Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев, К одной неавтономной динамической проблеме, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 790–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2753>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 03:46:06

Полученное в (21) соотношение для (g_ε, ψ_0) подставляем в (20) и получаем, что функция g_ε имеет вид

$$g_\varepsilon = S_\varepsilon(\lambda)f + \varepsilon^{-\alpha} \frac{(S_\varepsilon(\lambda)f, \psi_0)S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0}{\lambda - \lambda_0 - \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0)}. \quad (22)$$

В свою очередь, подставляя (22) в (18) получаем, что решение краевой задачи (17) имеет вид

$$u^\varepsilon = \frac{(S_\varepsilon(\lambda)f, \psi_0)(\psi_0 + \mathcal{A}^\perp(\lambda)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0)}{\lambda - \lambda_0 - \varepsilon^{-\alpha}(S_\varepsilon(\lambda)V_\varepsilon\psi_0, \psi_0)} + \mathcal{A}^\perp(\lambda)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda)f. \quad (23)$$

В силу произвола в выборе f из (23) следует, что полюс функции u^ε (являющийся собственным значением краевой задачи (1)) и его порядок совпадают с нулем функции (13) и его порядком. Поэтому справедливость теоремы 1 вытекает из леммы 3. Теорема доказана.

Так как вычет решения u^ε в полюсе является собственной функцией, из (23) следует, что собственная функция краевой задачи (1) представима в виде

$$\psi^\varepsilon = \psi_0 + \mathcal{A}^\perp(\lambda^\varepsilon)\mathcal{P}S_\varepsilon(\lambda^\varepsilon)V_\varepsilon\psi_0.$$

В заключение отметим, что изучению спектра оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с малыми возмущениями посвящено достаточно много работ (см., например, [7]–[16]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
2. Oleinik O. A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G. A. // Bull. Sc. Math. Ser. 2. 1991. V. 115. P. 1–27.
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
6. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
7. Гадыльшин Р. Р. // ТМФ. 2002. Т. 132. С. 97–104.
8. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
9. Simon B. // Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279–288.
10. Klaus M. // Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 288–300.
11. Blankenbecler R., Goldberger M. L., Simon B. // Ann. Phys. 1977. V. 108. P. 69–78.
12. Klaus M., Simon B. // Ann. Phys. 1980. V. 130. P. 251–281.
13. Пелиновский Д. Е., Салем К. // ТМФ. 2000. Т. 122. С. 118–128.
14. Zhevandrov P., Merzon A. Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential wells and related problems // AMS Translations. Ser. 2. Advances in the Mathematical Sciences (Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems) / ed. M. V. Karasev. AMS, 2003. P. 235–284.
15. Bentosela F., Cavalcanti R. M., Exner P., Zagrebanov V. A. // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 3029–3039.
16. Гадыльшин Р. Р. // ТМФ. 2004. Т. 138. С. 41–54.

Башкирский государственный
педагогический университет, г. Уфа

Поступило
27.09.2005
Исправленный вариант
08.10.2005

К ОДНОЙ НЕГОЛОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

1. Уравнения движения шара по поверхности и их интегралы. Рассмотрим уравнения качения без проскальзывания (и без отрыва) динамически симметричного шара, центральный тензор инерции $\mathbf{I}$ которого является шаровым $\mathbf{I} = \mu \mathbf{E}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$, по произвольной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 04-05-64367, 05-01-01058, программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”, грант НШ 136.2003.1, фондов CRDF, грант RU-M1-2583-MO-04, и INTAS, грант № 04-80-7297.

поверхности. При изучении движения шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения для импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид (см., например, [1], [2])

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathcal{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})' = \mathbf{a} \times \mathbf{N} + \mathcal{M}_C, \quad (1)$$

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта шара с поверхностью равна нулю) –

$$\mathbf{v} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь m – масса шара, $\mathbf{v}$ – скорость его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ (шаровой) центральный тензор инерции, $\mathbf{a}$ – вектор из центра масс в точку контакта, R – радиус шара, $\mathbf{N}$ – реакция в точке контакта (см. рис. 1), $\mathcal{F}$ – внешняя сила, $\mathcal{M}_C$ – момент сил относительно центра масс.

