Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Панов, Расширения Оре алгебр Хопфа, *Матем. заметки*, 2003, том 74, выпуск 3, 425–434

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:17:00

УДК 512.5

РАСШИРЕНИЯ ОРЕ АЛГЕБР ХОПФА

А. Н. Панов

В работе изучаются расширения Оре в классе алгебр Хопфа. Классификационная теорема позволяет описать расширения Хопфа–Оре для групповых алгебр, $U(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{g})$, квантовой “ $ax + b$ ”.

Библиография: 8 названий.

Расширение Оре – это хорошо известная конструкция расширения колец, применимая к некоммутативным кольцам. В результате получается кольцо, которое часто называют кольцом косых многочленов над заданным кольцом. Во многих работах исследовались идеалы в этих расширениях, представления, структура центра и другие вопросы. В последних работах [1]–[5] с помощью итеративных расширений Оре были построены новые примеры алгебр Хопфа (часто конечной размерности). Цель этой работы изучить расширения Оре алгебр Хопфа в общей постановке.

1. Основная теорема. В этом разделе мы докажем критерий для расширения Оре алгебры Хопфа, которая является алгеброй Хопфа с коумножением (1.3). В следующем разделе мы используем этот критерий для классификации расширений Хопфа–Оре.

Пусть k – коммутативное кольцо с 1 и A – k -алгебра. Рассмотрим эндоморфизм τ алгебры A над k и τ -дифференцирование δ алгебры A . То есть $\delta(k) = 0$ и

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta(b). \quad (1.1)$$

Расширение Оре $R = A[y; \tau, \delta]$ k -алгебры A есть k -алгебра R , порожденная переменной y и A с соотношением

$$ya = \tau(a)y + \delta(a) \quad (1.2)$$

для всех $a \in A$. Каждый элемент в $R = A[y; \tau, \delta]$ единственным образом представляется в виде $\sum c_i y^i$ [6, 2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.0. Пусть A и $R = A[y; \tau, \delta]$ – алгебры Хопфа над k . Назовем $R = A[y; \tau, \delta]$ *расширением Хопфа–Оре*, если $\Delta(y) = y \otimes r_1 + r_2 \otimes y$ для некоторых $r_1, r_2 \in A$ и A – подалгебра Хопфа в R .

В дальнейшем будем использовать общее обозначение для коумножения Δ , коединицы ε и антипода S для алгебр A и R . Будем использовать обозначения Свидлера

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-00017.

$\Delta y = a_1 \otimes a_2$ (подразумевается суммирование) для коумножения. Свойство коассоциативности коумножения будет записываться как $a_{11} \otimes a_{12} \otimes a_2 = a_1 \otimes a_{21} \otimes a_{22}$. Элемент, определенный последним равенством, будем обозначать $a_1 \otimes a_2 \otimes a_3$.

Заметим, что элементы r_1, r_2 в определении 1.1 групповые. Действительно, сравнивая $(1 \otimes \Delta)\Delta y = y \otimes \Delta(r_1) + r_2 \otimes y \otimes r_1 + r_2 \otimes r_2 \otimes y$ и $(\Delta \otimes 1)\Delta y = y \otimes r_1 \otimes r_1 + r_2 \otimes y \otimes r_1 + \Delta(r_2) \otimes y$, получаем $\Delta r_i = r_i \otimes r_i$.

Заменим образующий элемент y на $y' = yr_1^{-1}$ и получим $\Delta(y') = y' \otimes 1 + r \otimes y'$. Сохраняя предыдущие обозначения, мы предположим в дальнейшем, что y в расширении Хопфа–Оре удовлетворяет

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y \quad (1.3)$$

с некоторым групповым элементом $r \in A$. Как обычно, $\text{Ad}_r(a) = raS(r) = rar^{-1}$.

ЛЕММА 1.1. Если $R = A[y; \tau, \delta]$ – расширение Хопфа–Оре, то

$$\varepsilon(y) = 0, \quad (1.4)$$

$$S(y) = -r^{-1}y, \quad (1.5)$$

где $r^{-1} = S(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Используя основное свойство коединицы $a = a_1\varepsilon(a_2)$, получаем $y = \varepsilon(y) + \varepsilon(r)y = \varepsilon(y) + y$. Это влечет (1.4).

2) С помощью основного свойства антипода, $\varepsilon(a) = a_1S(a_2)$, получаем $0 = \varepsilon(y) = y + rS(y)$ и (1.5).

ЛЕММА 1.2. Если $\Delta(b) = b \otimes 1$, то $b \in k \subset A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя основное свойство коединицы $a = a_1\varepsilon(a_2) = \varepsilon(a_1)a_2$, имеем $b = \varepsilon(b) \in k$.

