Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Колесников, Об ограниченности снизу тригонометрических полиномов
наилучшего приближения, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 870–878

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2760>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:38:51

УДК 517.5

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СНИЗУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В. С. Колесников

А. С. Беловым доказано, что частные суммы четной 2π -периодической функции f , разлагающейся в ряд Фурье с выпуклыми коэффициентами $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, будут равномерно ограничены снизу, если выполнены условия $a_n = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$, причем это утверждение теряет силу, если показатель -1 в этом условии заменить на больший. В статье получены аналоги этих результатов для тригонометрических полиномов наилучшего приближения функции f в метрике $L_{2\pi}^1$.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$, $\dots$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \quad (1)$$

Известно, что если $\Delta^2 a_n \geq 0$ для всех $n \geq 0$ и $a_n \rightarrow \infty$, то ряд, стоящий в правой части (1), сходится при $x \neq 0$ к неотрицательной на всей числовой прямой функции $f \in L_{2\pi}^1$. Пусть

$$T_n(f; x) = \frac{a_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n a_k^n \cos kx, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

— тригонометрические полиномы наилучшего приближения функции $f(x)$ степени n в $L_{2\pi}^1$.

В заметке доказывается, что если $\Delta a_n > 0$, $\Delta^2 a_n > 0$, $\Delta^3 a_n \geq 0$ при всех $n \geq 0$ и $a_n = O(n^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$, то полиномы $T_n(f; x)$ равномерно ограничены снизу. Также показывается, что условие $a_n = O(n^{-1})$ является точным. Эти результаты являются аналогами соответственно теорем А и В, доказанных Беловым для частных сумм ряда (1).

ТЕОРЕМА А (см. [1, следствие 9]). Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает и

$$a_n = O(n^{-1}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда частные суммы ряда (1) равномерно на всей прямой ограничены снизу, т.е. существует константа $C \in (0, \infty)$ такая, что для всех $x \in (-\infty, \infty)$ и всех $n = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \geq -C.$$

ТЕОРЕМА В (см. [2, теорема 1]). Для любой последовательности положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^\infty$, монотонно стремящейся к нулю и удовлетворяющей условию

$$\sup_{n \geq 1} (nc_n) = \infty, \quad (3)$$

можно построить стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ такую, что

$$\Delta a_n > 0, \quad \Delta^2 a_n \geq 0, \quad a_n \leq c_n \quad \text{при всех } n = 0, 1, 2, \dots,$$

для которой ряд (1) сходится к функции $f(x) > 0$, $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +0$ и $f \in L_{2\pi}^p$ при всех $p \in (0, \infty)$, но частные суммы ряда (1) не являются равномерно ограниченными снизу, т.е.

$$\inf_{n \geq 0} \min_x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) = -\infty.$$

Беловым также было показано (см. [3]), что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ можно выбрать так, чтобы все разности $\Delta^i a_n$ при всех целых неотрицательных i и n были неотрицательными.

Заметим, что частные суммы ряда (1) являются полиномами наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике $L_{2\pi}^2$. Поэтому возникает более общая задача: для каких $p \geq 1$ имеет место эффект неограниченности снизу полиномов наилучшего приближения в метрике $L_{2\pi}^p$ функций (1) с выпуклыми коэффициентами Фурье, т.е. имеет место аналог теоремы В?

В данной заметке получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям

$$\Delta a_n > 0, \quad \Delta^2 a_n > 0, \quad \Delta^3 a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 0, \quad (4)$$

$$a_n = O(n^{-1}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тогда полиномы наилучшего приближения $T_n(f; x)$ функции $f(x)$, определяемой формулой (1), равномерно ограничены снизу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (3). Тогда можно построить стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ так, что

$$\Delta a_n > 0, \quad \Delta^2 a_n > 0, \quad \Delta^3 a_n \geq 0, \quad a_n \leq c_n \quad \forall n \geq 0, \quad (6)$$

функция (1) положительна, $f \in L_{2\pi}^p$ при всех $p \in (0, \infty)$, но полиномы наилучшего приближения $T_n(f; x)$ не являются равномерно ограниченными снизу, т.е.

$$\inf_{n \geq 0} \min_x T_n(f; x) = -\infty. \quad (7)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty,$$

так как в противном случае из неравенства $a_k^n \leq a_k$, приведенного в доказательстве теоремы 1, следует, что полиномы наилучшего приближения $T_n(f; x)$ равномерно ограничены. Отсюда следует (см. доказательство теоремы 1 работы [2]), что так же, как в теореме В, будет $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +0$.

Интересно также отметить, что из (7) следует, что для функции f существует последовательность полиномов $T_{n_k}(f; x)$ такая, что их отклонения от f в пространстве $C_{2\pi}$ стремятся к ∞ , хотя при этом их отклонения от f в $L_{2\pi}^1$ стремятся к 0. Более того, с одной стороны функция $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +0$, а с другой стороны с ростом n значения многочленов наилучшего приближения $T_n(f; x)$ в некоторых точках x_n оказываются такими, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T_n(f; x_n) = -\infty.$$

Цель данной заметки – подробное доказательство теорем 1 и 2.