Рис. 1. Качение шара по поверхности (C – центр масс, Q – точка контакта с поверхностью)

Исключая из этих уравнений реакцию $\mathbf{N}$ и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора кинетического момента относительно точки контакта $\mathbf{M}$ и радиус-вектора центра масс $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= D\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) - \mathbf{a} \times \mathcal{F} + \mathcal{M}_C, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $D = mR^2$, вектор нормали к поверхности $\boldsymbol{\gamma} = -R^{-1}\mathbf{a}$ (рис. 1). Геометрические соотношения между $\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{x}$ с помощью уравнения поверхности, по которой движется центр масс шара $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, представляются в форме

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla\Phi(\mathbf{x})}{|\nabla\Phi(\mathbf{x})|}, \quad \dot{\gamma}_i = \frac{1}{|\nabla\Phi|} \sum_k \left(\frac{\partial^2\Phi}{x_i\partial x_k} - \frac{1}{|\nabla\Phi|^2} \sum_j \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k} \right) \dot{x}_k,$$

а векторы $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\omega}$ связаны соотношением

$$\mathbf{M} = \mu\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}).$$

Если внешние силы потенциальные с потенциалом, зависящим лишь от положения центра масс, $U = U(\mathbf{x})$, то $\mathcal{M}_C = 0$, $\mathcal{F} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$ и уравнения (3) обладают интегралом энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U\mathbf{x}, \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (4)$$

Кроме этих двух интегралов в случае произвольной поверхности $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ и потенциала $U(\mathbf{x})$ система (3) обладает инвариантной мерой $\rho d^3\boldsymbol{\omega} d^3\mathbf{x}$, плотность которой имеет простой вид

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right)^2}.$$

Однако два дополнительных интеграла, необходимых для интегрируемости по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби), отсутствуют, и поведение системы является хаотическим. Авторами было показано, что для поверхности трехосного эллипсоида существует еще один интеграл, квадратичный по моментам $\mathbf{M}$ [3], [4]. Как заметил Раус [5], для поверхности эллипсоида вращения имеется два дополнительных интеграла, система является интегрируемой.

2. Движение по цилиндру. Рассмотрим задачу о качении шара при условии, что его центр масс движется по произвольной цилиндрической поверхности. Оказывается, что эта система в случае отсутствия внешнего поля интегрируется в квадратурах, а в случае, когда внешняя сила направлена вдоль образующей цилиндра, уравнения приводятся к гамильтоновой системе с полутора степенями свободы.

Как установил Раус [5], в случае кругового цилиндра центр шара почти для всех движений (кроме движения вниз по прямой) совершает в поле тяжести периодические колебания вдоль оси цилиндра по гармоническому закону и поэтому в среднем не смещается вниз. Эта задача вошла во многие курсы теоретической механики как иллюстрация идеальности неголономных связей. Оказывается [6] (Э. Штюблер, 1909 г.), что для произвольного цилиндра система также является интегрируемой, центр масс шара также в среднем не испытывает ухода вниз, но при этом уже совершает не периодические, а квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами.

Рис. 2

Выберем неподвижную систему координат, одна из осей которой (Ox_3) направлена вдоль образующей цилиндра (см. рис. 2), при этом для вектора нормали имеем

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1. \quad (5)$$

Обозначим проекции нормали и радиуса-вектора центра масс шара на нормальное сечение цилиндра через $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$; для них выполняются очевидные геометрические соотношения

$$(\dot{\tilde{x}}, \tilde{\gamma}) = (\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{x}) = 0.$$

Первое из них выражает перпендикулярность скорости проекции центра масс и нормали к кривой, описываемой этой проекцией, а второе – постоянство модуля вектора нормали $(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) = 1$. Отсюда заключаем, что $\dot{\tilde{\gamma}}$ параллелен $\tilde{x}$:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = R^{-1} \lambda(\gamma) \dot{\tilde{x}},$$

причем функция $\lambda(\gamma)$ задается геометрией сечения цилиндра и не зависит от угловой скорости шара.