ТЕОРЕМА 1.3. $R = A[y; \tau, \delta]$ есть расширение Хопфа–Оре тогда и только тогда, когда

1) существует характер $\chi: A \mapsto k$ такой, что

$$\tau(a) = \chi(a_1)a_2; \quad (1.6)$$

для всех $a \in A$ (то есть τ винтовой автоморфизм A);

2) имеет место соотношение

$$\chi(a_1)a_2 = \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2); \quad (1.7)$$

3) τ -дифференцирование δ удовлетворяет

$$\Delta\delta(a) = \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2). \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разбивается на три шага. В шаге 1 мы показываем, что коумножение Δ продолжается с A на $R = A[y; \tau, \delta]$ через (1.3) тогда и только тогда, когда имеют место (1.6)–(1.8). В шаге 2 мы доказываем, что R (с указанным выше коумножением) допускает продолжение коединицы с A через (1.4). В шаге 3 мы показываем, что R (с указанным выше коумножением и коединицей) имеет антипод S , продолжающий антипод $S|_A$ через (1.5).

Шаг 1. Коумножение. Предположим, что коумножение $\Delta|_A$ может быть продолжено на $R = A[y; \tau, \delta]$ через (1.3). Тогда гомоморфизм Δ сохраняет (1.2). То есть $\Delta y \Delta a = \Delta \tau(a) \Delta y + \Delta \delta(a)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta y \Delta a &= (y \otimes 1 + r \otimes y) a_1 \otimes a_2 = (\tau(a_1) y + \delta(a_1)) \otimes a_2 + r a_1 \otimes (\tau(a_2) y + \delta(a_2)) \\ &= (\tau(a_1) \otimes a_2) (y \otimes 1) + (r a_1 r^{-1} \otimes \tau(a_2)) (r \otimes y) + \delta(a_1) \otimes a_2 + r a_1 \otimes \delta(a_2), \\ \Delta \tau(a) \Delta y + \Delta \delta(a) &= \Delta \tau(a) (y \otimes 1 + r \otimes y) + \Delta \delta(a) \\ &= \Delta \tau(a) y \otimes 1 + \Delta \tau(a) r \otimes y + \Delta \delta(a). \end{aligned}$$

Видно, что Δ сохраняет (1.2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\Delta \tau(a) = \tau(a_1) \otimes a_2, \quad (1.9)$$

$$\Delta \tau(a) = \text{Ad}_r(a_1) \otimes \tau(a_2), \quad (1.10)$$

$$\Delta \delta(a) = \delta(a_1) \otimes a_2 + r a_1 \otimes \delta(a_2)$$

для всех $a \in A$ и $\Delta a = a_1 \otimes a_2$. Последнее условие совпадает с (1.8).

Докажем, что из (1.9) и (1.10) вытекают (1.6)–(1.7). Рассмотрим элемент $\chi(a) := \tau(a_1) S(a_2) \in A$. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \Delta \chi(a) &= \Delta \tau(a_1) \Delta S(a_2) = (\tau(a_{11}) \otimes a_{12}) (S(a_{22}) \otimes S(a_{21})) \\ &= \tau(a_{11}) S(a_{22}) \otimes a_{12} S(a_{21}) = \tau(a_1) S(a_4) \otimes (a_2 S(a_3)) \\ &= \tau(a_1) S(a_3) \otimes \varepsilon(a_2) = \tau(a_1 \varepsilon(a_2)) S(a_3) \otimes 1 = \tau(a_1) S(a_2) \otimes 1 = \chi(a) \otimes 1. \end{aligned}$$

Из леммы 1.2 имеем $\chi(a) \in k$. Можно рассматривать χ как отображение $\chi: A \rightarrow k$. Так как τ эндоморфизм, а χ характер, то

$$\begin{aligned} \chi(ab) &= \tau(a_1 b_1) S(a_2 b_2) = \tau(a_1) \tau(b_1) S(b_2) S(a_2) = \tau(a_1) \chi(b) S(a_2) = \chi(a) \chi(b), \\ \chi(a + b) &= \tau((a + b)_1) S((a + b)_2) = \tau(a_1) S(a_2) + \tau(b_1) S(b_2) = \chi(a) + \chi(b). \end{aligned}$$

Через χ можно восстановить τ :

$$\chi(a_1) a_2 = \tau(a_1) S(a_2) a_3 = \tau(a_1) \varepsilon(a_2) = \tau(a_1 \varepsilon(a_2)) = \tau(a).$$

