Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Алиев, Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 803–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:12:40

НОВЫЙ КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. А. Алиев

В работе предложен и обоснован новый приближенный метод решения линейных сингулярных интегральных уравнений, заданных на гладких замкнутых кривых.
Библиография: 15 названий.

Введение. Конструктивные методы решения сингулярных интегральных уравнений, теория которых хорошо изложена в монографиях [1], [2], нашли широкое применение в аэродинамике, в теории упругости, электродинамике и других прикладных областях [3]–[5], и их построению посвящено много работ [6]–[12].

Рассмотрим в $L_2(\gamma_0)$ сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$(\mathfrak{R}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\gamma_0} K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in \gamma_0, \quad (0.1)$$

где $\gamma_0 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $a, b \in C(\gamma_0)$, $K \in C(\gamma_0 \times \gamma_0)$, причем $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ при любых $t \in \gamma_0$.

Пусть оператор $\mathfrak{R}$ обратим в $L_2(\gamma_0)$. С помощью принципа локализации доказано, что проекционные методы Галёркина и др. можно применять к уравнению (1) тогда и только тогда, когда выполняется условие строгой эллиптичности (см. [9]):

$$a(t) + \lambda b(t) \neq 0 \quad \forall t \in \gamma_0, \quad \forall \lambda: -1 \leq \lambda \leq 1.$$

В разработанном конструктивном методе сингулярная часть оператора $\mathfrak{R}$ аппроксимируется операторами, сохраняющими основные свойства сингулярного оператора (см. свойства 1.1), а это дает нам следующие преимущества.

1. Устранение условия строгой эллиптичности.
2. Этот метод применяется для функций из $L_2(\gamma)$, но другие численные методы применимы только для непрерывных или кусочно-непрерывных функций (см. [6], [9]–[12]).
3. В этом методе получена оценка, которая позволяет для функций соответствующего класса оценить скорость сходимости непосредственно, а другие методы, которые ранее применялись для приближенного решения СИУ по гладкой замкнутой кривой, требуют привлечения к рассмотрению специфических свойств рассматриваемых классов функций, причем установленная нами оценка с точки зрения скорости сходимости дает более точные результаты, нежели ранее применявшиеся методы (см. [11], [12]).
4. В этом методе в процессе решения системы линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) приближенные решения находятся явным образом (а не в отдельных точках)

где

$$\begin{aligned}\lambda_m^{(n)} &= \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{m(2k+1)\theta i}}{\tau_{2k+1}^{(t)} - t} \cdot \Delta \tau_{2k+1}^{(t)} = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{m(2k+1)\theta i}}{\tau_{2k+1}^{(1)} - 1} \cdot \Delta \tau_{2k+1}^{(1)} \\ &= \frac{1}{in} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{(m+1/2)(2k+1)\theta i}}{\sin(2k+1)\frac{\theta}{2}}.\end{aligned}$$

Вычисляя $\lambda_m^{(n)}$, получим, что $\lambda_m^{(n)} = 1$ при $m = \overline{0, n-1}$, $\lambda_m^{(n)} = -1$ при $m = \overline{n, 2n-1}$ и $\lambda_{m \pm 2n}^{(n)} = \lambda_m^{(n)}$ при всех $m \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k$. Тогда, учитывая (1.1), имеем

$$(S_n \varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \lambda_k^{(n)} t^k.$$

Так как коэффициенты $\lambda_k^{(n)} = \pm 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, то

$$\|S_n \varphi\|_{L_2(\gamma_0)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 |\lambda_k^{(n)}|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}^2$$

и

$$(S_n^2 \varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (\lambda_k^{(n)})^2 t^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k.$$

Отсюда вытекают следующие свойства операторов S_n .

СВОЙСТВА 1.1. *Имеют место равенства*

$$S_n^2 = I \quad \text{в} \quad L_2(\gamma_0) \quad \text{и} \quad \|S_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} = 1.$$

Пусть

$$E_{n-1}^{(2)}(\varphi) = \inf_{q \in T_{n-1}} \|\varphi(\cdot) - q(\cdot)\|_{L_2(\gamma_0)}$$

есть наилучшее приближение функции $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ полиномами из T_{n-1} , где T_{n-1} -множество полиномов вида

$$\sum_{k=-n+1}^{n-1} \alpha_k t^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Последовательность операторов $\{S_n\}$ сильно сходится к оператору S в $L_2(\gamma_0)$; при этом для любого $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ справедлива оценка*

$$\|S\varphi - S_n \varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \leq 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi). \quad (1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$q_{n-1}(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k^{(n)} t^k$$

есть полином наилучшего приближения для функции $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ из T_{n-1} , тогда

$$\begin{aligned} (S_n q_{n-1})(t) &= S_n \left(\sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k^{(n)} t^k \right) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k^{(n)} S_n(t^k) \\ &= - \sum_{k=-n+1}^{-1} q_k^{(n)} t^k + \sum_{k=0}^{n-1} q_k^{(n)} t^k = (S q_{n-1})(t). \end{aligned}$$

С учетом последнего имеем

$$(S\varphi - S_n \varphi)(t) = S(\varphi - q_{n-1})(t) - S_n(\varphi - q_{n-1})(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|S\varphi - S_n \varphi\|_{L_2(\gamma_0)} &\leq (\|S\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} + \|S_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)}) \cdot \|\varphi - q_{n-1}\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &= 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi). \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что $S_n \xrightarrow{s} S$ в $L_2(\gamma_0)$ и справедлива оценка (1.2). Теорема доказана.

Рассмотрим регулярный интеграл

$$(K\varphi)(t) = \int_{\gamma_0} K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in \gamma_0,$$

где $K(t, \tau)$ — непрерывная по обоим аргументам функция, и последовательность операторов

$$(K_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} K(t, \tau_k^{(t)}) \varphi(\tau_k^{(t)}) \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right), \quad t \in \gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть

$$\begin{aligned} \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} &= \max_{t, \tau \in \gamma_0} |K(t, \tau)|, \\ E_{n-1}(K) &= \inf_{\substack{h_p(t) \in T_{n-1}, \\ p=-n+1, n-1}} \left\| K(t, \tau) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \tau^p \right\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)}, \end{aligned}$$

где T_{n-1} — множество полиномов вида

$$\sum_{p=-n+1}^{n-1} \alpha_p t^p, \quad \alpha_p \in \mathbb{C}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Последовательность операторов $\{K_n\}$ сильно сходится к оператору K в $L_2(\gamma_0)$, при этом для любого $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ справедлива оценка*

$$\|K\varphi - K_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \leq 4\pi\|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} \cdot E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + 4\pi E_{n-1}(K) \{E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}\}. \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (\tau_k^{(t)})^m \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right)$$

для любого $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n-1} (\tau_k^{(t)})^m \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) &= \sum_{k=0}^{2n-1} (e^{k\theta i} \cdot t)^m (i\theta \cdot e^{k\theta i} \cdot t) = i\theta \cdot t^{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} e^{(m+1)k\theta i} \\ &= \begin{cases} 2\pi i \cdot t^{m+1}, & m = -1 \pmod{2n}, \\ 0, & m \neq -1 \pmod{2n}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Так как

$$\int_{\gamma_0} \tau^m d\tau = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1, \end{cases}$$