Отметим, что в данной работе мы рассматриваем лишь случай, когда оправдано применение уравнений с неголономными связями (2). Это накладывает некоторые ограничения как на форму цилиндра, так и на начальные условия движения. В частности, для исключения ударов полагаем, что поперечное сечение цилиндра ограничено кривой с радиусом кривизны больше радиуса шара. Как будет показано ниже, для исключения отрыва шара необходимо полагать, что кривая поперечного сечения должна быть выпуклой.

Используя уравнения (3), получим уравнения движения шара по поверхности цилиндра в предположении, что вдоль образующей цилиндра действует сила с потенциалом $U(x)$:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) \frac{D}{\mu + D} (M \times \gamma, e_z) \gamma + R \gamma \times \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \dot{\gamma} &= \frac{M_3}{\mu + D} \lambda(\gamma) e_z \times \gamma, \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{\mu + D} (M \times \gamma, e_z). \end{aligned} \quad (6)$$

В общем случае уравнения (6) допускают только один дополнительный (помимо геометрического) интеграл – полную энергию системы

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{x}) \quad (7)$$

и инвариантную меру $\rho d^3 \mathbf{M} d\gamma_1 d\gamma_2 dz$ с плотностью

$$\rho(\gamma) = \lambda^{-1}(\gamma).$$

Представим уравнения (6) в более удобной форме, воспользовавшись переменными

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \cos \varphi, & \gamma_2 &= \sin \varphi, & z &= \frac{x_3}{R}, \\ K_1 &= M_1 \gamma_1 + M_2 \gamma_1, & K_2 &= M_1 \gamma_2 - M_2 \gamma_1. \end{aligned}$$

Тогда с помощью гауссовой проекции можно выразить $x_1(\varphi)$, $x_2(\varphi)$, и для произвольной функции $f(x_1, x_2)$ получим

$$-\frac{\partial f}{\partial x_1} \gamma_2 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \gamma_1 = (\nabla f, \boldsymbol{\tau}) = \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\varphi} \right|^{-1} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi} = R^{-1} \Lambda(\varphi) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \varphi},$$

где $\bar{f}(\varphi) = f(x_1(\varphi), x_2(\varphi))$, $\Lambda(\varphi) = \lambda(\gamma_1(\varphi), \gamma_2(\varphi))$, $\boldsymbol{\tau}$ – касательный вектор. Подставляя в уравнения (6), находим

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= \frac{\mu \Lambda(\varphi) M_3}{(\mu + D)^2} K_2, & \dot{K}_2 &= -\frac{\Lambda(\varphi) M_3}{\mu + D} K_1 + \frac{\partial U}{\partial z}, & \dot{M}_3 &= \Lambda(\varphi) \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{\Lambda(\varphi) M_3}{\mu + D}, & \dot{z} &= -\frac{K_2}{\mu + D}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соответственно интеграл энергии примет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{K_1^2}{\mu} + \frac{K_2^2}{\mu + D} + \frac{M_3^2}{\mu + D} \right) + U. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь подробнее условия отрыва шара от поверхности цилиндра. Согласно уравнению (1) отрыва от поверхности не происходит, если проекция силы реакции на внутреннюю нормаль к поверхности положительна

$$N_n = -(\mathbf{N}, \boldsymbol{\gamma}) = -m(\dot{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\gamma}) + (\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}) \geq 0.$$

Из уравнений (6) можно получить

$$N_n = D\omega_3^2 k(\mathbf{x}),$$

где $k(\mathbf{x})$ – кривизна поверхности, по которой движется центр масс цилиндра. Таким образом, для внутреннего обката, если $\omega_3 \neq 0$, то всюду выполнено условие безотрывности. Если же $U = 0$ и $\omega_3 = 0$, то шар движется по вертикальной образующей цилиндра; это движение мы здесь не рассматриваем.

3. Движение в поле тяжести. В случае, когда потенциальная энергия имеет вид

$$U(\mathbf{x}) = V(x_3) + W(x_1, x_2), \quad (10)$$

имеется дополнительный интеграл вида

$$\frac{1}{2} \frac{M_3^2}{\mu + D} + W(x_1, x_2) = h_2 = \text{const}. \quad (11)$$

Так, в частности, для случая наклонного цилиндра в поле тяжести потенциальная энергия представляется в виде

$$U(x) = x_3 mg \sin \chi + x_1 mg \cos \chi,$$

где χ – угол наклона образующей цилиндра, а оси Ox_1 и Ox_2 выбраны в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно.

