ψ^ε .

Далее будем использовать следующие обозначения: $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|_{0,Q}$ – норма в $L_2(Q)$, $\|\cdot\|_{m,Q}$ – норма в $W_2^m(Q)$, $\beta_2(\varepsilon) = \varepsilon^2 |\ln \varepsilon|$, $\beta_n(\varepsilon) = \varepsilon^2$ при $n \geq 3$.

Пусть M, G – произвольные ограниченные области и M содержит начало координат. Обозначим через εG – сжатие области G в ε^{-1} раз. В [1] и [2] соответственно для $n \geq 3$ и $n = 2$ было доказано, что для любой функции $u \in W_2^1(M)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_1(M) \beta_n(\varepsilon) \|\nabla u\|_{0,M}^2, \quad (3)$$

Первый автор был поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 05-01-97912-рагидель, второй – программами “Университеты России”, УР 04.01.484, и “Ведущие научные школы”, НШ-1446.2003.1.

где постоянная C_1 не зависит от ε . Пусть M – произвольная область такая, что $\overline{\Omega} \subset M$. Так как существует линейный ограниченный оператор продолжения $P: W_2^1(\Omega) \rightarrow \overset{0}{W}_2^1(M)$ (см., например, [3]), то для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$ из (3) очевидным образом следует неравенство

$$\|u\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_2 \beta_n(\varepsilon) \|u\|_{1,\Omega}^2 dx, \quad (4)$$

где постоянная C_2 не зависит от ε . Не ограничивая общности, будем считать, что носитель функции V лежит в G .

Обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$ (через $\mathcal{B}(X)$) банахово пространство линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y (в банахово пространство X). Далее, обозначим через $\mathcal{A}(\lambda)$ оператор, ставящий в соответствие функции $g \in L_2(\Omega)$ решение $u_0 \in W_2^2(\Omega)$ краевой задачи

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 - g, \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B} u_0 = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (5)$$

через $L_2^\perp(\Omega)$ – подпространство функций из $L_2(\Omega)$, ортогональных ψ_0 , через $\mathcal{P}$ – проектор $L_2(\Omega)$ на $L_2^\perp(\Omega)$, а через $\mathcal{A}^\perp(\lambda)$ – оператор, ставящий в соответствие функции $g \in L_2^\perp(\Omega)$ решение $u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap L_2^\perp(\Omega)$ краевой задачи (5).

Хорошо известно (см., например, [3]), что при λ , близких к λ_0 , оператор $\mathcal{A}(\lambda)$ представим в виде

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{(\bullet, \psi_0)}{\lambda - \lambda_0} \psi_0 + \mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}, \quad (6)$$

$$\mathcal{A}^\perp(\lambda) \in \mathcal{B}(L_2^\perp(\Omega), W_2^2(\Omega)), \quad \mathcal{A}(-1) \in \mathcal{B}(L_2(\Omega), W_2^2(\Omega)). \quad (7)$$

ЛЕММА 1. Для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{A}(-1)g\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_3 \beta_n(\varepsilon) \|g\|_{0,\Omega}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство (4), интегрирование по частям, неравенство Коши–Буняковского и (7) выводим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(-1)g\|_{0,\varepsilon G}^2 &= \|u_0\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_2 \beta_n(\varepsilon) \|u_0\|_{1,\Omega}^2 = -C_2 \beta_n(\varepsilon) (u_0, (\Delta - 1)u_0) \\ &= -C_2 \beta_n(\varepsilon) (u_0, g) \leq C_2 \beta_n(\varepsilon) \|g\|_{0,\Omega} \|u_0\|_{0,\Omega} \leq C_3 \beta_n(\varepsilon) \|g\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}g\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_5 \beta_n(\varepsilon) \|g\|_{0,\Omega}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу леммы 1 и (7) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}g\|_{0,\varepsilon G}^2 &= \|\mathcal{A}(-1)(\Delta - 1)\mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}g\|_{0,\varepsilon G}^2 \leq C_3 \beta_n(\varepsilon) \|(\Delta - 1)\mathcal{A}^\perp(\lambda)g\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C_4 \beta_n(\varepsilon) \|\mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}g\|_{2,\Omega}^2 \leq C_5 \beta_n(\varepsilon) \|g\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{B}^{\text{hol}}(X)$ множество голоморфных операторнозначных функций со значениями в $\mathcal{B}(X)$. Так как $\mathcal{A}(\lambda)$ – компактная резольвента замкнутого самосопряженного оператора в $L_2(\Omega)$, хорошо известно (см., например, [4, гл. 5, § 3.5]), что

