Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горский, О дивизорных фильтрациях в пучках, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 825–837

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2757>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 04:07:55

О ДИВИЗОРНЫХ ФИЛЬТРАЦИЯХ В ПУЧКАХ

Е. А. Горский

В настоящей работе предложен способ обобщения понятия ряда Пуанкаре мультииндексной дивизорной фильтрации, соответствующей набору сигма-процессов, на случай произвольного локально-свободного пучка на пространстве раздутия комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. Этот ряд выражен для произвольного пучка через его топологические инварианты. В частности, для пучка функций полученный ответ совпадает с рядом Пуанкаре, вычисленным С. М. Гусейн-Заде и Ф. Дельгадо.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. В [1] Гусейн-Заде и Дельгадо вычислили ряды Пуанкаре мультииндексной фильтрации на пространстве ростков функций от двух переменных, определяемой порядками этих функций на исключительных дивизорах пространства многократного раздутия начала координат. Помимо функций, отображение обратного образа поднимает на пространство разрешения еще и голоморфные 1-формы. Поэтому можно аналогичным образом определить мультииндексную фильтрацию на пространстве ростков голоморфных 1-форм на $\mathbb{C}^2$. Такая фильтрация естественным образом соответствует фильтрации на пространстве глобальных сечений пучка 1-форм на пространстве раздутия.

Задача вычисления ряда Пуанкаре этой фильтрации кажется технически сложнее, чем аналогичная задача для функций. Поэтому в качестве приближения к ответу предлагается заменить пространство глобальных сечений соответствующим пучком и вместо размерностей H^0 вычислять эйлеровы характеристики факторпучков, объединяя их в производящую функцию.

В настоящей работе, в частности, показано, что для пучка функций ответ совпадает с вычисленным в [1]. Теорема 1 дает формулу для этой производящей функции для произвольного локально-свободного пучка на пространстве раздутия в терминах характеристических классов его ограничения на исключительные прямые. В частности, для пучка 1-форм получен ответ, сформулированный в теореме 2.

Элемент $(v_1, \dots, v_s)$ решетки $\mathbb{Z}^s$ будем обозначать через $\underline{v}$. На $\mathbb{Z}^s$ имеется отношение частичного порядка, определяемое следующим образом: $\underline{v} \leq \underline{w}$, если каждая координата v_i не превосходит соответствующей координаты w_i . Для пары $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{Z}^s$ определим верхнюю грань $\sup\{\underline{v}, \underline{w}\}$ как наименьший элемент решетки $\mathbb{Z}^s$, больший или равный как $\underline{v}$, так и $\underline{w}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Убывающей s -индексной фильтрацией на векторном пространстве L будем называть семейство подпространств $\{L(\underline{v}) \mid \underline{v} \in \mathbb{Z}^s\}$ таких, что

- 1) если $\underline{v}_1 \leq \underline{v}_2$, то $L(\underline{v}_1) \supset L(\underline{v}_2)$;
- 2) $L(\underline{v}) \cap L(\underline{w}) = L(\sup\{\underline{v}, \underline{w}\})$;

3) $L(\underline{0}) = L$, где $\underline{0} = (0, \dots, 0)$.

Пусть $L(\underline{v})$ – некоторая s -индексная фильтрация на пространстве L , причем все факторпространства $L(\underline{v})/L(\underline{v} + \underline{1})$ (где $\underline{1} = (1, \dots, 1)$) конечномерны. Положим $d(\underline{v}) = \dim L(\underline{v})/L(\underline{v} + \underline{1})$. Из свойств 2) и 3) следует, что для всех $v'_{i_0} < v''_{i_0} \leq 0$ выполняется условие

$$L(v_1, \dots, v'_{i_0}, \dots, v_s) = L(v_1, \dots, v''_{i_0}, \dots, v_s).$$

Поэтому фильтрация определяется набором подпространств $L(\underline{v})$ для элементов $\underline{v}$, все компоненты которых неотрицательны.

Пусть

$$\mathcal{L} = \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_s, t_1^{-1}, \dots, t_s^{-1}]]$$

– пространство формальных рядов Лорана от s переменных. Элементы $\mathcal{L}$ – это выражения вида $\sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^s} k(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}}$, вообще говоря, бесконечные во все стороны. Пространство $\mathcal{L}$ – не кольцо, но модуль над кольцом многочленов. Пусть

$$Q(t_1, \dots, t_s) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^s} d(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}}.$$

Так как при $v'_{i_0} < v''_{i_0} \leq 0$ имеет место равенство

$$d(v_1, \dots, v'_{i_0}, \dots, v_s) = d(v_1, \dots, v''_{i_0}, \dots, v_s),$$

то

$$P'(t_1, \dots, t_s) = Q(t_1, \dots, t_s) \cdot \prod_{i=1}^s (t_i - 1)$$

является степенным рядом, т.е. в нем нет слагаемых с отрицательными степенями переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ряд

$$P_L(t_1, \dots, t_s) = \frac{P'(t_1, \dots, t_s)}{t_1 \cdots t_s - 1}$$

называется *рядом Пуанкаре мультииндексной фильтрации* $\{L(\underline{v})\}$ на пространстве L .