Согласно (8), (11) уравнение для угла φ отделяется:

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2(h_2 - W(x_1(\varphi), x_2(\varphi)))}}{\mu + D} \Lambda(\varphi) = Q^{-1}(\varphi), \quad (12)$$

где $Q(\varphi)$ в общем случае 2π -периодическая функция от φ , определяемая видом поперечного сечения цилиндра и потенциалом W .

Таким образом, будем полагать $U = \varkappa z + W(\varphi)$. Выполнив замену времени

$$\frac{M_3 \Lambda(\varphi)}{\mu + D} dt = d\tau,$$

получим

$$\frac{dK_1}{d\tau} = -\frac{\mu}{\mu + D} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\tau} = K_1 - \frac{\varkappa(\mu + D)}{M_3 \Lambda(\varphi)}, \quad \frac{dM_3}{d\tau} = -\frac{\mu + D}{M_3} \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

Прямым вычислением можно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Система уравнений (13) гамильтонова со скобкой Пуассона вида

$$\begin{aligned} \{K_1, K_2\} &= -\mu, & \{K_2, z\} &= -\frac{\mu + D}{M_3 \Lambda(\varphi)}, \\ \{M_3, z\} &= -\frac{(\mu + D)W'(\varphi)}{\varkappa M_3}, & \{\varphi, z\} &= \frac{1}{\varkappa} \end{aligned} \quad (14)$$

и гамильтонианом H (9).

Функцией Казимира скобки (14) является интеграл (11), а ранг структуры равен четырем. То есть после ограничения на уровень интеграла (11) получим систему с двумя степенями свободы (точнее с полутора степенями, так как $d\varphi = d\tau$). Покажем теперь, что система (13) (и, следовательно, (8)) допускает еще один независимый дополнительный интеграл и, следовательно, интегрируема по теореме Лиувилля–Арнольда (так как условие сохранения функции F в точности совпадает с условием $\{F, H\} = 0$). В отличие от обычных случаев интегрируемости дополнительный интеграл в этом случае не представляется в явном виде с помощью элементарных или спецфункций. Мы приведем его в виде ряда Фурье.

Выразим M_3 из интеграла (11) и подставим в (13); тем самым, для функций K_1, K_2 получим систему линейных уравнений, решение которой может быть получено методом вариации постоянных:

$$\begin{aligned} K_2 + i \frac{K_1}{\nu} &= -\varkappa \int_{\varphi_0}^{\varphi} Q(\xi) e^{i\nu(\xi - \varphi)} d\xi + (A + iB) e^{-i\nu\varphi}, \\ Q(\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (h_2 - (\mu + D)W(\varphi))^{-1/2} \Lambda^{-1}(\varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

где A, B – постоянные интегрирования. Квадратуры (15) были получены Штюблером, который, тем самым, и разрешил задачу. В своем исследовании [6] Штюблер интересуется также условием отрыва шара от цилиндра и уравнением следа точки контакта на поверхности шара. Уравнение для следа Штюблер приводит (согласно общей теореме Дарбу) к уравнениям Рикатти.

Приведем явный вид однозначного дополнительного первого интеграла в структуре (14), т.е. покажем, что задача интегрируется по Лиувиллю (и Эйлеру–Якоби). Поскольку $Q(\varphi)$ – 2π -периодическая функция, разложим ее в ряд $Q(\varphi) = \sum Q_n e^{in\varphi}$ и проинтегрируем почленно:

$$K_2 + i \frac{K_1}{\nu} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varkappa \frac{Q_n}{i(n + \nu)} e^{in\varphi} + \left(A + iB + \varkappa \sum \frac{Q_n e^{i(n+\nu)\varphi_0}}{i(n + \nu)} \right) e^{-i\nu\varphi}.$$

Мы видим, что величина в скобках – это некоторая постоянная, квадрат ее модуля, очевидно, является 2π -периодической функцией и, очевидно, является искомым интегралом,

$$F(K_1, K_2, \varphi, h_2) = \left| K_2 + i \frac{K_1}{\nu} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Q_n}{i(n+\nu)} e^{in\varphi} \right|^2; \quad (16)$$

чтобы выразить F через исходные переменные, необходимо выразить константу h_2 через M_3 и φ из уравнения (11).

