Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Уланский, Об одном тождестве для обобщения гипергеометрического интеграла, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 5, 796–799

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:42:24

4. Эллиптический цилиндр. Компьютерные иллюстрации. Рассмотрим подробнее частный случай, при котором центр масс шара движется по вертикальному эллиптическому цилиндру, так что поперечное сечение задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{b_1} + \frac{x_2^2}{b_2} = 1. \quad (19)$$

При этом

$$x_1 = \frac{b_1 \gamma_1}{\sqrt{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}}, \quad x_2 = \frac{b_2 \gamma_2}{\sqrt{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}}, \quad x_3 = Rz$$

и соответственно

$$\lambda(\gamma) = \frac{(\gamma, \mathbf{B}\gamma)^{3/2}}{b_1 b_2}, \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, 0),$$

$$Q^{-1}(\varphi) = \frac{M_3}{(\mu + D)b_1 b_2} (b_1 \cos^2 \varphi + b_2 \sin^2 \varphi)^{3/2}.$$

Отметим важное отличие эллиптического цилиндра от кругового: в этом случае вместо одночастотных функций зависимость динамических переменных K_1, K_2, z определяется двумя частотами $\omega_1 = 1, \omega_2 = \nu$. Таким образом, интеграл в (15) берется от квазипериодических функций и имеет довольно сложный характер; его аналитические свойства подробно обсуждаются в [7]. На рис. 3 изображены примеры зависимостей $z(\varphi)$ для различных начальных значений K_1 и K_2 . Они согласуются с аналитическими исследованиями, т.е. для всех соотношений частот переменные K_1 и K_2 , а с ними и смещение z , испытывают ограниченные квазипериодические или периодические колебания.

Авторы благодарят В.В. Козлова за полезные замечания и обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998.
2. Маркеев А.П. // ПММ. 1983. Т. 47. №4. С. 575–582.
3. Borisov A. V., Mamaev I. S. // Regular and Chaotic Dynamics. 2002. V. 7. №1. P. 177–200.
4. Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А. // Докл. РАН. 2002. Т. 385. №3. С. 1–4.
5. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Т. II. М.: Мир, 1983.
6. Stübler E. // Zeitschrift für Math. und Phys. 1909. V. 57. P. 260–271.
7. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ "РХД", 2000.

Институт компьютерных исследований,
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск
E-mail: borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Поступило
17.08.2005

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

Е. А. Уланский

Пусть $z, a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ и $b_i \neq 0, -1, -2, \dots$ при $i = 1, \dots, m$. Обобщенная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$F \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k (a_1)_k \cdots (a_m)_k}{(b_1)_k \cdots (b_m)_k} \cdot \frac{z^k}{k!},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

где $(a)_k = a \cdot (a+1) \cdots (a+k-1)$, $(a)_0 = 1$. При $\Re(a_i) > 0$, $\Re(b_i - a_i) > 0$, $i = 1, \dots, m$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} F \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \middle| z \right) &= \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} \\ &\times \int_{[0,1]^m} \dots \int \frac{\prod_{i=1}^m x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-z \cdot x_1 \dots x_m)^{a_0}} dx_1 \dots dx_m, \quad (1) \end{aligned}$$

которое определяет аналитическое продолжение обобщенной гипергеометрической функции в область $|\arg(1-z)| < \pi$.

Согласно [1, пункт 2.1.4] в области $|\arg(1-z)| < \pi$ справедливо равенство

$$F \left(\begin{matrix} a_0, a_1 \\ b_1 \end{matrix} \middle| \frac{-z}{1-z} \right) = (1-z)^{a_1} F \left(\begin{matrix} b_1 - a_0, a_1 \\ b_1 \end{matrix} \middle| z \right).$$

Введем обозначения для наборов чисел

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_m), \quad \bar{b} = (b_1, \dots, b_m), \quad \bar{c} = (c_1, \dots, c_m).$$

Пусть $z, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$, $|\arg(1-z)| < \pi$ и $\Re(a_i) > 0$, $\Re(b_i - a_i) > 0$ при $i = 1, \dots, m$. Определим следующее обобщение интеграла (1):

$$I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} | z) = z^{a_1} \int_{[0,1]^m} \dots \int \prod_{i=1}^m \frac{x_i^{a_i-1} (1-x_i)^{b_i-a_i-1}}{(1-z \cdot x_1 \dots x_i)^{c_i}} dx_1 \dots dx_m,$$

где полагается $z^{a_1} = e^{a_1(\ln|z| + i \arg(z))}$ и $I_0(\emptyset; \emptyset; \emptyset | z) = 1$.