то из (1.4) получим, что для любого полинома

$$q_{2n-2}(t) = \sum_{k=-2n+2}^{2n-2} \alpha_k t^k$$

справедливо равенство

$$\int_{\gamma_0} q_{2n-2}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{2n-1} q_{2n-2}(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right). \quad (1.5)$$

Оценим $\|K\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)}$ и $\|K_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)}$. Для любого $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ имеем

$$\begin{aligned} \|K\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} \left| \int_{\gamma_0} K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right|^2 |dt| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} \left[\int_{\gamma_0} |K(t, \tau)|^2 |d\tau| \cdot \int_{\gamma_0} |\varphi(\tau)|^2 |d\tau| \right] |dt| \\ &\leq 4\pi^2 \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)}^2 \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}^2, \\ \|K_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} &= \left\| \sum_{k=0}^{2n-1} K(t, \tau_k^{(t)}) \varphi(\tau_k^{(t)}) \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) \right\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &\leq \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} |i\theta \cdot e^{k\theta i} \cdot t| \sum_{k=0}^{2n-1} \|\varphi(\tau_k^{(\cdot)})\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &\leq 2\pi \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|K\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 2\pi \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)}, \quad \|K_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 2\pi \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)}.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть

$$E_{n-1}^{(2)}(\varphi) = \|\varphi(\cdot) - q_{n-1}(\cdot)\|_{L_2(\gamma_0)}, \quad E_{n-1}(K) = \left\| K(t, \tau) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \tau^p \right\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} K\varphi(t) - K_n\varphi(t) &= (K - K_n)(\varphi - q_{n-1})(t) \\ &+ \int_{\gamma_0} \left[K(t, \tau) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \tau^p \right] q_{n-1}(\tau) d\tau \\ &+ \sum_{k=0}^{2n-1} \left[K(t, \tau_k^{(t)}) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) (\tau_k^{(t)})^p \right] q_{n-1}(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) \\ &+ \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \left[\int_{\gamma_0} \tau^p q_{n-1}(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^{2n-1} (\tau_k^{(t)})^p q_{n-1}(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Из соотношения (1.5) получим, что

$$\sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \left[\int_{\gamma_0} \tau^p q_{n-1}(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^{2n-1} (\tau_k^{(t)})^p q_{n-1}(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) \right] = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|K\varphi - K_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} &\leq \left\{ \|K\|_{L_2(\gamma_0) \times L_2(\gamma_0)} + \|K_n\|_{L_2(\gamma_0) \times L_2(\gamma_0)} \right\} \cdot \|\varphi - q_{n-1}\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &+ \left\| \int_{\gamma_0} \left[K(t, \tau) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) \tau^p \right] q_{n-1}(\tau) d\tau \right\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &+ \left\| \sum_{k=0}^{2n-1} \left[K(t, \tau_k^{(t)}) - \sum_{p=-n+1}^{n-1} h_p(t) (\tau_k^{(t)})^p \right] q_{n-1}(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right) \right\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &\leq 4\pi \|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} \cdot E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + 4\pi E_{n-1}(K) \{ E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \}. \end{aligned}$$

А это показывает, что $K_n \xrightarrow{s} K$. Теорема доказана.

2. Построение и обоснование нового конструктивного метода для решения СИУ по окружности. Сначала рассмотрим характеристический СИО $R^0 = \alpha I + \beta S$, где α, β — любые постоянные комплексные числа.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, т.е. оператор $R^0 = \alpha I + \beta S$ обратим в $L_2(\gamma_0)$ (см. [6]). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ операторы $R_n^0 = \alpha I + \beta S_n$ также обратимы в $L_2(\gamma_0)$, последовательность операторов $(R_n^0)^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, определяемых формулами

$$((R_n^0)^{-1}f)(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} f(t) - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} (S_n f)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

сильно сходится к оператору $(R^0)^{-1}$ и для любого $f \in L_2(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|(R^0)^{-1}f - (R_n^0)^{-1}f\|_{L_2(\gamma_0)} \leq \left| \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \right| E_{n-1}^{(2)}(f). \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $S_n^2 = I$ в $L_2(\gamma_0)$ (см. свойства 1.1), то оператор S_n непрерывно обратим и уравнение $\alpha\varphi_n + \beta S_n\varphi_n = f$ равносильно уравнению $\alpha S_n\varphi_n + \beta\varphi_n = S_nf$. Из этого получим, что первое уравнение имеет единственное решение

$$\varphi_n(t) = ((R_n^0)^{-1}f)(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}f(t) - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(S_nf)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Известно [6], что при $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ характеристическое СИУ

$$(R^0\varphi)(t) = \alpha\varphi(t) + \beta(S\varphi)(t) = f(t)$$

имеет единственное решение при любой правой части $f \in L_2(\gamma_0)$:

$$\varphi(t) = ((R^0)^{-1}f)(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}f(t) - \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2}(Sf)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Тогда согласно теореме 1.1 справедлива оценка (2.1). Теорема доказана.

Пусть A – линейно непрерывный оператор в банаховом пространстве X , $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность линейных непрерывных операторов в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что к обратимому оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что операторы A_n обратимы при $n \geq n_0$ и для любого $y \in X$ решения $x_n \in X$ уравнений $A_n x_n = y$, $n \geq n_0$, сходятся по норме пространства X к решению уравнения $Ax = y$.

Приведем следующие утверждения из теории проекционных методов [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ сильно сходится к обратимому оператору A . К оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ тогда и только тогда, когда существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что последовательность $\{A_n\}_{n \geq n_0}$ равномерно обратима.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть к обратимому оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$. Тогда для любой системы $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ линейных непрерывных операторов в пространстве X , удовлетворяющей условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n\| = 0$, к оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n + B_n\}_{n=1}^\infty$.

Рассмотрим действующий в $L_2(\gamma_0)$ полный линейный СИО

$$(\mathfrak{R}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (K\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

где $a, b \in C(\gamma_0)$, $K \in C(\gamma_0 \times \gamma_0)$, причем $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ при любых $t \in \gamma_0$ и последовательность операторов

$$(\mathfrak{R}_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (K_n\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Мы показали, что $\mathfrak{R}_n \xrightarrow{s} \mathfrak{R}$. Покажем, что к оператору $\mathfrak{R}$ применим приближенный метод по системе операторов $\mathfrak{R}_n$. Сначала докажем некоторые леммы, которые нам будут полезны.

ЛЕММА 2.1. *Последовательность операторов*

$$(K_n^{(1)}\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} K(t, \tau_k^{(1)})\tau_k^{(1)} \cdot \int_{\tau_k^{(1)}\tau_{k+1}^{(1)}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau, \quad t \in \gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\tau_k^{(1)} = e^{k\theta i}$, $\theta = \pi/n$, равномерно сходится к оператору K , причем справедлива оценка

$$\|K - K_n^{(1)}\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 2\pi \cdot \max_{t \in \gamma_0} \sup_{|\tau_1 - \tau_2| \leq \theta} |K(t, \tau_1)\tau_1 - K(t, \tau_2)\tau_2|. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\varphi \in L_2(\gamma_0)$

$$(K\varphi - K_n^{(1)}\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\tau_k^{(1)}\tau_{k+1}^{(1)}} [K(t, \tau)\tau - K(t, \tau_k^{(1)})\tau_k^{(1)}] \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Тогда почти для всех $t \in \gamma_0$ имеем

$$\begin{aligned} |(K\varphi - K_n^{(1)}\varphi)(t)|^2 &\leq 2\pi \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\tau_k^{(1)}\tau_{k+1}^{(1)}} |K(t, \tau)\tau - K(t, \tau_k^{(1)})\tau_k^{(1)}|^2 |d\tau| \right) \\ &\leq 4\pi^2 \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \sup_{|\tau_1 - \tau_2| \leq \theta} |K(t, \tau_1)\tau_1 - K(t, \tau_2)\tau_2|^2. \end{aligned}$$

Из этого получается оценка (2.2) и равномерная сходимость операторов $\{K_n^{(1)}\}$ к оператору K . Лемма доказана.