Это определение ряда Пуанкаре мультииндексной фильтрации было введено в [2].

Пусть $\pi: (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ – аналитическое отображение, являющееся изоморфизмом вне начала координат, причем π можно разложить в композицию s последовательных сигма-процессов, так что исключительный дивизор $\mathcal{D}$ – объединение s неприводимых компонент E_i , каждая из которых изоморфна комплексной проективной прямой.

ЛЕММА 1. *Отображение π^* осуществляет изоморфизм между $H^0(\mathbb{C}^2, \Omega_{\mathbb{C}^2}^k)$ и $H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть w – голоморфная k -форма на $\mathbb{C}^2$ такая, что $\pi^*w = 0$. Тогда $w = 0$ вне начала координат, поэтому $w = 0$. Следовательно, $\ker \pi^* = 0$.

Пусть $\tilde{w}$ – голоморфная k -форма на многообразии $\mathcal{X}$. Так как π^* – изоморфизм вне исключительного дивизора, то на $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ определена голоморфная k -форма $w = (\pi^*)^{-1}\tilde{w}$. По теореме Хартогса ее можно продолжить до голоморфной k -формы w на $\mathbb{C}^2$. Тогда π^*w совпадает с $\tilde{w}$ вне $\mathcal{D}$, а значит, и на всем $\mathcal{X}$. Таким образом, $\text{Im } \pi^* = H^0(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}}^k)$ и π^* – изоморфизм.

Пусть $\mathcal{J}_i$ — пучок идеалов, задающих E_i в $\mathcal{X}$. Пусть далее

$$d_i^j = -(E_i \circ E_j), \quad M = (m_i^j) = D^{-1},$$

где через 'о' обозначен индекс пересечения. Отметим, что d_i^j при $i \neq j$ может быть равно только 0 или 1. Кроме того, пусть $\tilde{E}_i$ — гладкая часть прямой E_i , т.е. компонента E_i , из которой выброшены все точки пересечения с другими компонентами исключительного дивизора.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольный локально-свободный пучок на $\mathcal{X}$. Тогда для любого набора неотрицательных чисел $\underline{k} = (k_1, \dots, k_s)$ умножение задает естественное вложение $\mathcal{G} \otimes \prod_{i=1}^s \mathcal{J}_i^{k_i} \hookrightarrow \mathcal{G}$. Поэтому в $\mathcal{G}$ определена фильтрация подпучками

$$\mathcal{G}(k_1, \dots, k_s) = \mathcal{G} \otimes \prod_{i=1}^s \mathcal{J}_i^{k_i}.$$

Эта фильтрация определяет мультииндексную фильтрацию $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{G}(k_1, \dots, k_s))$ в пространстве глобальных сечений $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{G})$, ряд Пуанкаре которой для $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ был вычислен в [1]:

$$P_{\mathcal{O}} = \prod_i (1 - t^{\underline{m}^i})^{-\chi(\tilde{E}_i)}.$$

Согласно лемме 1 $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(k_1, \dots, k_s))$ можно интерпретировать как пространство функций f на $\mathbb{C}^2$ таких, что $\pi^* f$ обращается в нуль на компоненте E_i исключительного дивизора с кратностью, не меньшей k_i . Рассмотрим фильтрацию в пространстве 1-форм на $\mathbb{C}^2$ такую, что подпространство с номером $\underline{k}$ состоит из тех форм w , для которых $\pi^* w$ обращается в нуль на E_i с кратностью, не меньшей k_i . В силу леммы 1 ряд Пуанкаре $P(t)$ этой фильтрации совпадает с рядом Пуанкаре описанной выше фильтрации для пучка $\mathcal{G} = \Omega_{\mathcal{X}}^1$.

Рассмотрим случай, когда π — единственный сигма-процесс.

Пусть $\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$ — 1-форма, k — наименьший из порядков в нуле функций f и g . Разложим ω в сумму $\omega = \omega_k + \omega_{k+1} + \dots$, где

$$\omega_m = f_m dx + g_m dy,$$

f_m и g_m — однородные компоненты f и g степени m . Пусть θ — координата в карте $\{x \neq 0\}$ исключительного дивизора. Тогда $y = \theta \cdot x$ и

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= (f_k(x, y) + \theta \cdot g_k(x, y) + f_{k+1}(x, y) + \theta g_{k+1}(x, y)) dx + x g_k(x, y) dy + \dots \\ &= x^k (f_k(1, \theta) + \theta \cdot g_k(1, \theta)) dx \\ &\quad + x^{k+1} (f_{k+1}(1, \theta) + \theta g_{k+1}(1, \theta)) dx + g_k(1, \theta) dy + \dots \end{aligned}$$

Поэтому $\pi^* \omega$ имеет на $\mathcal{D}$ порядок, больший k , тогда и только тогда, когда $f_k(x, y) + \theta \cdot g_k(x, y) = 0$, т.е. $xf_k + yg_k = 0$, и $xf_k = -yg_k$. Поэтому

$$f_k = -y\varphi, \quad g_k = x\varphi$$

для некоторого однородного многочлена $\varphi(x, y)$ степени $k - 1$, т.е. $\omega_k = \varphi(x dy - y dx)$. Тогда

$$\pi^* \omega = x^{k+1} (f_{k+1}(1, \theta) + \theta g_{k+1}(1, \theta)) dx + g_k(1, \theta) dy + \dots,$$

и так как $g_k \neq 0$, то $\pi^* \omega$ имеет порядок $k + 1$ на $\mathcal{D}$.