$$\mathcal{A}^\perp(\lambda) \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L_2^\perp(\Omega)) \quad \text{при } \lambda, \text{ близких к } \lambda_0. \quad (8)$$

Обозначим

$$V_\varepsilon(x) := V(\varepsilon^{-1}x), \quad T_\varepsilon(\lambda) := \varepsilon^{-\alpha} V_\varepsilon \mathcal{A}^\perp(\lambda) \mathcal{P}. \quad (9)$$

Из (8), (9) и леммы 2 следует, что

$$T_\varepsilon(\lambda) \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L_2(\Omega)), \quad \|T_\varepsilon(\lambda)\|^2 \leq C_6 \varepsilon^{-2\alpha} \beta_n(\varepsilon). \quad (10)$$

Обозначим

$$S_\varepsilon(\lambda) := (I - T_\varepsilon(\lambda))^{-1}, \quad (11)$$

где I – тождественный оператор. Из (10) и (11) следует, что

$$S_\varepsilon(\lambda) \in \mathcal{B}^{\text{hol}}(L_2(\Omega)). \quad (12)$$

ЛЕММА 3. При λ , достаточно близких к λ_0 , и $\varepsilon \rightarrow 0$ функция

$$F_\varepsilon(\lambda) := -\lambda + \lambda_0 + \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) \quad (13)$$

- а) имеет единственный нуль λ^ε , причем, первого порядка;
б) λ^ε имеет асимптотику (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства пункта а) достаточно показать, что

$$\varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (14)$$

Тогда справедливость утверждения а) будет вытекать из (12) и теоремы Руше (см., например, [5, гл. 5, § 2, п. 75]). Из (10) и (11) следует, что для любого $N > 2$ справедливо представление

$$(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) = (V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) + \sum_{j=1}^{N-1} (T_\varepsilon^j(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) + O(\varepsilon^{-N\alpha}\beta_n^{\frac{N}{2}}(\varepsilon)). \quad (15)$$

В силу произвола в выборе N остаток в правой части можно сделать меньше любой степени ε . С другой стороны, из определения оператора $T_\varepsilon(\lambda)$ и метода согласования асимптотических разложений [6] следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой финитной функции v справедливо

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\lambda)v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \varepsilon^{2-\alpha}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{w}\ln\varepsilon + o(1)\right) \quad \text{при } n = 2, \\ T_\varepsilon(\lambda)v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \varepsilon^{2-\alpha}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\left(w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + o(1)\right) \quad \text{при } n \geq 3, \end{aligned} \quad (16)$$

где w – это решение уравнения

$$-\Delta_\xi w(\xi) = v(\xi) \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Из (15), (16) и очевидного равенства $(V_\varepsilon\psi_0, \psi_0) = O(\varepsilon^n)$ следует (14).

Подставляя (15) и (16) в (13), получаем справедливость утверждений б). Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ 1. Доказательство проведем по схеме, использованной в [7] при исследовании спектра оператора Шрёдингера с малым потенциалом. Решение краевой задачи

$$(-\Delta + \varepsilon^{-\alpha}V_\varepsilon)u^\varepsilon = \lambda u^\varepsilon - f \quad x \in \Omega, \quad \mathbf{B}u^\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (17)$$

будем искать в виде

$$u^\varepsilon = \mathcal{A}(\lambda)g_\varepsilon, \quad (18)$$

где $g_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ – пока неизвестная функция. Подставляя (18) в (17) и учитывая определение оператора $\mathcal{A}(\lambda)$, выводим уравнение для функции g_ε в области Ω :

$$g_\varepsilon - \varepsilon^{-\alpha}V_\varepsilon\mathcal{A}(\lambda)g_\varepsilon = f. \quad (19)$$