Пусть $t \in \gamma_0$. Очевидно, что существует число $m \in \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ такое, что $t \in \tau_m^{(1)}\tau_{m+1}^{(1)}$. Рассмотрим последовательность операторов

$$K_n^{(2)}\varphi(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^\theta K(e^{i\sigma}\tau_m^{(1)}, \tau_{k+m}^{(1)})\tau_{k+m}^{(1)} \cdot i d\sigma \cdot \varphi(\tau_k^{(t)}), \quad t \in \gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 2.2. *Последовательность операторов $\{K_n - K_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится к нулю в $L_2(\gamma_0)$; при этом справедлива оценка*

$$\|K_n - K_n^{(2)}\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 2\pi \cdot \max_{\substack{|\tau_1 - \tau_2| \leq \theta \\ |t_1 - t_2| \leq \theta}} |K(t_1, \tau_1)\tau_1 - K(t_2, \tau_2)\tau_2|. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \tau_m^{(1)}\tau_{m+1}^{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} (K_n - K_n^{(2)})\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{2n-1} K(t, \tau_k^{(t)})\varphi(\tau_k^{(t)}) \cdot i \cdot \theta \tau_k^{(t)} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^\theta K(e^{i\sigma}\tau_m^{(1)}, \tau_{k+m}^{(1)})\tau_{k+m}^{(1)} \cdot i d\sigma \cdot \varphi(\tau_k^{(t)}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^\theta [K(t, \tau_k^{(t)})\tau_k^{(t)} - K(e^{i\sigma}\tau_m^{(1)}, \tau_{k+m}^{(1)})\tau_{k+m}^{(1)}] i d\sigma \cdot \varphi(\tau_k^{(t)}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как расстояние соответственно между точками $t \in \tau_m^{(1)} \tau_{m+1}^{(1)}$ и $e^{i\sigma} \tau_m^{(1)}$ ($\sigma \in [0, \theta]$), $\tau_k^{(t)}$ и $\tau_{k+m}^{(1)}$ меньше, чем θ , имеем

$$|K(t, \tau_k^{(t)})\tau_k^{(t)} - K(e^{i\sigma}\tau_m^{(1)}, \tau_{k+m}^{(1)})\tau_{k+m}^{(1)}| \leq \max_{\substack{|\tau_1 - \tau_2| \leq \theta \\ |t_1 - t_2| \leq \theta}} |K(t_1, \tau_1)\tau_1 - K(t_2, \tau_2)\tau_2|.$$

Отсюда и из (2.4) получается оценка (2.3). Лемма доказана.

Из теоремы 1.2 и леммы 2.2 следует, что последовательность операторов $K_n^{(2)} = (K_n^{(2)} - K_n) + K_n$, $n = 1, 2, \dots$, сильно сходится к оператору K .

ЛЕММА 2.3. Если существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$, то при больших значениях n операторы $(I + K_n^{(2)})^{-1}$ также обратимы и $(I + K_n^{(2)})^{-1} \xrightarrow{s} (I + K)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$. Поскольку последовательность операторов $\{K_n^{(1)}\}$ равномерно сходится к оператору K , то при больших значениях $n (\geq n_0)$ операторы $I + K_n^{(1)}$ равномерно обратимы.

Для любого $f(t) \in L_2(\gamma_0)$ рассмотрим уравнение

$$(I + K_n^{(2)})\varphi_n(t) = f(t), \quad t \in \gamma_0. \quad (2.5)$$

Если рассмотреть уравнение (2.5) в точках

$$\tau_{-m}^{(t)}, \tau_{-m+1}^{(t)}, \dots, \tau_{-1}^{(t)}, \tau_0^{(t)}, \tau_1^{(t)}, \dots, \tau_{2n-m-1}^{(t)},$$

где m – такой индекс, что $t \in \tau_m^{(1)} \tau_{m+1}^{(1)}$, то его можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\Phi_n \cdot G_n = F_n, \quad (2.6)$$

где

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 + g_{00} & g_{01} & \dots & g_{02n-1} \\ g_{10} & 1 + g_{11} & \dots & g_{12n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{2n-10} & g_{2n-11} & \dots & 1 + g_{2n-12n-1} \end{pmatrix},$$

$$g_{ij} = \int_0^\theta K(e^{i\sigma} \tau_j^{(1)}, \tau_i^{(1)}) \tau_i^{(1)} \cdot i \, d\sigma,$$

$$\Phi_n = (\varphi_n(\tau_{-m}^{(t)}), \varphi_n(\tau_{-m+1}^{(t)}), \dots, \varphi_n(\tau_{-m+2n-1}^{(t)})),$$

$$F_n = (f(\tau_{-m}^{(t)}), f(\tau_{-m+1}^{(t)}), \dots, f(\tau_{-m+2n-1}^{(t)})).$$

Докажем, что $\det G_n \neq 0$ при любом $n \geq n_0$. Для этого надо показать, что уравнение

$$(x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}) \cdot G_n = (d_0, d_1, \dots, d_{2n-1}) \quad (2.7)$$

разрешимо при любой правой части. Для любого вектора $(d_0, d_1, \dots, d_{2n-1})$ возьмем функцию

[illegible]

где $\varphi_n^0(t) = (I + K_n^{(1)})^{-1} f^{(0)}(t)$. Следовательно,

$$\int_0^\theta \varphi_n^0(e^{i\sigma} \tau_k^{(1)}) d\sigma = (d_0, d_1, \dots, d_{2n-1}) \cdot (G_n^{-1})^{(k)}, \quad k = \overline{0, 2n-1}. \quad (2.11)$$

Так как семейство операторов $\{(I + K_n^{(1)})^{-1}\}$ равномерно ограничено, т.е. существует $M_0 < +\infty$ такое, что для любого $n \geq n_0$

$$\|(I + K_n^{(1)})^{-1}\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq M_0,$$

то

$$\|\varphi_n^0\|_{L_2(\gamma_0)} = \|(I + K_n^{(1)})^{-1} f^{(0)}\|_{L_2(\gamma_0)} \leq M_0 \|f^{(0)}\|_{L_2(\gamma_0)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2\pi\theta} \sum_{k=0}^{2n-1} d_k^2 \right)^{1/2}.$$