Итак, фильтрация $F(v)$ состоит из форм вида

$$\varphi(x dy - y dx) + f dx + g dy,$$

где φ — однородный многочлен степени $v - 2$, а f и g имеют порядки, не меньшие v . Вычислим $P(t)$. Пусть $d_k = k + 1$ — размерность пространства D_k однородных многочленов от двух переменных степени k , R_k — пространство 1-форм вида $\varphi(x dy - y dx)$, где φ — однородный многочлен степени $k - 1$. Тогда $\dim R_k = d_{k-1}$,

$$F(k)/F(k+1) \cong [(D_k \oplus D_k)/R_{k-1}] \oplus R_{k-2},$$

поэтому $\dim(F(k)/F(k+1)) = 2d_k - d_{k-1} + d_{k-2}$,

$$P(t) = \frac{2 - t + t^2}{(1 - t)^2} = \frac{1 + t}{(1 - t)^2} + 1.$$

2. Геометрический ряд Пуанкаре. Пространство глобальных сечений и его размерность являются довольно тонкими инвариантами пучка. Положение, однако, упрощается, если следить за эйлеровой характеристикой. Положим

$$h(\underline{v}) = \chi(\mathcal{X}, \mathcal{G}(\underline{v})/\mathcal{G}(\underline{v} + \underline{1})).$$

Так как $\mathcal{G}(\underline{v})/\mathcal{G}(\underline{v} + \underline{1})$ сосредоточен на $\mathcal{D}$, то

$$h(\underline{v}) = \chi(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{v})/\mathcal{G}(\underline{v} + \underline{1})).$$

Рассмотрим ряд Лорана $\tilde{Q}(t_1, \dots, t_s) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^s} h(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}}$ и положим

$$\tilde{P}'(t_1, \dots, t_s) = \tilde{Q}(t_1, \dots, t_s) \cdot \prod_{i=1}^s (t_i - 1).$$

Аналогично сказанному выше $\tilde{P}'$ — степенной ряд, и определен ряд

$$\tilde{P}_{\mathcal{G}}(t_1, \dots, t_s) = \frac{\tilde{P}'(t_1, \dots, t_s)}{t_1 \cdots t_s - 1}.$$

Для $I \subset I_0 = \{1, 2, \dots, s\}$ через $|I|$ будем обозначать количество элементов в I , и пусть $\underline{1}_I$ — элемент $\mathbb{Z}^r$, в котором на местах из I стоят единицы, а на остальных — нули. Обозначим

$$k(\underline{v}) = - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \chi(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{v})/\mathcal{G}(\underline{v} + \underline{1}_I)).$$

ЛЕММА 2. *Имеет место равенство*

$$\tilde{P}_{\mathcal{G}}(\underline{t}) = \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s} k(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициент при мономе $\underline{t}^{\underline{v}}$ в ряде

$$\left(\sum k(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}} \right) (t_1 \cdots t_s - 1)$$

равен

$$\begin{aligned} & - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \chi(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{v} - \underline{1}) / \mathcal{G}(\underline{v} - \underline{1} + \underline{1}_I)) + \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \chi(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{v}) / \mathcal{G}(\underline{v} + \underline{1}_I)) \\ & = \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} (h(\underline{v} - \underline{1} + \underline{1}_I) + h(\underline{v})) = \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} h(\underline{v} - \underline{1} + \underline{1}_I). \end{aligned}$$

С другой стороны, коэффициент при мономе $\underline{t}^{\underline{v}}$ в ряде

$$\tilde{P}'(\underline{t}) = \left(\sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^s} h(\underline{v}) \cdot \underline{t}^{\underline{v}} \right) \cdot \prod_{i=1}^s (t_i - 1)$$

также равен $\sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} h(\underline{v} - \underline{1} + \underline{1}_I)$.

Обозначим $\mathcal{G}|_{E_i}$ через $\mathcal{G}_i$, r – ранг $\mathcal{G}$.

ЛЕММА 3. Пусть $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ – точная последовательность пучков на $\mathbb{P}^1$, $\mathcal{K}$ – локально-свободный пучок на $\mathbb{P}^1$. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{G} \rightarrow 0$$

тоже точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Биркгофа–Гротендика любой локально-свободный пучок на $\mathbb{P}^1$ изоморфен прямой сумме обратимых: $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^r \mathcal{K}_i$. Так как умножение точной тройки на обратимый пучок не меняет ее точности, то последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_i \otimes \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{K}_i \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{K}_i \otimes \mathcal{G} \rightarrow 0$$

точны. Следовательно, искомая последовательность точна как прямая сумма точных.