Обозначим символом $\{a\}_k$ записанное k раз подряд через запятую число a .

Пусть $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_l = m$ и $c_i = 0$, если $i \notin \{r_1, \dots, r_l\}$, $i = 1, \dots, m$, так что $\bar{c} = (\{0\}_{r_1-r_0-1}, c_{r_1}, \dots, \{0\}_{r_l-r_{l-1}-1}, c_{r_l})$.

Раскладывая при $|z| < 1$ подынтегральную функцию в ряд по степеням $z \cdot x_1 \dots x_i$ и интегрируя почленно, получаем

$$\begin{aligned} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} | z) &= \sum_{\nu_1 \geq 0, \dots, \nu_l \geq 0} z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1} \\ &\times \prod_{j=1}^l \left[\frac{\Gamma(c_{r_j} + \nu_j)}{\Gamma(c_{r_j})(\nu_j)!} \prod_{i=r_{j-1}+1}^{r_j} \frac{\Gamma(b_i - a_i)\Gamma(\nu_j + \dots + \nu_l + a_i)}{\Gamma(\nu_j + \dots + \nu_l + b_i)} \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. При $m \geq 1$, $|z| < 1$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{d}{dz} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} | z) = \begin{cases} \frac{(b_1 - a_1 - 1)}{z^2} I_m(a_1 + 1, \bar{a}'; \bar{b}; \bar{c} | z) & \text{при } \Re(b_1 - a_1 - 1) > 0, \\ \frac{z^{a_1 - a_2 - 1}}{(1-z)^{c_1}} I_{m-1}(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{c}' | z) & \text{при } b_1 = a_1 + 1. \end{cases}$$

Здесь при $m = 1$ нужно положить $a_2 = 0$. Кроме того,

$$\bar{a}' = (a_2, \dots, a_m), \quad \bar{b}' = (b_2, \dots, b_m), \quad \bar{c}' = (c_2, \dots, c_m).$$

Доказательство получается непосредственно дифференцированием ряда (2), поскольку

$$\frac{d}{dz} z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1} = (\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1) z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1 - 1}.$$

Требуемое равенство достигается благодаря тождеству

$$(\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1) \Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1) = \Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1 + 1)$$

и элементарным соотношениям

$$z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1 - 1} = \frac{1}{z^2} \cdot z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1 + 1} = z^{a_1 - a_2 - 1} \cdot z^{\nu_1 + \dots + \nu_l + a_2}.$$

При этом в случае $b_1 = a_1 + 1$, $c_1 \neq 0$ происходит сокращение дроби $\Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_l + a_1 + 1) / \Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_l + b_1)$ и можно произвести суммирование по ν_1 :

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} z^{\nu_1} \frac{\Gamma(c_1 + \nu_1)}{\Gamma(c_1)(\nu_1)!} = (1 - z)^{-c_1}.$$

Лемма доказана.

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

Следствие. При $m \geq 1$, $| -z/(1-z) | < 1$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} I_m \left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) \\ = \begin{cases} -\frac{(b_1 - a_1 - 1)}{z^2} I_m \left(a_1 + 1, \bar{a}'; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) & \text{при } \Re(b_1 - a_1 - 1) > 0, \\ \frac{-(-z)^{a_1 - a_2 - 1}}{(1-z)^{a_1 - a_2 - c_1 + 1}} I_{m-1} \left(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{c}' \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) & \text{при } b_1 = a_1 + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем дополнительное обозначение для набора чисел:

$$\bar{b} - \bar{a}' - \bar{c} = (b_1 - a_2 - c_1, \dots, b_{m-1} - a_m - c_{m-1}, b_m - c_m).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $z, a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $|\arg(1-z)| < \pi$ и $\Re(a_i) > 0$, $b_i - a_i \in \mathbb{N}$ при $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$I_m \left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) = (-1)^{a_1} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{b} - \bar{a}' - \bar{c} \mid z).$$

При $m = 0$ данное равенство имеет вид $I_0(\emptyset; \emptyset; \emptyset \mid \frac{-z}{1-z}) = I_0(\emptyset; \emptyset; \emptyset \mid z)$.