Это доказывает (1.6). Подставляем $\tau(a)$ в (1.10) и получаем

$$\begin{aligned} \Delta(\chi(a_1) a_2) &= \text{Ad}_r(a_1) \otimes \chi(a_2) a_3, \quad \chi(a_1) \Delta(a_2) = \text{Ad}_r(a_1) \chi(a_2) \otimes a_3, \\ (\chi(a_1) a_2) \otimes a_3 &= \text{Ad}_r(a_1) \chi(a_2) \otimes a_3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(\chi(a_1)a_2)a_3S(a_4) &= \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2)a_3S(a_4), & (\chi(a_1)a_2)\varepsilon(a_3) &= \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2)\varepsilon(a_3), \\ \chi(a_1)(a_2) &= \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2).\end{aligned}$$

Это доказывает (1.7). Мы доказали, что (1.6)–(1.8) являются необходимыми условиями для продолжения коумножения.

С другой стороны, если (1.6)–(1.8) имеют место, то $\Delta\tau(a) = \chi(a_1)a_2 \otimes a_3 = \tau(a_1) \otimes a_2$ и $\Delta\tau(a) = \Delta(\text{Ad}_r a_1\chi(a_2)) = \text{Ad}_{\Delta r}(a_1 \otimes a_2)\chi(a_3) = \text{Ad}_r a_1 \otimes \text{Ad}_r a_2\chi(a_3) = \text{Ad}_r a_1 \otimes \tau(a_2)$. Это доказывает, что верны (1.9) и (1.10) и коумножение $\Delta|_A$ продолжается до гомоморфизма $\Delta: R \rightarrow R \otimes R$. Так как $(1 \otimes \Delta)\Delta(a) = (\Delta \otimes 1)\Delta(a)$ для любого $a \in A$ и $(1 \otimes \Delta)\Delta(y) = (\Delta \otimes 1)\Delta(y)$, то $(1 \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes 1)\Delta$. Отображение $\Delta: R \rightarrow R \otimes R$ является коумножением.

Шаг 2. Коединица. Пусть R допускает коумножение (т.е. верны (1.6)–(1.8)). Докажем существование коединицы, продолжающей $\varepsilon|_A$ и удовлетворяющей (1.4). Можно продолжить ε как гомоморфизм R , если ε сохраняет (1.2). То есть $\varepsilon(y)\varepsilon(a) = \varepsilon(\tau(a))\varepsilon(y) + \varepsilon(\delta(a))$. Так как $\varepsilon(y) = 0$, то ε допускает продолжение на R тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon(\delta(a)) = 0. \quad (1.11)$$

Наша цель доказать (1.11). Действуя $m(1 \otimes \varepsilon)$ на (1.8), получаем

$$\begin{aligned}m(\text{id} \otimes \varepsilon)(\Delta\delta(a)) &= m(\text{id} \otimes \varepsilon)(\delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)), \\ \delta(a) &= \delta(a_1)\varepsilon(a_2) + ra_1\varepsilon(\delta(a_2)) = \delta(a) + ra_1\varepsilon(\delta(a_2)).\end{aligned}$$

Получаем $a_1\varepsilon(\delta(a_2)) = 0$. Окончательно,

$$0 = S(a_1)a_2\varepsilon(\delta(a_3)) = \varepsilon(a_1)\varepsilon(\delta(a_2)) = \varepsilon\delta(\varepsilon(a_1)a_2) = \varepsilon(\delta(a)).$$

Это доказывает (1.11) и существование продолжения $\varepsilon: R \rightarrow k$ через (1.4). Используя разложение $b = \sum c_i y^i$ произвольного элемента $b \in R$, легко доказывается, что $\varepsilon: R \rightarrow k$ – коединица биалгебры R .

Шаг 3. Антипод. Пусть R как и в шаге 2. Напомним, что S является антиавтоморфизмом алгебры Хопфа и $\Delta S(a) = S(a_2) \otimes S(a_1)$ [8, 1.5.10]. Если R допускает антипод S , который продолжается (как антиавтоморфизм) с A на R через (1.5), то S сохраняет (1.2). То есть

$$S(a)S(y) = S(y)S\tau(a) + S\delta(a). \quad (1.12)$$

С другой стороны, если (1.12) верно, то S продолжается как антиавтоморфизм с A на R через (1.5). Используя разложение $b = \sum c_i y^i$ произвольного элемента $b \in R$, легко видно, что определенный $S: R \rightarrow R$ является антиподом R .