ЛЕММА 4. Пусть $D = \sum_i k_i p_i$ – эффективный дивизор на $\mathbb{P}^1$. Если

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

– точная последовательность локально-свободных пучков, то

$$\chi(\mathcal{E} - D) - \chi(\mathcal{F} - D) + \chi(\mathcal{G} - D) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F} - D) &= \chi(\mathcal{F}) - \deg(D) \cdot rk(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{E}) + \chi(\mathcal{G}) - \deg(D) \cdot (rk(\mathcal{E}) + rk(\mathcal{G})) \\ &= \chi(\mathcal{E} - D) + \chi(\mathcal{G} - D). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть $c_{(i)}$ – значение первого класса Чженя $\mathcal{G}_i$ на фундаментальном классе $[E_i]$. Тогда

$$\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k}) / \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{\{i\}})|_{E_i}) = r + c_{(i)} + r \cdot \underline{k} \cdot \underline{d}^i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_i – нормальный пучок к E_i в $\mathcal{X}$. Тогда имеет место точная последовательность $0 \rightarrow \mathcal{J}_i^2 \rightarrow \mathcal{J}_i \rightarrow \nu_i^* \rightarrow 0$ и, так как нормальное расслоение одномерно, то и

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_i^{k_i+1} \rightarrow \mathcal{J}_i^{k_i} \rightarrow \nu_i^{-k_i} \rightarrow 0,$$

а, так как $\mathcal{G}_i$ локально-свободен, то

$$0 \rightarrow \mathcal{G}_i \otimes \mathcal{J}_i^{k_i+1} \rightarrow \mathcal{G}_i \otimes \mathcal{J}_i^{k_i} \rightarrow \mathcal{G}_i \otimes \nu_i^{-k_i} \rightarrow 0.$$

Значит, по лемме 4

$$\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{\{i\}})) = \chi\left(E_i, \mathcal{G}_i \otimes \nu_i^{-k_i} \otimes \prod_{b \neq i} \mathcal{J}_b^{k_b}\right).$$

Пусть a – каноническая образующая в $H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$, тогда характер Чженя $\mathcal{G}_i$ равен $ch(\mathcal{G}_i) = r + c_{(i)}a$. Далее, $ch(\nu_i^*) = 1 + d_i^i a$, поэтому

$$ch(\mathcal{G}_i \otimes \nu_i^{-k_i}) = (r + c_{(i)}a)(1 + d_i^i a)^{k_i} = r + (c_{(i)} + rd_i^i k_i)a,$$

следовательно, $\chi(\mathcal{G}_i \otimes \nu_i^{-k_i}) = r + c_{(i)} + rd_i^i k_i$.

Таким образом,

$$\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{\{i\}})) = r + c_{(i)} + rd_i^i k_i - \sum_{E_j \cap E_i \neq \emptyset} rk_j = r + c_{(i)} + r \sum_j d_i^j k_j.$$

Пусть пространство D представлено в виде объединения замкнутых по Зарисскому подмножеств E_1 и E_2 , пересекающихся в единственной точке p . Пусть i_1, i_2 – вложения p в E_1 и E_2 , а j_1, j_2 – вложения E_1 и E_2 в D . Тогда для любого пучка $\mathcal{F}$ на D имеет место короткая точная последовательность пучков на D :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{E_1} \oplus \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{E_2} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

с отображениями (i_{1*}, i_{2*}) и $j_{1*} - j_{2*}$. Она определяет длинную точную последовательность Майера–Вьеториса их когомологий:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^i(D, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_p) &\rightarrow H^i(D, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{E_1}) \oplus H^i(D, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{E_2}) \rightarrow H^i(D, \mathcal{F}) \\ &\rightarrow H^{i+1}(D, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_p) \rightarrow \cdots, \end{aligned}$$

которую можно переписать в виде

$$\cdots \rightarrow H^i(p, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(E_1, \mathcal{F}) \oplus H^i(E_2, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(D, \mathcal{F}) \rightarrow H^{i+1}(p, \mathcal{F}) \rightarrow \cdots.$$

Аналогичную последовательность можно записать и для исключительного дивизора $\mathcal{D}$, добавляя прямые по одной и записывая на каждом шаге последовательность Майера–Вьеториса (так как двойственный граф разрешения – дерево, то можно на каждом шаге добавлять прямую, пересекающую объединение уже рассмотренных дивизоров ровно в одной точке).

Итоговую последовательность можно представить следующим образом. Раскрасим вершины двойственного графа разрешения в черный и белый цвета так, чтобы соседние вершины были разных цветов (это возможно, так как граф – дерево). Положим $\kappa_i = 1$,

если соответствующая E_i вершина белая, и $\kappa_i = -1$, если она черная. Пусть $p_1, \dots, p_l$ — точки пересечения исключительных прямых. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\alpha} \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{p_{\alpha}} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{E_i} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

в которой первое отображение задается включением точек в соответствующие прямые, а второе — формулой $\kappa_1 j_{1*} + \dots + \kappa_s j_{s*}$, где j_i — вложение E_i в $\mathcal{D}$. Соответствующая длинная точная последовательность и будет итоговой последовательностью Майера–Вьеториса.