Действуя оператором $S_\varepsilon(\lambda)$ на обе части уравнения в (19), получаем

$$g_\varepsilon - \varepsilon^{-\alpha}S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\frac{(g_\varepsilon, \psi_0)}{\lambda - \lambda_0}\psi_0 = S_\varepsilon(\lambda)f. \quad (20)$$

Умножим уравнение в (20) на функцию ψ_0 и проинтегрируем обе части по области Ω . В результате выводим, что

$$(g_\varepsilon, \psi_0) = \frac{(\lambda - \lambda_0)(S_\varepsilon(\lambda)f, \psi_0)}{\lambda - \lambda_0 - \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0)}. \quad (21)$$

Полученное в (21) соотношение для (g_ε, ψ_0) подставляем в (20) и получаем, что функция g_ε имеет вид

$$g_\varepsilon = S_\varepsilon(\lambda)f + \varepsilon^{-\alpha} \frac{(S_\varepsilon(\lambda)f, \psi_0)S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0}{\lambda - \lambda_0 - \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0)}. \quad (22)$$

В свою очередь, подставляя (22) в (18) получаем, что решение краевой задачи (17) имеет вид

$$u^\varepsilon = \frac{(S_\varepsilon(\lambda)f, \psi_0)(\psi_0 + \mathcal{A}^\perp(\lambda)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0)}{\lambda - \lambda_0 - \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0)} + \mathcal{A}^\perp(\lambda)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda)f. \quad (23)$$

В силу произвола в выборе f из (23) следует, что полюс функции u^ε (являющийся собственным значением краевой задачи (1)) и его порядок совпадают с нулем функции (13) и его порядком. Поэтому справедливость теоремы 1 вытекает из леммы 3. Теорема доказана.

Так как вычет решения u^ε в полюсе является собственной функцией, из (23) следует, что собственная функция краевой задачи (1) представима в виде

$$\psi^\varepsilon = \psi_0 + \mathcal{A}^\perp(\lambda^\varepsilon)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda^\varepsilon)V_\varepsilon\psi_0.$$

В заключение отметим, что изучению спектра оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с малыми возмущениями посвящено достаточно много работ (см., например, [7]–[16]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
2. Oleinik O. A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G. A. // Bull. Sc. Math. Ser. 2. 1991. V. 115. P. 1–27.
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
6. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
7. Гадыльшин Р. Р. // ТМФ. 2002. Т. 132. С. 97–104.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
9. Simon B. // Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279–288.
10. Klaus M. // Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 288–300.
11. Blankenbecler R., Goldberger M. L., Simon B. // Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 69–78.
12. Klaus M., Simon B. // Ann. Phys. 1980. V. 130. P. 251–281.
13. Пелиновский Д. Е., Салем К. // ТМФ. 2000. Т. 122. С. 118–128.
14. Zhevandrov P., Merzon A. Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems // AMS Translations. Ser. 2. Advances in the Mathematical Sciences (Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems) / ed. M. V. Karasev. AMS, 2003. P. 235–284.
15. Bentosela F., Cavalcanti R. M., Exner P., Zagrebanov V. A. // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 3029–3039.
16. Гадыльшин Р. Р. // ТМФ. 2004. Т. 138. С. 41–54.

Башкирский государственный
педагогический университет, г. Уфа

Поступило
27.09.2005
Исправленный вариант
08.10.2005

К ОДНОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

1. Уравнения движения шара по поверхности и их интегралы. Рассмотрим уравнения качения без проскальзывания (и без отрыва) динамически симметричного шара, центральный тензор инерции $\mathbf{I}$ которого является шаровым $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$, по произвольной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 04-05-64367, 05-01-01058, программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”, грант НШ 136.2003.1, фондов CRDF, грант RU-M1-2583-MO-04, и INTAS, грант № 04-80-7297.