Следовательно, существование антипода R с (1.5) равносильно (1.12). Из (1.5)

$$\begin{aligned}-S(a)r^{-1}y &= -r^{-1}yS\tau(a) + S\delta(a), \\ -S(a)r^{-1}y &= -r^{-1}\tau(S\tau(a))y - r^{-1}\delta(S\tau(a)) + S\delta(a).\end{aligned}$$

Условия (1.12) выполнено тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

$$S(a)r^{-1} = r^{-1}\tau S\tau(a), \quad (1.13)$$

$$rS\delta(a) = \delta S\tau(a). \quad (1.14)$$

Докажем (1.13):

$$\begin{aligned} \tau S\tau(a) &= \tau S\chi(a_1)a_2 = \tau(\chi(a_1)S(a_2)) = \chi(a_1)\tau S(a_2) \\ &= \chi(a_1)\text{Ad}_r S(a_3)\chi S(a_2) = \chi(a_1S(a_2))\text{Ad}_r S(a_3) = \text{Ad}_r S(a). \end{aligned}$$

Следующая цель доказать (1.14). Из (1.6) получаем $S\tau(a) = S(\chi(a_1)a_2) = \chi(a_1)S(a_2)$. Представляем (1.14) в эквивалентной форме:

$$rS\delta(a) = \chi(a_1)\delta S(a_2). \quad (1.15)$$

Обозначим $L = rS\delta(a)$ и $M = \chi(a_1)\delta S(a_2)$. Действуя $m(\text{id} \otimes S)$ на (1.8), получаем

$$\begin{aligned} m(\text{id} \otimes S)(\Delta\delta(a)) &= m(\text{id} \otimes S)(\delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2)), \\ 0 = \varepsilon\delta(a) &= \delta(a_1)S(a_2) + ra_1S\delta(a_2), \quad a_1S\delta(a_2) = -r^{-1}\delta(a_1)S(a_2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} L &= rS\delta(a) = r\varepsilon(a_1)S\delta(a_2) = rS(a_1)a_2S\delta(a_3) \\ &= -rS(a_1)r^{-1}\delta(a_2)S(a_3) = -\text{Ad}_r S(a_1)\delta(a_2)S(a_3). \end{aligned} \quad (1.16)$$

С другой стороны, действуя δ на левую и правую части $\varepsilon(a) = a_1Sa_2$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \delta(a_1)S(a_2) + \tau(a_1)\delta S(a_2), \\ M &= \chi(a_1)\delta S(a_2) = \chi(a_1)\varepsilon(a_2)\delta S(a_3) = \chi(a_1)\tau(S(a_2)a_3)\delta S(a_4) \\ &= \chi(a_1)\tau S(a_2)\tau(a_3)\delta S(a_4) = -\chi(a_1)\tau S(a_2)\delta(a_3)S(a_4) \\ &= -\chi(a_1)\text{Ad}_r S(a_3)\chi(S(a_2))\delta(a_4)S(a_5) = -\text{Ad}_r S(a_1)\delta(a_2)S(a_3). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Сравнивая (1.17) и (1.16), заключаем $L = M$. Это доказывает (1.15) и существование антипода.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Если $R = A[y; \tau, \delta]$ – расширение Хопфа–Оре и A – кокоммутативная алгебра Хопфа, то r лежит в центре A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\tau(a) = \chi(a_1)(a_2) = \text{Ad}_r(a_1)\chi(a_2) = \chi(a_1)\text{Ad}_r a_2$, то

$$\begin{aligned} \chi(S(a_1))\chi(a_2)a_3 &= \chi(S(a_1))\chi(a_2)\text{Ad}_r a_3, \\ \chi(\varepsilon(a_1))a_2 &= \chi(\varepsilon(a_1))\text{Ad}_r a_2, \quad a = \text{Ad}_r(a) \end{aligned}$$

для всех $a \in A$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. 1) Условие (1.6) включает, что $\tau(a) = \chi(a_1)a_2$. То есть τ – правый χ -винтовой автоморфизм R [7, 1.6.5]. Автоморфизм $\tau'(a) = a_1\chi(a_2)$ называется *левым χ -винтовым автоморфизмом*. Условие (1.7) может быть переписано в эквивалентной форме $\tau = \text{Ad}_r \tau'$.

2) Обозначим через $\mathcal{R}_r$ и $\mathcal{L}_r$ правое и левое винтовое действие r в A^* . По определению $\mathcal{R}_r\lambda(a) = \lambda(ra)$ и $\mathcal{L}_r\lambda(a) = \lambda(ar)$ для всех $\lambda \in A^*$ и $a \in A$. Условие (1.7) имеет эквивалентную форму $\mathcal{R}_r = \text{Ad}_\chi \mathcal{L}_r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. 1) Отображение δ , удовлетворяющее (1.8), будем называть *r -кодифференцированием* (заметим, что δ – r -кодифференцирование, если сопряженное отображение $\delta^*: A^* \rightarrow A^*$ является $\mathcal{R}_r$ -дифференцированием);