С другой стороны, из (2.11) получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n-1} |(d_0, d_1, \dots, d_{2n-1}) \cdot (G_n^{-1})^{(k)}|^2 &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left| \int_0^\theta \varphi_n^0(e^{i\sigma} \tau_k^{(1)}) d\sigma \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{2n-1} \theta \cdot \int_0^\theta |\varphi_n^0(e^{i\sigma} \tau_k^{(1)})|^2 d\sigma \\ &= \theta \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\tau_k^{(1)} \tau_{k+1}^{(1)}} |\varphi_n^0(\tau)|^2 |d\tau| = 2\pi\theta \|\varphi_n^0\|_{L_2(\gamma_0)}^2 \leq M_0^2 \sum_{k=0}^{2n-1} d_k^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Учитывая (2.12), из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{L_2(\gamma_0)}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} M_0^2 \int_{\tau_0^{(1)} \tau_1^{(1)}} \sum_{k=0}^{2n-1} |f(\tau_k^{(t)})|^2 |dt| \\ &= M_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} |f(t)|^2 |dt| = M_0^2 \|f\|_{L_2(\gamma_0)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, для любых $n \geq n_0$ и $f \in L_2(\gamma_0)$ справедливо неравенство

$$\|(I + K_n^{(2)})^{-1}\|_{L_2(\gamma_0)} \leq M_0 \|f\|_{L_2(\gamma_0)},$$

т.е. неравенство

$$\|(I + K_n^{(2)})^{-1}\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq M_0.$$

Мы получили, что операторы $I + K_n^{(2)}$ равномерно обратимы; тогда согласно предложению 2.1

$$(I + K_n^{(2)})^{-1} \xrightarrow{s} (I + K)^{-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

Согласно предложению 2.2 из леммы 2.3 получим, что если существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$, то к оператору $I + K$ применим приближенный метод по системе операторов $I + K_n$, так как $I + K_n = I + K_n^{(2)} + (K_n - K_n^{(2)})$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_n - K_n^{(2)}\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} = 0.$$

Пусть $B, B_n, n = 1, 2, \dots$, — ограниченные линейные операторы, действующие в $L_2(\gamma_0)$, причем операторы B_n имеют вид

$$(B_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \beta_k^{(n)}(t) \varphi(\tau_k^{(t)})$$

и $B_n \xrightarrow{s} B$ при $n \rightarrow \infty$, где $\beta_k^{(n)}(t) \in C(\gamma_0)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, — заданные функции.

ЛЕММА 2.4. Если существует обратный оператор $(I + BK)^{-1}$, то к оператору $(I + BK)$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + B_n K_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что операторы $B_n K_n^{(1)}$ равномерно сходятся к оператору BK . Так как операторы $K_n^{(1)}$ равномерно сходятся к оператору K и последовательность $\{\|B_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)}\}$ ограничена, то

$$\|B_n K_n^{(1)} - B_n K\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq \|B_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \|K_n^{(1)} - K\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)}.$$

Известно [15], что из сильной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов следует ее равномерная сходимость на любом компактном множестве. Тогда операторы $B_n K$ равномерно сходятся к оператору BK . Из соотношения

$$B_n K_n^{(1)} - BK = B_n K_n^{(1)} - B_n K + B_n K - BK$$

получим, что операторы $B_n K_n^{(1)}$ равномерно сходятся к оператору BK .

Докажем, что при больших значениях n операторы $I + B_n K_n^{(2)}$ также обратимы и

$$(I + B_n K_n^{(2)})^{-1} \xrightarrow{s} (I + BK)^{-1}.$$

Сначала отметим, что

$$\begin{aligned} B_n(K_n^{(2)} \varphi)(t) &= \sum_{p=0}^{2n-1} \beta_p(t) \left[\sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^\theta K(e^{i\sigma \tau_m^{(1)}, \tau_{k+m}^{(1)}}) \tau_{k+m}^{(1)} i d\sigma \varphi(\tau_k^{(\cdot)}) \right] \Big|_{\tau_p^{(t)}} \\ &= \sum_{p=0}^{2n-1} \beta_p(t) \sum_{k=0}^{2n-1} \int_0^\theta K(e^{i\sigma \tau_{m+p}^{(1)}, \tau_{k+m+p}^{(1)}}) \tau_{k+m+p}^{(1)} i d\sigma \varphi(\tau_{k+p}^{(t)}) \\ &= \sum_{q=0}^{2n-1} \int_0^\theta \sum_{p=0}^{2n-1} \beta_p(t) K(e^{i\sigma \tau_{m+p}^{(1)}, \tau_{m+q}^{(1)}}) \tau_{m+q}^{(1)} i d\sigma \varphi(\tau_q^{(t)}) \\ &= \sum_{q=0}^{2n-1} \int_0^\theta B_n K(\cdot, \tau_{m+q}^{(1)}) \Big|_{e^{i\sigma \tau_m^{(1)}, \tau_{m+q}^{(1)}}} i d\sigma \varphi(\tau_q^{(t)}), \end{aligned}$$

где m — такой индекс, что $t \in \tau_m^{(1)} \tau_{m+1}^{(1)}$.

Из равномерной сходимости операторов $B_n K_n^{(1)}$ к оператору BK вытекает, что при больших значениях $n (\geq n_1)$ операторы $I + B_n K_n^{(1)}$ равномерно обратимы. Тогда при $n \geq n_1$ уравнение

$$\varphi(t) + \sum_{k=0}^{2n-1} B_n K(t, \tau_k^{(1)}) \tau_k^{(1)} \cdot \int_{\tau_k^{(1)} \tau_{k+1}^{(1)}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma_0, \quad (2.13)$$

разрешимо для любого $f \in L_2(\gamma_0)$.

Затем, действуя точно так же, как и в лемме 2.3 (беря $B_n K(t, \tau_k^{(1)})$ как $K(t, \tau_k^{(1)})$, интегрируем (2.13) по s на отрезках $[p\theta, (p+1)\theta]$, где $t = e^{is}$ и так далее $\dots$), доказываем равномерную обратимость операторов $I + B_n K_n^{(2)}$.

Так как

$$\|B_n(K_n^{(2)} - K_n)\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то в силу предположений 2.1 и 2.2 получим, что к оператору $(I + BK)$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + B_n K_n\}$. Лемма доказана.

Обозначим через Π множество последовательностей ограниченных линейных операторов $\{B_n\}$, действующих в $L_2(\gamma_0)$, вида

$$(B_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \beta_k^{(n)}(t) \varphi(\tau_k^{(t)}),$$

где $\beta_k^{(n)}(t) \in C(\gamma_0)$, $k = \overline{0, 2n-1}$ — такие функции, что $B_n \rightarrow B$, и B — линейный ограниченный оператор в $L_2(\gamma_0)$; а через Π_0 обозначим множество последовательностей $\{M_n\} \in \Pi$, удовлетворяющих условию

(*) если существует обратный оператор $(I + BM)^{-1}$, то для любой последовательности $\{B_n\} \in \Pi$, $B_n \xrightarrow{s} B$, к оператору $I + BM$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + B_n M_n\}$, где $M_n \xrightarrow{s} M$.

При таком определении лемму 2.4 можно сформулировать в следующем виде.