Для $I \subset I_0$ через $\mu(I)$ будем обозначать число точек пересечения попарно различных прямых с номерами из множества I .

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)$. Тогда

$$\chi(\mathcal{D}, \mathcal{H}) = r\mu(I) + \sum_{i \in I} (r + c_{(i)} + r(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \in I$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) &= \chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})) + \chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) \\ &= -r \sum_{b \in I \setminus \{i\}} d_b^i + r + c_{(i)} + r(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{H}$ сосредоточен на $\bigcup_{i \in I} E_i$, то из точной последовательности Майера–Вьеториса следует, что

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{D}, \mathcal{H}) &= \sum_{i \in I} \left(r + c_{(i)} + r(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i - r \sum_{b \in I \setminus \{i\}} d_b^i \right) - r\mu(I) \\ &= \sum_{i \in I} (r + c_{(i)} + r(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i) + 2r\mu(I) - r\mu(I). \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 6, можно вычислить ряд $\tilde{P}_{\mathcal{G}}(\underline{t})$ для пучка $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Пусть $m_i^I = -\underline{1}_{I \setminus \{i\}}\underline{d}^i$ — число точек пересечения E_i с другими компонентами $\mathcal{D}$ с номерами из I .

ЛЕММА 7. Если $s > 2$, то

$$\tilde{P}_{\mathcal{O}}(\underline{t}) \equiv 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 2 и 6 коэффициент в $\tilde{P}_{\mathcal{O}}(\underline{t})$ с индексом $\underline{k}$ равен

$$\begin{aligned} & - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \chi(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) \\ &= - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i \in I} (1 + (\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i) \right). \end{aligned}$$

Положим $v_i = 1 + \underline{k}\underline{d}^i$. Тогда выражение для коэффициента переписывается в виде

$$- \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i \in I} (v_i - m_i^I) \right).$$

Так как в сумме $\sum_{i \in I} m_i^I$ каждая из точек пересечения учитывается по два раза, то $\sum_{i \in I} m_i^I = 2\mu(I)$. Следовательно, выражение примет вид

$$\begin{aligned} & - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \sum_{i \in I} \left(v_i - \frac{m_i^I}{2} \right) = - \sum_i \left(v_i \sum_{I \ni i} (-1)^{|I|} + \sum_{I \ni i} (-1)^{|I|} \frac{m_i^I}{2} \right) \\ & = 0 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{I: i \in I, \forall j \in I (d_i^j < 0)} (-1)^{|I|} m_i^I \sum_{J: \forall j \in J (d_i^j = 0)} (-1)^{|J|}. \end{aligned}$$

Если не все дивизоры пересекают E_i , то

$$\sum_{J: \forall j \in J (d_i^j = 0)} (-1)^{|J|} = 0.$$

В противном случае E_i пересекает $s - 1$ дивизор, и слагаемое номер i равно

$$-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{s-1} (-1)^m m \binom{m}{s-1},$$

что равно нулю при $s - 1 > 1$.

Этот несколько парадоксальный результат показывает, что $P_{\mathcal{G}}$ ни в каком смысле нельзя считать обобщением понятия ряда Пуанкаре.

Пусть $\psi(x)$ — функция, равная x при $x \geq 0$ и нулю иначе.

ЛЕММА 8. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. Тогда

$$\dim H^0(\mathcal{D}, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) = \mu(I) + \sum_{i \in I} \psi(\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим

$$\dim H^0(E_i, \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)).$$

Пусть f — функция на $\mathcal{X}$, представляющая сечение соответствующего пучка на E_i . Так как $\mathcal{G}_i^{k_i}/\mathcal{G}_i^{k_i+1} \simeq \nu_i^{-k_i}$, то класс f задает корректно определенное сечение $\nu_i^{-k_i} \simeq \mathcal{O}(k_i d_i^i)$. Пространство сечений этого расслоения, имеющих в точках пересечения с дивизорами E_j , $j \neq i$, нуль порядка, не меньшего, чем $(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})_j$, канонически изоморфно

$$H^0\left(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}\left(k_i d_i^i + \sum_{j \neq i} k_j d_i^j + \sum_{b \in I \setminus \{i\}} d_i^b\right)\right)$$

и имеет размерность $\psi((\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i + 1)$. Далее,

$$\dim H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})) = -\underline{1}_{I \setminus \{i\}} \underline{d}^i,$$

и $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) = 0$, поэтому из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I) \rightarrow \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I) \rightarrow \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}}) \rightarrow 0$$

получаем

$$\dim H^0(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) = \psi(\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I))) - \underline{1}_{I \setminus \{i\}} \underline{d}^i.$$

Так как $\mathcal{G}(\underline{k})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)$ сосредоточен на объединении прямых с номерами из I , то достаточно рассматривать его глобальные сечения над этим объединением. Каждому такому глобальному сечению соответствует набор сечений над E_i , которые с точностью до умножения на число определяются набором своих нулей с кратностями.