2) будем называть δ – $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцированием, если δ – τ -дифференцирование (см. 1.1) и r -кодифференцирование.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.7. Расширение Хопфа–Оре $R = A[y; \tau, \delta]$ будем обозначать $R = A(\chi, r, \delta)$, где $\chi: A \rightarrow k$ – характер, r – групповой элемент A , удовлетворяющий (1.7), δ – $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Назовем δ *внутренним $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцированием*, если существует элемент $d \in A$ такой, что $\delta(a) = \tau(a)d - da$ и $\Delta(d) = d \otimes 1 + r \otimes d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Назовем два расширения Хопфа–Оре R и R' алгебр Хопфа A и A' *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебр Хопфа $\Phi: R \rightarrow R'$, переводящий A на A' .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. 1) Если δ – внутреннее $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцирование, то $A(\chi, r, \delta)$ изоморфно $A(\chi, r, 0)$.

2) Два расширения Хопфа–Оре $R = A(\chi, r, \delta)$ и $R' = A'(\chi', r', \delta')$ изоморфны, если существует изоморфизм алгебр Хопфа $\Phi: A \rightarrow A'$ такой, что $\chi' = \chi\Phi^{-1}$, $r' = \Phi(r)$, $\delta' = \Phi\delta\Phi^{-1} + \delta''$, где δ'' – внутреннее $\langle \chi', r' \rangle$ -дифференцирование R' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена y на $y + d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Подалгебра Хопфа A в $R = A(\chi, r, \delta)$ является нормальной (см. [7, 3.4.1]) тогда и только тогда, когда $\chi = \varepsilon$ и r лежит в центре A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левое (соответственно правое) присоединенное действие алгебры Хопфа H определяется как $(\text{ad}_l h)(x) = h_1 x S(h_2)$ (соответственно $(\text{ad}_r h)(x) = S(h_1) x h_2$). Подалгебра Хопфа называется *нормальной*, если она инвариантна относительно левого и правого присоединенного действия. Подалгебра Хопфа A в $R = A(\chi, r, \delta)$ является нормальной, если $(\text{ad}_l y)(a) \in A$ и $(\text{ad}_r y)(a) \in A$ для любого $a \in A$. То есть $ya - rar^{-1}y \in A$ и $-r^{-1}ya + r^{-1}ay = r^{-1}(-ya + ay) \in A$. Из (1.2) вытекает, что $\tau(a) = rar^{-1}$ и $\tau(a) = a$ для любого $a \in A$. Это доказывает утверждение.

2. Классификация расширений Хопфа–Оре. В этом разделе мы проведем классификацию расширений Хопфа–Оре для некоторых классов алгебр Хопфа.

Пункт 1. Кокоммутативные алгебры Хопфа. Здесь мы представляем метод построения $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцирований кокоммутативных алгебр Хопфа.

Пусть A – кокоммутативная алгебра Хопфа. Пусть χ – характер и r – групповой элемент из центра A . Пусть α – линейная форма $\alpha: A \rightarrow k$, удовлетворяющая

$$\alpha(uv) = \alpha(u)\varepsilon(v) + \chi(u)\alpha(v). \quad (2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Отображение*

$$\delta(a) := \alpha(a_1)(1-r)a_2 \quad (2.2)$$

является $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцированием. Это позволяет построить пример $A(\chi, \tau, \delta)$ из расширения Хопфа–Оре A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение δ является τ -дифференцированием:

$$\begin{aligned} \delta(ab) &= \alpha((ab)_1)(1-r)(ab)_2 = (\alpha(a_1)\varepsilon(b_1) + \chi(a_1)\alpha(b_1))(1-r)a_2b_2 \\ &= \alpha(a_1)(1-r)a_2\varepsilon(b_1)b_2 + \chi(a_1)a_2\alpha(b_1)(1-r)b_2 = \delta(a)b + \tau(a)\delta(b). \end{aligned}$$

Отображение δ является r -кодифференцированием (см. 1.8):

$$\begin{aligned} \Delta\delta(a) &= \alpha(a_1)\Delta(1-r)a_2 = \alpha(a_1)(1 \otimes 1 - r \otimes r)a_2 \otimes a_3 \\ &= \alpha(a_1)(1-r)a_2 \otimes a_3 + \alpha(a_1)ra_2 \otimes (1-r)a_3 \\ &= \alpha(a_1)(1-r)a_2 \otimes a_3 + ra_1 \otimes \alpha(a_2)(1-r)a_3 = \delta(a_1) \otimes a_2 + ra_1 \otimes \delta(a_2). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $A = kG$ линейная форма α определяется $\alpha(g)$, $g \in G$, и удовлетворяет $\alpha(gh) = \alpha(g) + \chi(g)\alpha(h)$. То есть α есть 1-коцикл ($\alpha \in Z_\chi^1(G)$).