Таким образом, фазовое пространство системы (13) расслаивается на двумерные торы, причем в отличие от стандартной ситуации частоты на этих торах равны $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \nu$ и не зависят от начальных условий и геометрии цилиндра, а только от μ и D (т.е. инерционных свойств шара). Если ν – рациональное число, то все траектории замкнуты, а постоянные A, B задают дополнительные однозначные (хотя и не 2π -периодические) интегралы. При этом $\{A, B\} = \sqrt{\mu(\mu + D)}$, т.е. система (13) является в этом случае суперинтегрируемой.

Как следствие существования интеграла (16) получаем

Предложение. При качении шара по абсолютно шероховатой цилиндрической поверхности с произвольным поперечным сечением в поле тяжести не наблюдается вертикального векового ухода.

Действительно, на поверхности уровня интегралов (16), (11) K_1, K_2, M_3 ограничены, и вследствие сохранения энергии (9) получаем, что z также ограничена.

Замечание. Если $V(z)$ не является линейной по z , то для переменных K_1, K_2, z после замены времени $Q^{-1}(\varphi) dt = d\tau = d\varphi$ также получается неавтономная система с 2π -периодическими коэффициентами

$$\frac{dK_1}{d\varphi} = -\frac{\mu}{\mu + D} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\varphi} = K_1 - Q(\varphi) V'(z), \quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{Q(\varphi)}{\mu + D} K_2 \quad (17)$$

с интегралом

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{K_1^2}{\mu} + \frac{K_2^2}{\mu + D} \right) + V(z). \quad (18)$$

При произвольных потенциалах и сечениях цилиндра система (17), по-видимому, неинтегрируема.

Рис. 3. Вертикальная координата точки контакта z в зависимости от угла φ для различных начальных значений K_1, K_2, z . Рисунок соответствует следующим параметрам: $E = 1$, $\mu = 1$, $D = 1$ ($\nu = 2^{-1/2}$), $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $R = 1$

4. Эллиптический цилиндр. Компьютерные иллюстрации. Рассмотрим подробнее частный случай, при котором центр масс шара движется по вертикальному эллиптическому цилиндру, так что поперечное сечение задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{b_1} + \frac{x_2^2}{b_2} = 1. \quad (19)$$

При этом

$$x_1 = \frac{b_1 \gamma_1}{\sqrt{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}}, \quad x_2 = \frac{b_2 \gamma_2}{\sqrt{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}}, \quad x_3 = Rz$$

и соответственно

$$\lambda(\gamma) = \frac{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{3/2}}{b_1 b_2}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, 0),$$

$$Q^{-1}(\varphi) = \frac{M_3}{(\mu + D)b_1 b_2} (b_1 \cos^2 \varphi + b_2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

Отметим важное отличие эллиптического цилиндра от кругового: в этом случае вместо одночастотных функций зависимость динамических переменных K_1, K_2, z определяется двумя частотами $\omega_1 = 1, \omega_2 = \nu$. Таким образом, интеграл в (15) берется от квазипериодических функций и имеет довольно сложный характер; его аналитические свойства подробно обсуждаются в [7]. На рис. 3 изображены примеры зависимостей $z(\varphi)$ для различных начальных значений K_1 и K_2 . Они согласуются с аналитическими исследованиями, т.е. для всех соотношений частот переменные K_1 и K_2 , а с ними и смещение z , испытывают ограниченные квазипериодические или периодические колебания.

Авторы благодарят В. В. Козлова за полезные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карапетян А. В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
2. Маркеев А. П. // ПММ. 1983. Т. 47. № 4. С. 575–582.
3. Borisov A. V., Mamaev I. S. // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7. № 1. P. 177–200.
4. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 1–4.
5. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Т. II. М.: Мир, 1983.
6. Stübler E. // Zeitschrift für Math. und Phys. 1909. V. 57. P. 260–271.
7. Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ “РХД”, 2000.

Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск
E-mail: borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Поступило
17.08.2005

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Е. А. Уланский

Пусть $z, a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и $b_i \neq 0, -1, -2, \dots$ при $i = 1, \dots, m$. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k (a_1)_k \cdots (a_m)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.