ЛЕММА 2.5. *Последовательность операторов $\{K_n\} \in \Pi_0$.*

Имеет место следующая

ЛЕММА 2.6. *Если для любого $m \in \mathbb{N}$ последовательность операторов $\{M_n^{(m)}\} \in \Pi_0$, $\{M_n\} \in \Pi$ и*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_n^{(m)} - M_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} = 0, \quad (2.14)$$

то $\{M_n\} \in \Pi_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия (2.14). Так как любая последовательность операторов $\{B_n\} \in \Pi$ равномерно ограничена, то по соотношению (2.14) существует такой номер $m_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n M_n^{(m_0)} - B_n M_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} < 1.$$

Отсюда следует, что семейство операторов

$$\{I + B_n M_n - B_n M_n^{(m_0)}\}$$

равномерно обратимо. Согласно соотношению

$$\begin{aligned} I + B_n M_n &= I + B_n M_n - B_n M_n^{(m_0)} + B_n M_n^{(m_0)} \\ &= (I + B_n M_n - B_n M_n^{(m_0)}) [I + (I + B_n M_n - B_n M_n^{(m_0)})^{-1} B_n M_n^{(m_0)}] \end{aligned}$$

получим, что семейство операторов $\{I + B_n M_n\}$ также равномерно обратимо (начиная с некоторого $n \geq n_0$), потому что $\{(I + B_n M_n - B_n M_n^{(m_0)})^{-1} B_n\} \in \Pi$ и $\{M_n^{(m_0)}\} \in \Pi_0$. Лемма доказана.

Обозначим через Π' множество последовательностей $\{D_n\} \in \Pi$, имеющих вид

$$(D_n \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{(n)}(t) \varphi(\tau_{2k}^{(t)}),$$

где $\alpha_k^{(n)}(t) \in C(\gamma_0)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, а через Π'_0 обозначим множество последовательностей $\{C_n\} \in \Pi$, удовлетворяющих условию

(**) если существует обратный оператор $(I + DC)^{-1}$, то для любой последовательности $\{D_n\} \in \Pi'$, $D_n \xrightarrow{s} D$, к оператору $I + DC$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + D_n C_n\}$, где $C_n \xrightarrow{s} C$.

Обозначим

$$(K_n^{(3)} \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} K(t, \tau_{2k}^{(t)}) \varphi(\tau_{2k}^{(t)}) \cdot \Delta \tau_{2k}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0.$$

Аналогично лемме 2.4 доказывается

ЛЕММА 2.7. *Последовательность операторов $\{K_n^{(3)}\}$ сильно сходится к оператору K и $\{K_n^{(3)}\} \in \Pi'_0$.*

Обозначим

$$(K_n^{(4)} \varphi)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} K(t, \tau_{2k+1}^{(t)}) \varphi(\tau_{2k+1}^{(t)}) \cdot \Delta \tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0.$$

Тогда

$$(K_n^{(4)} \varphi)(t) = 2(K_n \varphi)(t) - (K_n^{(3)} \varphi)(t). \quad (2.15)$$

ЛЕММА 2.8. *Последовательность операторов $\{K_n^{(4)}\}$ сильно сходится к оператору K . Кроме того, если существуют обратные операторы $(I \pm K)^{-1}$, то к оператору $(I + K)$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + K_n^{(4)}\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (2.15) при переходе к пределу в сильной операторной топологии получим, что $K_n^{(4)} \xrightarrow{s} K$. Так как $\{K_n^{(3)}\} \in \Pi'_0$ и существует обратный оператор $(I - K)^{-1}$, то при больших значениях n операторы $I - K_n^{(3)}$ также обратимы и $(I - K_n^{(3)})^{-1} \xrightarrow{s} (I - K)^{-1}$. Тогда

$$I + 2(I - K_n^{(3)})^{-1} K_n \xrightarrow{s} I + 2(I - K)^{-1} K = (I - K)^{-1} (I + K).$$

Но с другой стороны, оператор $(I - K)^{-1} (I + K)$ обратим,

$$\{K_n\} \in \Pi_0, \quad \{2(I - K_n^{(3)})^{-1}\} \in \Pi,$$

значит, из соотношения

$$I + K_n^{(4)} = I + 2K_n - K_n^{(3)} = (I - K_n^{(3)})(I + 2(I - K_n^{(3)})^{-1} K_n)$$

получим, что операторы $I + K_n^{(4)}$ также обратимы при больших значениях n и $(I + K_n^{(4)})^{-1} \xrightarrow{s} (I + K)^{-1}$. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим операторы, которые нам будут нужны в дальнейшем:

$$(T\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{a_0(\tau) - a_0(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$(T_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{a_0(\tau_k^{(t)}) - a_0(t)}{\tau_k^{(t)} - t} \varphi(\tau_k^{(t)}) \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right),$$

где $t \in \gamma_0$, $a_0(t) \in C(\gamma_0)$.

Очевидно, что в случае, когда $a_0(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\{T_n\} \in \Pi_0$. Докажем, что $\{T_n\} \in \Pi_0$ также в случае $a_0(t) \in C(\gamma_0)$. Для этого рассмотрим операторы

$$(\widetilde{S}_n\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\varphi(\tau_k^{(t)})}{\tau_k^{(t)} - t} \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta \tau_k^{(t)} \right), \quad t \in \gamma_0.$$

Вычисляя $\widetilde{S}_n(t^m)$, получим, что $\widetilde{S}_n(t^m) = \widetilde{\lambda_m^{(n)}} \cdot t^m$, где

$$\widetilde{\lambda_m^{(n)}} = \frac{1}{2ni} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{e^{(m+1/2)k\theta i}}{\sin(k\theta/2)}$$

и нетрудно показать, что $|\widetilde{\lambda_m^{(n)}}| \leq 1$ для любого $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\|\widetilde{S}_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Аналогично, в случае последовательности $\{S_n\}$ доказывается, что $\widetilde{S}_n \xrightarrow{s} S$ и

$$(T_n\varphi)(t) = -a_0(t)(\widetilde{S}_n\varphi)(t) + (\widetilde{S}_na_0\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Для любого $a_0(t) \in C(\gamma_0)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{a_m(t)\}$, сходящаяся к функции $a_0(t)$ в $C(\gamma_0)$, т.е.

$$\max_{t \in \gamma_0} |a_m(t) - a_0(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим операторы

$$(T_n^{(m)}\varphi)(t) = -a_m(t)(\widetilde{S}_n\varphi)(t) + (\widetilde{S}_na_m\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Так как $\{T_n^{(m)}\} \in \Pi_0$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n^{(m)} - T_n\|_{L_2(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} = 0,$$

то согласно лемме 2.6 получим, что $\{T_n\} \in \Pi_0$.

Для последовательности операторов

$$(T_n^{(3)}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_0(\tau_{2k}^{(t)}) - a_0(t)}{\tau_{2k}^{(t)} - t} \varphi(\tau_{2k}^{(t)}) \cdot \Delta \tau_{2k}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0,$$

аналогично доказывается, что $\{T_n^{(3)}\} \in \widetilde{\Pi}_0$ при $a_0(t) \in C(\gamma_0)$. Пусть

$$(T_n^{(4)}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_0(\tau_{2k+1}^{(t)}) - a_0(t)}{\tau_{2k+1}^{(t)} - t} \varphi(\tau_{2k+1}^{(t)}) \cdot \Delta \tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0.$$

Так как

$$T_n^{(4)} = 2T_n - T_n^{(3)} = -a_0 S_n + S_n a_0, \quad \{T_n\} \in \Pi_0, \quad \{T_n^{(3)}\} \in \Pi'_0, \\ T_n \xrightarrow{s} T, \quad T_n^{(3)} \xrightarrow{s} T, \quad T_n^{(4)} \xrightarrow{s} T \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(эти сходимости получаются из сходимостей $\widetilde{S}_n \xrightarrow{s} S$, $S_n \xrightarrow{s} S$), то аналогично лемме 2.7 доказывается

ЛЕММА 2.9. Пусть существуют обратные операторы $(I \pm T)^{-1}$. Тогда к оператору $I + T$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + T_n^{(4)}\}$.