Пункт 2. Групповые алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. *Каждое расширение Хопфа–Оре для $A = kG$ имеет вид $A(\chi, r, \delta)$, где χ – характер группы, r – элемент центра группы G и δ имеет вид (2.2) для некоторого $\alpha \in Z_\chi^1(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1.3 все расширения Хопфа–Оре имеют вид $A(\chi, r, \delta)$, где χ – характер kG (т.е. χ характер группы G), r – групповой элемент в kG (все групповые элементы kG принадлежат G) и δ является $\langle \chi, r \rangle$ -дифференцированием. Было доказано, что r содержится в центре G (следствие 1.4). Условие (1.8) имеет вид

$$\Delta\delta(g) = \delta(g) \otimes g + rg \otimes \delta(g) \quad (2.3)$$

для всех $g \in G$. Элемент $c := \delta(g)g^{-1}$ удовлетворяет

$$\Delta(c) = c \otimes 1 + r \otimes c. \quad (2.4)$$

Для любого $\mu \in (kG)^*$ имеет место

$$\mu^2(c) = \mu \otimes \mu(\Delta c) = \mu(c)\mu(1) + \mu(r)\mu(c). \quad (2.5)$$

Элемент c представим как $c = \sum \gamma(g)g$. Пусть g_0 – элемент группы G , отличный от 1 и r . Выберем $\mu_0 \in (kG)^*$ в (2.5) так, что $\mu_0(g_0) = 1$ и $\mu_0(g) = 0$ для всех элементов из G (в частности, $\mu_0(1) = \mu_0(r) = 0$). Положим $\mu = \mu_0$ в (2.5) и получим

$$\gamma^2(g_0) = \sum \gamma(g)\mu_0^2(g) = \mu_0^2\left(\sum \gamma(g)g\right) = \mu_0^2(c) = \mu_0(c)\mu_0(1) + \mu_0(r)\mu_0(c) = 0.$$

Это влечет $\gamma(g_0) = 0$ и $c = \gamma(1) + \gamma(r)r$. Подставляя в (2.4), получаем $c = \gamma(1 - r)$ для некоторого $\gamma \in k$. Следовательно, $\delta(g) = \alpha(g)(1 - r)g$ для некоторого $\alpha: G \rightarrow k$. Пусть $r \neq 0$. Так как $\delta(g) - \tau$ -дифференцирование, то $\delta(gh) = \delta(g)h + \chi(g)\delta(h)$. После подстановки $\delta(g) = \alpha(g)(1 - r)g$ получаем $(1 - r)(\alpha(gh) - \alpha(g) - \chi(g)\alpha(h))gh = 0$. Окончательно, $\alpha(g) \in Z\chi^1(G)$.

Пункт 3. $A = U(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли над полем k нулевой характеристики. Из [8, 2.7.2] легко вытекает, что любой групповой элемент в $U(\mathfrak{g})$ равен 1. Имеем $r = 1$. Характер χ алгебры $U(\mathfrak{g})$ определяется $\mathfrak{g}$ -характером и $\tau(x) = x + \chi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Для $x \in \mathfrak{g}$ мы имеем $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ и (1.8) имеет вид $\Delta\delta(x) = \delta(x) \otimes 1 + 1 \otimes \delta(x)$ (т.е. $\delta(x)$ примитивный элемент в $U(\mathfrak{g})$). Из PBW-теоремы в случае нулевой характеристики все примитивные элементы лежат в $\mathfrak{g}$. Следовательно, $\delta(x) \in \mathfrak{g}$ и δ отображает $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$. Отображение удовлетворяет условию

$$\delta([x_1, x_2]) = [\delta(x_1), x_2] + [x_1, \delta(x_2)] + \chi(x_1)\delta(x_2) - \chi(x_2)\delta(x_1). \quad (2.6)$$

Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Любое расширение Хопфа–Оре R алгебры Хопфа $U(\mathfrak{g})$ порождается y и $U(\mathfrak{g})$ с условием $yx = (x + \chi(x))y + \delta(x)$ для некоторого характера χ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и линейного отображения $\delta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, удовлетворяющего (2.6). В случае $\chi = 0$ алгебра R является универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g}')$ алгебры Ли $\mathfrak{g}' = k\mathfrak{y} + \mathfrak{g}$.*

ПРИМЕР 2.4. Предложение неверно в случае поля положительной характеристики. Пусть k – поле характеристики $p > 0$ и $U = k[x]$ – универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g} = kx$. Полагая $r = 1$, $\tau(x) = x$ и $\delta(x) = x^p$, получаем расширение Хопфа–Оре, порожденное y, x , с условием $yx = xy + x^p$.