Обратно, имея на каждом E_i набор точек с кратностями, проведем через каждую из них росток аналитической кривой, пересекающей E_i с соответствующей кратностью. После проектирования на $\mathbb{C}^2$ получим росток некоторой приводимой кривой. Зададим ее уравнением $\{g = 0\}$ и рассмотрим π^*g (g определена однозначно с точностью до умножения на функцию, не обращающуюся в нуль в начале координат). Так как на каждом E_i соответствующее π^*g сечение имеет столько же нулей, сколько и исходное, то π^*g соответствуют сечения тех же степеней конормальных расслоений.

Следовательно, последовательность Майера–Вьеториса будет точна и на уровне глобальных сечений, откуда следует утверждение леммы.

Аналогично лемме 2 можно показать, что коэффициент с номером $\underline{k}$ в P_L равен

$$- \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \dim(L(\underline{k})/L(\underline{k} + \underline{1}_I)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Геометрическим рядом Пуанкаре фильтрации в пучке $\mathcal{G}$ будем называть

$$P_{\mathcal{G}}^g(\underline{t}) = - \sum_{\underline{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} \underline{t}^{\underline{k}} \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(r\mu(I) + \sum_{i \in I} \psi(\chi(E_i, \mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})/\mathcal{G}(\underline{k} + \underline{1}_I)) \right).$$

Леммы 7 и 8 означают, что геометрический ряд Пуанкаре для $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ совпадает с рядом P_{H^0} , вычисленным в [1]. Это позволяет и для произвольного пучка считать геометрический ряд Пуанкаре возможным обобщением ряда Пуанкаре для пространства глобальных сечений.

ЛЕММА 9. Пусть a_i – неотрицательные целые числа. Тогда

$$- \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (a_i + 1 - m_i^I) \right) = \chi \left(\prod_i S^{a_i} \tilde{E}_i \right),$$

где $S^a E = E^a / S_a$ – a -я симметрическая степень многообразия E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\underline{a}, \mathcal{D}) = \chi(\prod_i S^{a_i} \tilde{E}_i)$. Докажем утверждение леммы индукцией по числу дивизоров. Если дивизор один, то

$$a_1 + 1 = (-1)^{a_1} \binom{-2}{a_1} = \chi(S^{a_1} E_1).$$

Если дивизоров два, утверждение леммы легко проверить явно:

$$(a_1 + 1) + (a_2 + 1) - ((a_1 + 1 - 1) + (a_2 + 1 - 1) + 1) = 1$$

(при условии $a_1 > 0, a_2 > 0$; остальные случаи аналогичны). Докажем переход индукции. Так как двойственный граф разрешения – дерево, то у него есть висячая вершина, т.е. найдется дивизор E_j , который пересекает единственный дивизор E_l . Пусть $a_l \neq 0$. Тогда $\chi(\tilde{E}_j) = 1$, поэтому $\chi(S^{a_j} \tilde{E}_j) = 1$; кроме того, если $\hat{E}_l = \tilde{E}_l \cup (E_j \cap E_l)$, то

$$S^{a_l} \hat{E}_l = S^{a_l} \tilde{E}_l \sqcup (E_j \cap E_l) \times S^{a_l-1} \hat{E}_l$$

и $\chi(S^{a_l} \hat{E}_l) = \chi(S^{a_l} \tilde{E}_l) - \chi(S^{a_l-1} \hat{E}_l)$. Положим

$$\hat{\mathcal{D}} = \bigcup_{i \neq j} E_i, \quad \hat{m}_i^I = m_i^{I \setminus \{j\}}.$$

Тогда

$$\prod_i \chi(S^{a_i} \tilde{E}_i) = \prod_{i \neq j} \chi(S^{a_i} \tilde{E}_i) = f(\underline{a}, \hat{\mathcal{D}}) - f(\underline{a} - \underline{1}_{\{l\}}, \hat{\mathcal{D}}).$$