Теперь займемся обоснованием применимости приближенного метода для полного СИУ с непрерывными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2.2. К обратимому полному СИО

$$(\mathfrak{R}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (K\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

где $a(t), b(t) \in C(\gamma_0)$, $K \in C(\gamma_0 \times \gamma_0)$, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ для всех $t \in \gamma_0$, применим приближенный метод по системе операторов

$$(\mathfrak{R}_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (K_n\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

т.е. операторы $\mathfrak{R}_n$ также обратимы при больших значениях n и $\mathfrak{R}_n^{-1} \xrightarrow{s} \mathfrak{R}^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$, причем справедлива оценка

$$\|\mathfrak{R}_n^{-1}f - \mathfrak{R}^{-1}f\|_{L_2(\gamma_0)} \leq \text{const} \cdot \{[2\|b\|_{C(\gamma_0)} + 4\pi\|K\|_{C(\gamma_0 \times \gamma_0)} + 4\pi E_{n-1}(K)] \cdot E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + 4\pi E_{n-1}(K) \|\varphi\|_{L_2(\gamma_0)}\}, \quad (2.16)$$

где $\varphi = \mathfrak{R}^{-1}f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим СИО

$$(K^0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + (S\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

где $a(t) \in C(\gamma_0)$, $a^2(t) - 1 \neq 0$ для всех $t \in \gamma_0$. Для этого оператора построим приближенный метод по системе операторов $(K_n^0\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + (S_n\varphi)(t)$, $t \in \gamma_0$. Пусть

$$(\overline{K_n^0}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) - (S_n\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Тогда

$$(K_n^0 \overline{K_n^0}\varphi)(t) = (a^2(t) - 1) \left[I + \frac{1}{a^2(t) - 1} \Gamma_n^0 \right] \varphi(t), \quad t \in \gamma_0, \quad (2.17)$$

$$(\overline{K_n^0} K_n^0\varphi)(t) = (a^2(t) - 1) \left[I - \frac{1}{a^2(t) - 1} \Gamma_n^0 \right] \varphi(t), \quad t \in \gamma_0, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} (\Gamma_n^0 \varphi)(t) &= S_n(a\varphi)(t) - a(t)(S_n \varphi)(t) \\ &= \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a(\tau_{2k+1}^{(t)}) - a(t)}{\tau_{2k+1}^{(t)} - t} \varphi(\tau_{2k+1}^{(t)}) \cdot \Delta \tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0. \end{aligned}$$

Так как операторы

$$I + \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma^0 = \frac{1}{a^2 - 1} K^0 \overline{K^0}, \quad I - \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma^0 = \frac{1}{a^2 - 1} \overline{K^0} K^0,$$

где

$$(\Gamma^0 \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{a(\tau) - a(t)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad (\overline{K^0} \varphi)(t) = a(t)\varphi(t) - (S\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

обратимы, то по лемме 2.9 к операторам

$$\left\{ I \pm \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma^0 \right\}$$

применим приближенный метод соответственно по системам операторов

$$\left\{ I \pm \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma_n^0 \right\}.$$

Из соотношений (2.17), (2.18) получим, что существуют левые и правые обратные оператора K_n^0 и

$$(K_n^0)_r^{-1} = \overline{K_n^0} \left[I + \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma_n^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)}, \quad (K_n^0)_l^{-1} = \left[I - \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma_n^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)} \overline{K_n^0}.$$

Следовательно, операторы K_n^0 имеют обратные

$$(K_n^0)^{-1} = \overline{K_n^0} \left[I + \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma_n^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)} = \left[I - \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma_n^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)} \overline{K_n^0}$$

и эта последовательность операторов сильно сходится к оператору

$$(K^0)^{-1} = \overline{K^0} \left[I + \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)} = \left[I - \frac{1}{a^2 - 1} \Gamma^0 \right]^{-1} \frac{1}{(a^2 - 1)} \overline{K^0}.$$

Теперь рассмотрим характеристический СИО

$$(\Re \varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

где $a(t), b(t) \in C(\gamma_0)$, $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ для всех $t \in \gamma_0$. Для этого оператора построим приближенный метод по системе операторов $(\Re_n^0 \varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n \varphi)(t)$, $t \in \gamma_0$. Из соотношения $S_n^2 = I$ получим, что

$$\Re_n^0(I + \alpha S_n)\varphi(t) = [a(t) + \alpha b(t)]\varphi(t) + [b(t) + \alpha a(t)](S_n \varphi)(t),$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ — любое комплексное число. Так как $b(t) \pm a(t) \neq 0$, то $r_0 = \min_{t \in \gamma_0} |b(t) + a(t)| > 0$.

Обозначим $\alpha_0 = r_0 / (2\|a\|_{C(\gamma_0)} + 1)$. Тогда для любого $t \in \gamma_0$

$$|b(t) + a(t) + \alpha a(t)| \geq |b(t) + a(t)| - |\alpha a(t)| \geq r_0 - \frac{r_0}{2\|a\|_{C(\gamma_0)} + 1} \cdot |a(t)| \geq \frac{r_0}{2} > 0,$$

т.е. $b(t) + (1 + \alpha_0)a(t) \neq 0$ для всех $t \in \gamma_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Re^0(I + (1 + \alpha_0)S)\varphi(t) &= [b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)] \\ &\times \left[\frac{a(t) + (1 + \alpha_0)b(t)}{b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)} \varphi(t) + (S\varphi)(t) \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \Re_n^0(I + (1 + \alpha_0)S_n)\varphi(t) &= [b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)] \\ &\times \left[\frac{a(t) + (1 + \alpha_0)b(t)}{b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)} \varphi(t) + (S_n\varphi)(t) \right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Re^0}(I - (1 + \alpha_0)S)\varphi(t) &= [b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)] \\ &\times \left[\frac{a(t) + (1 + \alpha_0)b(t)}{b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)} \varphi(t) - (S\varphi)(t) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Re_n^0}(I - (1 + \alpha_0)S)\varphi(t) &= [b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)] \\ &\times \left[\frac{a(t) + (1 + \alpha_0)b(t)}{b(t) + (1 + \alpha_0)a(t)} \varphi(t) - (S_n\varphi)(t) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$(\overline{\Re^0}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) - b(t)(S\varphi)(t), \quad (\overline{\Re_n^0}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) - b(t)(S_n\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Так как операторы $\Re^0$, $\overline{\Re^0}$ и $(I \pm (1 + \alpha_0)S)$ обратимы, то из (2.19) и (2.21) следует, что операторы

$$\frac{a + (1 + \alpha_0)b}{b + (1 + \alpha_0)a} \pm S$$

также обратимы. Тогда к оператору

$$\frac{a + (1 + \alpha_0)b}{b + (1 + \alpha_0)a} + S$$

применим приближенный метод по системе операторов

$$\left\{ \frac{a + (1 + \alpha_0)b}{b + (1 + \alpha_0)a} + S_n \right\}.$$

А из соотношения (2.20) следует, что операторы $\Re_n^0$ также обратимы и

$$(\Re_n^0)^{-1} \xrightarrow{s} (\Re^0)^{-1} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В случае полного СИО имеют место соотношения

$$\Re = aI + bS + K = (aI + bS)[I + (aI + bS)^{-1}K], \quad (2.23)$$

$$\Re_n = aI + bS_n + K_n = (aI + bS_n)[I + (aI + bS_n)^{-1}K_n]. \quad (2.24)$$

Из (2.23) получим, что оператор $I + (aI + bS)^{-1}K$ обратим. Значит, согласно лемме 2.4 к этому оператору применим приближенный метод по системе операторов $\{I + (aI + bS_n)^{-1}K_n\}$. Тогда из (2.24) следует, что операторы $\Re_n$ также обратимы и $(\Re_n)^{-1} \xrightarrow{s} (\Re)^{-1}$.