Пункт 4. Пусть A – квантовая универсальная обертывающая алгебра $U_q(\mathfrak{g})$ в смысле Дринфельда–Джимбо и q – переменная. Эта алгебра порождается $K_i, e_i, f_i, i = 1, \dots, n$, с обычными соотношениями и $\Delta K_i = K_i \otimes K_i$, $\Delta e_i = e_i \otimes 1 + K_i \otimes e_i$, $\Delta f_i = f_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes f_i$. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система простых корней $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Любое расширение Хопфа–Оре для $A = U(\mathfrak{g})$ изоморфно $A(1, 1, \delta)$ с $\delta(K_i) = 0$, $\delta(e_i) = \xi_i e_i$ и $\delta(f_i) = -\xi_i f_i$ для некоторых $\xi_1, \dots, \xi_n \in k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой характер A имеет вид

$$\chi(K_i) = \varepsilon_i = \pm 1, \quad \chi(e_i) = \chi(f_i) = 0.$$

Тогда $\tau(K_i) = \varepsilon_i K_i$, $\tau(e_i) = \varepsilon_i e_i$, $\tau(f_i) = f_i$. Образующий элемент y в расширении Хопфа–Оре алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ удовлетворяет (1.3) с $r = K_1^{\gamma_1} \dots K_n^{\gamma_n} = K^\gamma$. Из (1.7) вытекает $\varepsilon_i e_i = \text{Ad}_r(e_i) = q^{(\gamma, \alpha_i)} e_i$ и $f_i = q^{-(\gamma, \alpha_i)} \varepsilon_i^{-1} f_i$. Здесь $\gamma = 0$ и $\varepsilon_i = 1$ для всех i . Отсюда $r = 1$ и $\tau = \text{id}$. Получаем, в частности, что элемент y примитивный. Из (1.8) $\Delta\delta(K) = \delta(K) \otimes K + K \otimes \delta(K)$. То есть $\delta(k)K^{-1}$ – примитивный элемент. Из PBW-теоремы легко получить, что $U_q(\mathfrak{g})$ не имеет примитивных элементов. Это влечет $\delta(K) = 0$. Имеем $ye_i = e_i y + \delta(e_i)$, $yf_i = f_i y + \delta(f_i)$, $yK_i = K_i y$. Из (1.8) получаем $\Delta\delta(e_i) = \delta(e_i) \otimes 1 + K_i \otimes \delta(e_i)$ и $\Delta\delta(f_i) = \delta(f_i) \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes \delta(f_i)$. Отсюда $\delta(e_i) = \xi_i e_i$, $\delta(f_i) = -\xi_i f_i$ для некоторых чисел ξ_i .

Пункт 5. Расширения Хопфа–Оре для квантовой группы “ $ax + b$ ”. Пусть q – переменная. Квантовая группа “ $ax + b$ ” порождается над кольцом $C = k[q, q^{-1}]$ элементами K, x с соотношениями $Kx = q^2xK, \Delta(K) = K \otimes K, \Delta(x) = x \otimes 1 + K \otimes x, \varepsilon(K) = 1, \varepsilon(x) = 0, S(K) = K^{-1}$ и $S(x) = -K^{-1}x$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Существует ровно четыре расширения Хопфа–Оре для квантовой группы “ $ax + b$ ”: $yK = Ky, yx = xy + \gamma x$ с $\gamma = 0, 1, y$ – примитивный элемент и $Ky = q^{-2}yK, yx = xy + \gamma(K - K^{-1})$ с $\gamma = 0, 1, \Delta y = y \otimes K^{-1} + 1 \otimes y$. Среди расширений квантовая алгебра $sl_q(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой характер χ алгебры A имеет вид $\chi(K) = \alpha = C^*$ и $\chi(x) = 0$. Тогда $\tau(K) = \chi(K)K = \alpha K$ и $\tau(x) = \chi(K)x = \alpha x$. Элемент r групповой. Отсюда $r = K^m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$ и

$$\Delta y = y \otimes 1 + K^m \otimes y. \quad (2.7)$$

Условие (1.7) имеет вид

$$\tau(K) = \text{Ad}_{K^m}(K)\chi(K) = \alpha K, \quad \tau(x) = \text{Ad}_{K^m}(x)\chi(1) = q^{2m}x.$$

Отсюда

$$\alpha = q^{2m}. \quad (2.8)$$

Условие (1.8) имеет вид $\Delta\delta(K) = \delta(K) \otimes K + K^{m+1} \otimes \delta(K)$. Элемент $b := \delta(K)K^{-1}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta b = b \otimes 1 + K^m \otimes b. \quad (2.9)$$

Можно показать, что любое решение (2.9) имеет вид $b = \gamma x + \gamma'(1 - K)$ (в случае $m = 1$) или $b = \gamma(1 - K^m)$. Ниже мы покажем, что, заменяя образующий элемент y , можно считать $\delta(K) = 0$.