С другой стороны, для $A, B, C \subset I_0$ обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A,B,C} &= \{(i, I) : i \in I \subset I_0, A \cap I = \emptyset, B \subset I, i \notin C, a_i + 1 - m_i^I > 0\}, \\ \hat{\mathcal{M}}_{A,B,C} &= \{(i, I) : i \in I \subset I_0, A \cap I = \emptyset, B \subset I, i \notin C, a_i + 1 - \hat{m}_i^I > 0\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (a_i + 1 - m_i^I) \right) \\ &= \sum_I (-1)^{|I|} \mu(I) + \sum_{(i, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \emptyset, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - m_i^I) \\ &= \sum_{I: (j, I) \in \mathcal{M}_{\{l\}, \emptyset, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_j + 1 - m_j^I) + \sum_{I: (j, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{l\}, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_j + 1 - m_j^I) \\ & \quad + \sum_{I: (l, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j\}, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_l + 1 - m_l^I) + \sum_{(i, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - m_i^I) \\ & \quad + \sum_{I: j \in I, k \in I} (-1)^{|I|} \mu(I) + \sum_{I: j \in I, k \notin I} (-1)^{|I|} \mu(I) - f(\underline{a}, \hat{\mathcal{D}}) \\ &= \sum_{I: j \in I, l \notin I} (-1)^{|I|} (a_j + 1) + \sum_{I: j \in I, l \in I, a_j > 0} (-1)^{|I|} a_j \\ & \quad + \sum_{I: (l, i) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j\}, \emptyset}} (-1)^{|I|} ((a_l - 1) + 1 + \hat{m}_l^I) \\ & \quad + \sum_{(i, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - \hat{m}_i^I) - \sum_{\hat{I}: j \notin \hat{I}, l \in \hat{I}} (-1)^{|\hat{I}|} (\mu(\hat{I}) + 1) \\ & \quad - \sum_{\hat{I}: j \notin \hat{I}, l \notin \hat{I}} (-1)^{|\hat{I}|} \mu(\hat{I}) - f(\underline{a}, \hat{\mathcal{D}}) \\ &= 0 + 0 + f(\underline{a} - \underline{1}_{\{l\}}, \hat{\mathcal{D}}) - f(\underline{a}, \hat{\mathcal{D}}) = -f(\underline{a}, \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Если $a_l = 0$, то $f(\underline{a}, \mathcal{D}) = f(\underline{a}, \widehat{\mathcal{D}})$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 & \sum_I (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - m_i^I) \right) \\
 &= \sum_{I: (j, I) \in \mathcal{M}_{\{1\}, \emptyset, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_j + 1 - m_j^I) + \sum_{I: (j, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{1\}, \emptyset}} (-1)^{|I|} (a_j + 1 - m_j^I) \\
 &+ \sum_{(i, I) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - m_i^I) + \sum_{I: j \in I, l \in I} (-1)^{|I|} \mu(I) \\
 &+ \sum_{I: j \in I, l \notin I} (-1)^{|I|} \mu(I) - f(\underline{a}, \widehat{\mathcal{D}}) \\
 &= \sum_{I: j \in I, l \notin I} (-1)^{|I|} (a_j + 1) + \sum_{I: j \notin I, k \in I, a_j > 0} (-1)^{|I|} a_j \\
 &+ \sum_{(i, I) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\emptyset, \{j, l\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - \widehat{m}_i^I) + \sum_{(i, I) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\{1\}, \{j\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - \widehat{m}_i^I) \\
 &- \sum_{\hat{I}: j \notin \hat{I}, l \in \hat{I}} (-1)^{|\hat{I}|} \mu(\hat{I}) - \sum_{\hat{I}: j \notin \hat{I}, l \notin \hat{I}} (-1)^{|\hat{I}|} \mu(\hat{I}) - f(\underline{a}, \widehat{\mathcal{D}}) \\
 &= 0 + 0 + \sum_{(i, I \cup \{l\}) \in \mathcal{M}_{\{j\}, \{1\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - \widehat{m}_i^I + d_i^l) \\
 &- \sum_{(i, I) \in \mathcal{M}_{\{j\}, \emptyset, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (a_i + 1 - \widehat{m}_i^I) \\
 &+ \sum_{(i, I \cup \{l\}) \in \mathcal{M}_{\emptyset, \{j, l\}, \{j, l\}}} (-1)^{|I|} (-d_i^l) - f(\underline{a}, \widehat{\mathcal{D}}) \\
 &= -f(\underline{a}, \mathcal{D}).
 \end{aligned}$$

Пусть $\zeta_i = 1$, если любой дивизор пересекает E_i , и $\zeta_i = 0$ в противном случае.

ЛЕММА 10. Пусть a_i — неотрицательные целые числа, u_i — произвольные числа. Тогда

$$- \sum_{i: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (-1)^{|I|} u_i = \sum_i \zeta_i u_i (-1)^{a_i} \binom{1 - \chi(\widetilde{E}_i)}{a_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (-1)^{|I|} u_i = - \sum_i u_i \sum_{I: i \in I, a_i + 1 - m_i^I > 0} (-1)^{|I|} \\
 &= \sum_i u_i \sum_{I: i \in I, \forall j \in I (d_i^j < 0), a_i + 1 - |I| > 0} (-1)^{|I|} \sum_{J: \forall j \in J (d_i^j = 0)} (-1)^{|J|}.
 \end{aligned}$$

Слагаемое с номером i равно 0, если найдется хотя бы один дивизор, не пересекающий E_i , и равно

$$u_i \sum_{s=0}^{a_i} (-1)^s \binom{2 - \chi(\widetilde{E}_i)}{s} = u_i (-1)^{a_i} \binom{1 - \chi(\widetilde{E}_i)}{a_i},$$

если все прямые пересекают E_i .