А оценка (2.16) вытекает из замечания 2.1 гл. 2 [7] и из теорем 1.1, 1.2. Теорема доказана.

3. Обоснование метода для решения СИУ по гладкой замкнутой кривой. Пусть γ – простая гладкая замкнутая кривая. Рассмотрим действующий в $L_2(\gamma)$ полный линейный СИО

$$(\mathfrak{R}\varphi)(\xi) = a(\xi)\varphi(\xi) + \frac{b(\xi)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\eta)}{\eta - \xi} d\eta + \int_{\gamma} K(\xi, \eta)\varphi(\eta) d\eta, \quad \xi \in \gamma,$$

где $a(\xi), b(\xi) \in C(\gamma)$, $K(\xi, \eta) \in C(\gamma \times \gamma)$, $a^2(\xi) - b^2(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in \gamma$.

Мы показали, что в случае единичной окружности γ_0 к оператору

$$(\mathfrak{R}\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (K\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0,$$

применим приближенный метод по системе операторов

$$(\mathfrak{R}_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S_n\varphi)(t) + (K_n\varphi)(t), \quad t \in \gamma_0.$$

Теперь докажем, что аналогичный результат справедлив в случае, когда γ – простая гладкая замкнутая кривая.

Пусть $\xi = \xi(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, есть параметрическое уравнение кривой γ , где $\xi(\sigma)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $\xi'(\sigma) \neq 0$ при всех $\sigma \in [0, 2\pi]$. Обозначим $h(t) = \xi(\arg t)$, $t = e^{is} \in \gamma_0$, $\eta_k^{(\xi)} = h(\tau_k^{(t)})$, $\Delta\eta_k^{(\xi)} = \Delta\tau_k^{(t)} \cdot h'(\tau_k^{(t)})$, $k = \overline{0, 2n}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *К обратимому полному СИО $\mathfrak{R}$ применим приближенный метод по системе операторов*

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}_n\varphi)(\xi) = & a(\xi)\varphi(\xi) + \frac{b(\xi)}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\varphi(\eta_k^{(\xi)})}{\eta_k^{(\xi)} - \xi} \cdot \Delta\eta_k^{(\xi)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta\tau_{2k+1}^{(1)}}{\tau_{2k+1}^{(1)} - 1} \varphi(\eta_{2k+1}^{(\xi)}) \right. \\ & \left. - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta\tau_{2k}^{(1)}}{\tau_{2k}^{(1)} - 1} \varphi(\eta_{2k}^{(\xi)}) \right] + \sum_{k=0}^{2n-1} K(\xi, \eta_k^{(\xi)})\varphi(\eta_k^{(\xi)}) \cdot \left(\frac{1}{2} \Delta\eta_k^{(\xi)} \right), \quad \xi \in \gamma, \end{aligned}$$

т.е. операторы $\mathfrak{R}_n$ также обратимы при больших значениях n и $(\mathfrak{R}_n)^{-1} \xrightarrow{s} (\mathfrak{R})^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\mathfrak{R}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}\varphi)(h(t)) = & a(h(t))\varphi(h(t)) + \frac{b(h(t))}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(h(\tau))}{h(\tau) - h(t)} h'(\tau) d\tau \\ & + \int_{\gamma_0} K(h(t), h(\tau))\varphi(h(\tau))h'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Рассмотрим действующий в $L_2(\gamma_0)$ СИО

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}\psi)(t) = & a(h(t))\psi(t) + \frac{b(h(t))}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\psi(\tau)}{h(\tau) - h(t)} h'(\tau) d\tau \\ & + \int_{\gamma_0} K(h(t), h(\tau))\psi(\tau)h'(\tau) d\tau, \quad t \in \gamma_0. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{h'(\tau)}{h(\tau) - h(t)} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{h(\tau) - h(t) - h'(\tau)(\tau - t)}{(\tau - t)(h(\tau) - h(t))}, \quad (t, \tau) \in \gamma_0 \times \gamma_0, \quad \tau \neq t,$$

и функция

$$H(t, \tau) = \begin{cases} \frac{h(\tau) - h(t) - h'(\tau)(\tau - t)}{(\tau - t)(h(\tau) - h(t))}, & \tau \neq t, \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{h''(t)}{h'(t)}, & \tau = t, \end{cases}$$

непрерывна на $\gamma_0 \times \gamma_0$, то оператор $\mathfrak{Z}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}\psi)(t) &= a(h(t))\psi(t) + \frac{b(h(t))}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ &\quad + \int_{\gamma_0} \left[K(h(t), h(\tau)) - \frac{b(h(t))}{\pi i} H(t, \tau) \right] \psi(\tau) d\tau, \quad t \in \gamma_0. \end{aligned}$$

По теореме 2.2 к оператору $\mathfrak{Z}$ применим приближенный метод по системе операторов

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}_n\psi)(t) &= a(h(t))\psi(t) + \frac{b(h(t))}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\psi(\tau_{2k+1}^{(t)})}{\tau_{2k+1}^{(t)} - t} \Delta\tau_{2k+1}^{(t)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2n-1} \left[K(h(t), h(\tau_k^{(t)})) h'(\tau_k^{(t)}) - \frac{b(h(t))}{\pi i} H(t, \tau_k^{(t)}) \right] \psi(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta\tau_k^{(t)} \right). \end{aligned}$$

Замечая, что

$$H(t, \tau_k^{(t)}) = \frac{1}{\tau_k^{(t)} - t} - \frac{h'(\tau_k^{(t)})}{h(\tau_k^{(t)}) - h(t)}, \quad k = \overline{1, 2n-1}, \quad H(t, t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h''(t)}{h'(t)},$$

получим

$$\begin{aligned} (\mathfrak{Z}_n\psi)(t) &= a(h(t))\psi(t) + \frac{b(h(t))}{\pi i} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\psi(\tau_k^{(t)})}{h(\tau_k^{(t)}) - h(t)} h'(\tau_k^{(t)}) \frac{1}{2} \Delta\tau_k^{(t)} \right. \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\Delta\tau_{2k+1}^{(1)}}{\tau_{2k+1}^{(1)} - 1} \psi(\tau_{2k+1}^{(t)}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\Delta\tau_{2k}^{(1)}}{\tau_{2k}^{(1)} - 1} \psi(\tau_{2k}^{(t)}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{h''(t)}{h'(t)} \psi(t) \frac{1}{2} \Delta\tau_0^{(t)} \left. \right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2n-1} K(h(t), h(\tau_k^{(t)})) h'(\tau_k^{(t)}) \psi(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta\tau_k^{(t)} \right), \quad t \in \gamma_0. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{b(h(\cdot))}{\pi i} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h''(\cdot)}{h'(\cdot)} \psi(\cdot) \frac{1}{2} \Delta\tau_0^{(\cdot)} \right\|_{L_2(\gamma_0)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{t \in \gamma_0} |b(h(t)) \cdot h''(t)|}{\min_{t \in \gamma_0} |h'(t)|} \frac{\pi}{n} \|\psi\|_{L_2(\gamma_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то, учитывая предложение 2.2, к оператору $\mathfrak{F}$ применим приближенный метод по системе операторов