1) Пусть $b = \gamma x + \gamma'(1 - K)$ и $m = 1$. Тогда $\delta(K) = \gamma xK + \gamma'(1 - K)K$ и $\alpha = q^2$. Рассмотрим внутренние дифференцирования $\delta_x(a) = \tau(a)x - xa$ и $\delta_{1-K}(a) = \tau(a)(1 - K) - (1 - K)a$ (см. определение 1.7). Тогда $\delta_x(K) = \tau(K)x - xK = xK(\alpha q^2 - 1) = xK(q^4 - 1)$ и $\delta_{1-K}(K) = (q^2 - 1)(1 - K)K$. Заменяя y на $y' = y + \xi x + \xi'(1 - K)$ с $\xi = \gamma(q^4 - 1)^{-1}$ и $\xi' = \gamma'(q^2 - 1)^{-1}$, мы получаем, что новый образующий элемент y' удовлетворяет (2.7) с $\delta'(K) = 0$.

2) Пусть $b = \gamma(1 - K^m)$. Тогда $\delta(K) = \gamma(1 - K^m)K$. Элемент b удовлетворяет (2.9). Рассмотрим внутреннее дифференцирование δ_b . Тогда

$$\delta_b(K) = \tau(K)b - bK = \gamma(\alpha - 1)(1 - K^m)K.$$

Если $\alpha \neq 1$, то заменим y на $y' = y + \xi b$ с $\xi = (\alpha - 1)^{-1}$ и получим $\delta'(K) = 0$. Если $\alpha = 1$, то уравнение (2.8) дает $m = 0$ и $\delta(K) = 0$.

Мы доказали, что, заменяя y , можно считать $\delta(K) = 0$. Отсюда $yK = \alpha Ky$. Наша следующая цель найти $\delta(x)$. Действуя δ на соотношение $Kx = q^2xK$, получаем $q^{2m}K\delta(x) = q^2\delta(x)K$ и

$$K\delta(x) = q^{2(1-m)}\delta(x)K. \quad (2.10)$$

Уравнение (1.8) дает

$$\Delta\delta(x) = \delta(x) \otimes 1 + rK \otimes \delta(x) = \delta(x) \otimes 1 + K^{m+1} \otimes \delta(x).$$

Снова существуют только два решения

$$\delta(x) = \begin{cases} \gamma x + \gamma'(1 - K) & \text{для } m = 0, \\ \gamma(1 - K^{m+1}) & \text{для } m \neq 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) получаем

$$\delta(x) = \begin{cases} \gamma x & \text{для } m = 0, \\ \gamma(1 - K^2) & \text{для } m = 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

В первом случае расширение Хопфа–Оре R порождается y и A с $yK = Ky$, $yx = x(y + \gamma)$ и y – примитивный элемент. Можно считать, что $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$.

Во втором случае $\delta(x) = \gamma(1 - K^2)$, $m = 1$ и $\alpha = q^2$. Получаем $yK = q^2Ky$, $yx = q^2xy + \gamma(1 - K^2)$.

После замены $y' = yK^{-1}$ имеем $\Delta y' = y' \otimes K^{-1} + 1 \otimes y'$ и $y'x = xy' + \gamma q^{-2}(K^{-1} - K)$. Можно считать, что $-\gamma q^{-2}$ равно 0 или 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Beattie M. An isomorphism theorem for Ore extension Hopf algebras // Comm. Algebra. 2000. № 2. P. 569–584.
- [2] Beattie M., Dascalescu S., Grunenfelder L. Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions // Algebra. 2000. V. 225. P. 743–770.
- [3] Delvaux L. Pairing and Drinfel'd-double of Ore extensions // Comm. Algebras. 2001. V. 29. № 7. P. 3167–3177.
- [4] Nenciu A. Cleft extensions for a class of pointed Hopf algebras constructed by Ore extensions // Comm. Algebra. 2001. V. 29. № 5. P. 1959–1981.
- [5] Nenciu A. Quasitriangular structures for a class of pointed Hopf algebras constructed by Ore extensions // Comm. Algebra. 2001. V. 29. № 8. P. 3419–3432.
- [6] McConnell J.C., Robson J.C. Noncommutative Noetherian rings. New-York: Wiley-Interscience, 1987.
- [7] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings // Reg. Conf. Series in Math. 1993. V. 82.
- [8] Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

Самарский государственный университет
E-mail: panov@info.ssu.samara.ru

Поступило
24.09.2002