Следствие. При соблюдении условий теоремы 1 благодаря (1) получаем формулу для обобщенной гипергеометрической функции:

$$\begin{aligned} F \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_m \end{matrix} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) \\ = \left(\frac{1-z}{z} \right)^{a_1} \cdot \prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(b_i)}{\Gamma(a_i)\Gamma(b_i - a_i)} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{b} - (\bar{a}', a_0) \mid z), \end{aligned}$$

где

$$\bar{b} - (\bar{a}', a_0) = (b_1 - a_2, \dots, b_{m-1} - a_m, b_m - a_0).$$

Примечательно, что согласно определению обобщенная гипергеометрическая функция не меняется при любой перестановке параметров a_i , равно как и при любой перестановке параметров b_i , а следовательно, любую из таких перестановок выдерживает и выражение, полученное в правой части данного равенства. Равенство для одной из таких перестановок следует из теоремы статьи [2].

Доказательство теоремы 1. Проведем индукцию по m .

При $m = 0$ утверждение очевидно следует из определения $I_0(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} | z)$.

Пусть теперь $m \geq 1$ и теорема верна для $m - 1$. Докажем утверждение теоремы для m . Для этого проведем также индукцию по $k = b_1 - a_1$.

При $k = 1$ применим лемму 1, ее следствие и воспользуемся индукционным предположением по m :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} I_m \left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) &= \frac{-(-z)^{a_1-a_2-1}}{(1-z)^{a_1+1-a_2-c_1}} I_{m-1} \left(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{c}' \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) \\ &= \frac{(-1)^{a_1} (z)^{a_1-a_2-1}}{(1-z)^{b_1-a_2-c_1}} I_{m-1}(\bar{a}'; \bar{b}'; \bar{b}' - \bar{a}'' - \bar{c}' | z) \\ &= \frac{d}{dz} [(-1)^{a_1} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{b} - \bar{a}' - \bar{c} | z)]. \end{aligned}$$

Здесь, как и в лемме 1, при $m = 1$ нужно положить $a_2 = 0$ и

$$\bar{b}' - \bar{a}'' - \bar{c}' = (b_2 - a_3 - c_2, \dots, b_{m-1} - a_m - c_{m-1}, b_m - c_m).$$

Поскольку производные двух функций совпадают и обе они обращаются в нуль при $z = 0$, эти функции равны.

Пусть теперь $k > 1$ и утверждение верно для $k - 1$. Докажем его для k . Вновь применим лемму 1, ее следствие и воспользуемся индукционным предположением по k :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} I_m \left(\bar{a}; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) &= -\frac{(b_1 - a_1 - 1)}{z^2} I_m \left(a_1 + 1, \bar{a}'; \bar{b}; \bar{c} \left| \frac{-z}{1-z} \right. \right) \\ &= (-1)^{a_1} \frac{(b_1 - a_1 - 1)}{z^2} I_m(a_1 + 1, \bar{a}'; \bar{b}; \bar{b} - \bar{a}' - \bar{c} | z) \\ &= \frac{d}{dz} [(-1)^{a_1} I_m(\bar{a}; \bar{b}; \bar{b} - \bar{a}' - \bar{c} | z)]. \end{aligned}$$

Поскольку производные двух функций совпадают и обе они обращаются в нуль при $z = 0$, эти функции равны.

Согласно условиям леммы 1 мы доказали утверждение теоремы в области $\{|z| < 1, |-z/(1-z)| < 1\}$. Но с помощью аналитического продолжения оно распространяется и на всю область $|\arg(1-z)| < \pi$, поскольку $|\arg(1 - \frac{-z}{1-z})| = |\arg(1-z)|$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую признательность Ю. В. Нестеренко за помощь при написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 2. Злобин С. А. // УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 153–154.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: ulanskiy@mail.ru

Поступило
28.11.2005