ТЕОРЕМА 1. *Геометрический ряд Пуанкаре фильтрации в пучке $\mathcal{G}$ равен регулярной части ряда Лорана*

$$r \prod_i t_i^{-\lceil c(i)/r \rceil} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{-\chi(\tilde{E}_i)} - r \prod_i t_i^{-\lceil c(i)/r \rceil} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{-1} \sum_i \zeta_i \left\{ -\frac{c(i)}{r} \right\} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{2-\chi(\tilde{E}_i)},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x , а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что коэффициент с номером $\underline{k}$ в геометрическом ряде Пуанкаре пучка $\mathcal{G}$ равен

$$- \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(r\mu(I) + \sum_{i \in I} \psi((r + c(i) + r(\underline{k} + \underline{1}_{I \setminus \{i\}})\underline{d}^i)) \right).$$

Положим $v_i = r + c(i) + r \cdot \underline{k} \cdot \underline{d}^i$. Ясно, что если хотя бы одно слагаемое отлично от нуля, то $v_i > 0$. Тогда коэффициент равен

$$\begin{aligned} & - \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(r\mu(I) + \sum_{i \in I, v_i - rm_i^I > 0} (v_i - rm_i^I) \right) \\ & = -r \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i \in I, v_i/r - m_i^I > 0} \left(\left\lceil \frac{v_i}{r} \right\rceil - \left\{ -\frac{v_i}{r} \right\} - m_i^I \right) \right) \\ & = -r \sum_{I \subset I_0} (-1)^{|I|} \left(\mu(I) + \sum_{i \in I, \lceil v_i/r \rceil - m_i^I > 0} \left(\left\lceil \frac{v_i}{r} \right\rceil - m_i^I \right) \right) \\ & \quad + r \sum_{i, I: i \in I, \lceil v_i/r \rceil - m_i^I > 0} (-1)^{|I|} \left\{ -\frac{v_i}{r} \right\} \\ & = r\chi \left(\prod_i S^{\lceil v_i/r \rceil - 1} \tilde{E}_i \right) - \sum_i \zeta_i \left\{ -\frac{v_i}{r} \right\} (-1)^{\lceil v_i/r \rceil - 1} \binom{1 - \chi(\tilde{E}_i)}{\lceil v_i/r \rceil - 1}. \end{aligned}$$

Далее, $\lceil v_i/r \rceil = 1 + \lceil c(i)/r \rceil + \underline{k}\underline{d}_i > 0$, т.е. $w_i = \lceil c(i)/r \rceil + \underline{k}\underline{d}_i$ могут принимать произвольные неотрицательные целые значения, и

$$\underline{k} = \left(\underline{w} - \left\lceil \frac{\underline{c}}{r} \right\rceil \right) M.$$

Следовательно, ряд Пуанкаре равен

$$\begin{aligned} & \sum_{\underline{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^s} \left(r\chi \left(\prod_i S^{w_i} \tilde{E}_i \right) - r \sum_i \zeta_i \left\{ -\frac{c(i)}{r} \right\} (-1)^{w_i} \binom{1 - \chi(\tilde{E}_i)}{w_i} \right) \underline{t}^{(\underline{w} - \lceil \underline{c}/r \rceil)M} \\ & = r \prod_i t_i^{-\lceil c(i)/r \rceil} \prod_i (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{-\chi(\tilde{E}_i)} \\ & \quad - r \sum_i \zeta_i \left\{ -\frac{c(i)}{r} \right\} \prod_j t_j^{-\lceil c(j)/r \rceil} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_j})^{1-\chi(\tilde{E}_i)} \prod_{j \neq i} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_j})^{-1}. \end{aligned}$$

Вообще говоря, в этот ряд входят и слагаемые с отрицательными показателями $\underline{k}$, но в конечном количестве. Отбросив их, получим искомое выражение.

ТЕОРЕМА 2. *Геометрический ряд Пуанкаре пучка 1-форм равен регулярной части ряда*

$$2 \prod_i t_i^{-\lceil (d_i^i - 2)/2 \rceil} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{-\chi(\tilde{E}_i)} - 2 \prod_i t_i^{-\lceil (d_i^i - 2)/2 \rceil} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{-1} \sum_i \zeta_i \left\{ -\frac{d_i^i - 2}{2} \right\} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_i})^{2 - \chi(\tilde{E}_i)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае $\mathcal{G} = \Omega_{\mathcal{X}}^1$. Тогда $\mathcal{G}_i = T^* \mathcal{X}|_{E_i}$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow TE_i \rightarrow T\mathcal{X}|_{E_i} \rightarrow \nu_i \rightarrow 0.$$

Двойственная к ней:

$$0 \rightarrow \nu_i^* \rightarrow T^* \mathcal{X}|_{E_i} \rightarrow T^* E_i \rightarrow 0.$$

Следовательно, $c_{(i)} = \langle 1(T^* \mathcal{X}|_{E_i}), [E_i] \rangle = d_i^i - 2$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 1.

Если дивизор один, то ряд равен $(1 + t)/(1 - t)^2$. Он отличается от ряда Пуанкаре в пространстве глобальных сечений на 1.

Если дивизора два, то ряд равен $(1 + t_1 t_2^2)/((1 - t_1 t_2)(1 - t_1 t_2^2))$.

Автор благодарен С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Delgado F., Gusein-Zade S. M. Poincaré series for several plane divisorial valuations // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2003. V. 46. P. 501–509.
- [2] Campillo A., Delgado F., Kiyek K. Gorenstein property and symmetry for one-dimensional local Cohen-Macaulay rings // Manuscripta Math. 1994. V. 83. № 3–4. P. 405–423.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gorsky@mccme.ru

Поступило
14.02.2005
Исправленный вариант
07.10.2005