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathfrak{F}}_n \psi)(t) = & a(h(t))\psi(t) + \frac{b(h(t))}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\psi(\tau_k^{(t)})}{h(\tau_k^{(t)}) - h(t)} h'(\tau_k^{(t)}) \Delta \tau_k^{(t)} \right. \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{2k+1}^{(1)}}{\tau_{2k+1}^{(1)} - 1} \psi(\tau_{2k+1}^{(1)}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{2k}^{(1)}}{\tau_{2k}^{(1)} - 1} \psi(\tau_{2k}^{(1)}) \left. \right] \\ & + \sum_{k=0}^{2n-1} K(h(t), h(\tau_k^{(t)})) h'(\tau_k^{(t)}) \psi(\tau_k^{(t)}) \left(\frac{1}{2} \cdot \Delta \tau_k^{(t)} \right), \quad t \in \gamma_0. \end{aligned}$$

Пусть оператор $\mathfrak{R}$ обратим. Докажем, что тогда при больших значениях n операторы $\mathfrak{R}_n$ также обратимы и решения уравнений $\mathfrak{R}_n \varphi_n(\xi) = f(\xi)$ сходятся к решению уравнения $\mathfrak{R} \varphi(\xi) = f(\xi)$ в сильной операторной топологии. По предложению 2.1 для этого достаточно доказать, что уравнение $\mathfrak{R}_n \varphi_n(\xi) = f(\xi)$ разрешимо при больших значениях n ($\geq n_0$) и операторы $\{\mathfrak{R}_n^{-1}\}_{n \geq n_0}$ равномерно ограничены.

К оператору $\mathfrak{F}$ применим приближенный метод по системе операторов $\{\widetilde{\mathfrak{F}}_n\}$. Тогда для любого $\nu \in L_2(\gamma_0)$ уравнение $\widetilde{\mathfrak{F}}_n \psi_n(t) = \nu(t)$ разрешимо при $n \geq n_0$ и его решение $\psi_n(t)$ удовлетворяет соотношению $\|\psi_n\|_{L_2(\gamma_0)} \leq M_1 \cdot \|\nu\|_{L_2(\gamma_0)}$. Возьмем $\nu(t) = f(h(t))$. Тогда решение $\psi_n^*(t)$ уравнения $\widetilde{\mathfrak{F}}_n \psi_n(t) = f(h(t))$ удовлетворяет соотношению

$$\|\psi_n^*\|_{L_2(\gamma_0)} \leq M_1 \cdot \|f(h)\|_{L_2(\gamma_0)} \leq \frac{M_1}{((2\pi/l_\gamma) \cdot \min_{t \in \gamma_0} |h'(t)|)^{1/2}} \cdot \|f\|_{L_2(\gamma_0)},$$

где l_γ — длина кривой γ . Так как для любого $\varphi \in L_2(\gamma)$

$$(\mathfrak{R} \varphi)(\xi) = (\mathfrak{R} \varphi)(h(t)) = (\mathfrak{F} \varphi(h))(t), \quad (\mathfrak{R}_n \varphi)(\xi) = (\mathfrak{R}_n \varphi)(h(t)) = (\widetilde{\mathfrak{F}}_n \varphi(h))(t),$$

где $t = h^{-1}(\xi)$, то для $\varphi_n(\xi) = \psi_n^*(h^{-1}(\xi))$ получим

$$(\mathfrak{R}_n \varphi_n)(\xi) = (\mathfrak{R}_n \varphi_n)(h(t)) = (\widetilde{\mathfrak{F}}_n \varphi_n(h))(t) = \widetilde{\mathfrak{F}}_n \psi_n^*(t) = f(h(t)) = f(\xi),$$

т.е. функция $\varphi_n(\xi)$ является решением уравнения $\mathfrak{R}_n \varphi_n(\xi) = f(\xi)$ и

$$\|\varphi_n\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \frac{2\pi}{l_\gamma} \cdot \max_{t \in \gamma_0} |h'(t)| \cdot \|\varphi_n(h)\|_{L_2(\gamma_0)}^2 \leq M_1 \frac{\max_{t \in \gamma_0} |h'(t)|}{\min_{t \in \gamma_0} |h'(t)|} \cdot \|f\|_{L_2(\gamma)}^2.$$

Отсюда следует, что операторы $\{\mathfrak{R}_n\}_{n \geq n_0}$ равномерно обратимы. Теорема доказана.

С помощью теоремы 3.1 и предложения 2.2 доказывается

ТЕОРЕМА 3.2. В условиях теоремы 3.1 к обратимому полному СИО $\mathfrak{R}$ применим приближенный метод по системе операторов

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathfrak{R}}_n \varphi)(\xi) = & a(\xi) \varphi(\xi) + \frac{b(\xi)}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\varphi(\eta_k^{(\xi)})}{\eta_k^{(\xi)} - \xi} \cdot (\eta_{k+1}^{(\xi)} - \eta_{k-1}^{(\xi)}) \right. \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{2k+1}^{(1)}}{\tau_{2k+1}^{(1)} - 1} \varphi(\eta_{2k+1}^{(\xi)}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta \tau_{2k}^{(1)}}{\tau_{2k}^{(1)} - 1} \varphi(\eta_{2k}^{(\xi)}) \left. \right] \\ & + \sum_{k=0}^{2n-1} K(\xi, \eta_k^{(\xi)}) \varphi(\eta_k^{(\xi)}) \cdot \frac{1}{2} (\eta_{k+1}^{(\xi)} - \eta_{k-1}^{(\xi)}), \quad \xi \in \gamma, \end{aligned}$$

т.е. операторы $\widetilde{\mathfrak{K}}_n$ также обратимы при больших значениях n и $(\widetilde{\mathfrak{K}}_n)^{-1} \xrightarrow{s} (\mathfrak{K})^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Б. И. Мусаеву за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
- [2] Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [3] Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М., 1978.
- [4] Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.
- [5] Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977.
- [6] Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1968.
- [7] Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971.
- [8] Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980.
- [9] Пресдорф З. Принцип локализации в теории методов конечных элементов и некоторые приложения // Тр. Межд. конф. по дифференциальным уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1986. С. 160–167.
- [10] Афендибекова Н. Г., Лифанов И. К., Матвеев А. Ф. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 8. С. 1392–1402.
- [11] Elschner J. On spline collocation for singular integral equations on an interval // Seminar Analysis. Operator Equat. and Number Anal. Berlin, 1986. P. 31–54.
- [12] Rathsfeld A. Quadratur Formelverfahren für eindimensionale Singulare Integralgleichungen // Seminar Analysis. Operator Equat. and Number Anal. Berlin, 1986. P. 147–186.
- [13] Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.–Л.: Гостехиздат, 1951.
- [14] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I–II. М.: Мир, 1965.
- [15] Хатсон В., Пим Дж. Приложение функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

Бакинский государственный университет
E-mail: aliyevrashid@box.az

Поступило
13.01.2000
Исправленный вариант
28.11.2005