2. Доказательство теоремы 1. При условиях (4) теоремы 1 тригонометрические полиномы наилучшего приближения функции f в метрике $L_{2\pi}^1$ единственны (см. [4, с. 452–454]). Известно, что (см. [5, с. 91–92]) коэффициенты a_k^n полинома (2) выражаются через коэффициенты Фурье $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ функции (1) следующим образом:

$$a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (a_{k+2l(n+1)} - a_{-k+(2l+2)(n+1)}), \quad k = 0, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Отсюда следуют формулы

$$\Delta^i a_k^n = \sum_{l=0}^{\infty} ((-1)^l \Delta^i a_{k+2l(n+1)} + (-1)^{l+i+1} \Delta^i a_{-(k+i)+(2l+2)(n+1)}), \quad (9)$$

где $i = 1, 2, 3$, $k = 0, \dots, n-i$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что в силу условия (4) величина

$$a_{k+2l(n+1)} - a_{-k+(2l+2)(n+1)} = \sum_{j=k}^{-k-1+2(n+1)} \Delta a_{j+2l(n+1)}$$

положительна и убывает с ростом l так, что ряд (8) есть ряд типа Лейбница. Следовательно,

$$a_k^n \leq (a_k - a_{-k+2(n+1)}) \leq a_k$$

и, стало быть,

$$a_k - a_k^n \leq a_{-k+2(n+1)} + (a_{k+2(n+1)} - a_{-k+4(n+1)}) \leq 2a_{n+1},$$

$k = 0, \dots, n$.

Отсюда в силу условия (5) получаем

$$\begin{aligned} S_n(x) - T_n(f; x) &= \frac{a_0^n - a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k - a_k^n) \cos kx \\ &\leq \frac{a_0^n - a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k - a_k^n) \leq 2(n+1)a_{n+1} = O(1). \end{aligned}$$

Из теоремы А следует, что полиномы $S_n(x)$ ограничены снизу, а значит, и полиномы $T_n(f; x)$ ограничены снизу.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть $\{\omega(n)\}_{n=0}^\infty$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю и удовлетворяющая условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (n\omega(n)) = \infty. \quad (10)$$

Тогда существует функция f , коэффициенты Фурье a_k , $k = 0, 1, \dots$, которой удовлетворяют условиям

$$\Delta a_k > 0, \quad \Delta^2 a_k > 0, \quad \Delta^3 a_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$a_k \leq \omega(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

но для которой полиномы наилучшего приближения $T_n(f; x)$ не являются равномерно ограниченными снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Предположим, что коэффициенты Фурье a_k , $k = 0, 1, \dots$, некоторой функции f удовлетворяют условиям (11). Тогда коэффициенты $\{a_k^n\}_{k=0}^n$ полинома наилучшего приближения

$$T_n(f; x) = \frac{1}{2}a_0^n + \sum_{k=1}^n a_k^n \cos kx$$

в $L_{2\pi}^1$ вычисляются по формулам (8).

Выполнив дважды преобразование Абеля, будем иметь

$$T_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k^n \frac{\sin^2((k+1)x/2)}{2 \sin^2(x/2)} + \Delta a_{n-1}^n \frac{\sin^2(nx/2)}{2 \sin^2(x/2)} + a_n^n \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta a_k^n &= a_k^n - a_{k+1}^n, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad \Delta^2 a_k^n = \Delta a_k^n - \Delta a_{k+1}^n, \quad k = 0, \dots, n-2, \\ \Delta^3 a_k^n &= \Delta^2 a_k^n - \Delta^2 a_{k+1}^n, \quad k = 0, \dots, n-3.\end{aligned}$$

Отсюда при $x = x_n = 2\pi/n$ получаем

$$T_n(f; x_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 a_k^n \frac{1 - \cos(k+1)2\pi/n}{4 \sin^2(\pi/n)} + \frac{1}{2} a_n^n.$$

Сделав еще один раз преобразование Абеля, будем иметь

$$\begin{aligned}T_n(f; x_n) &= \frac{1}{8 \sin^3 \frac{\pi}{n}} \left(2 \Delta^2 a_{n-2}^n n \sin \frac{\pi}{n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{n-3} \Delta^3 a_k^n \left((2k+3) \sin \frac{\pi}{n} - \sin \left((2k+3) \frac{\pi}{n} \right) \right) \right) + \frac{a_n^n}{2} \\ &= \alpha(n) + \frac{1}{8 \sin^3(\pi/n)} (A(n) + B(n)) + \frac{1}{2} a_n^n,\end{aligned}\tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha(n) &= \frac{n}{8 \sin^2(\pi/n)} \Delta^2 a_{n-2}^n, \\ A(n) &= \sum_{k=0}^{n-3} \Delta^3 a_k^n \left((2k+3) \sin \frac{\pi}{n} - \sin \left((2k+3) \frac{\pi}{n} \right) \right), \\ B(n) &= \Delta^2 a_{n-2}^n n \sin \frac{\pi}{n}.\end{aligned}\tag{14}$$

Для доказательства леммы достаточно построить последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty$, удовлетворяющую условиям леммы, и последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=0}^\infty$ так, чтобы было $(1/2) a_{n_m}^{n_m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$,

$$A(n_m) + B(n_m) \leq 0 \quad \text{при всех } m \in \mathbb{N}\tag{15}$$

и

$$\alpha(n_m) \rightarrow -\infty \quad \text{при } m \rightarrow \infty.\tag{16}$$

Действительно, в этом случае из (13) следует, что $T_{n_m}(f; x_{n_m}) \rightarrow -\infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Последовательность индексов $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots$ строим по индукции следующим образом. Положим $n_0 = 3$. Допустим, что при некотором $m \geq 1$ индексы $n_0, \dots, n_{m-1}$ уже построены. Так как последовательность $\omega(n)$ монотонно стремится к 0 и величина $n\omega(n)$ неограничена, то найдется четное натуральное $n > 27n_{m-1}$, удовлетворяющее неравенствам

$$5\omega\left(\frac{n}{2}\right) \leq \omega(3n_{m-1}),\tag{17}$$

$$10^{-6} \cdot n\omega(n) \geq \sum_{j=0}^{n_{m-1}} n_j \omega(3n_j).\tag{18}$$

Положим $n_m = 4s(n_{m-1} + 1) + n_{m-1}$, где s — наибольшее целое, при котором выполнено неравенство $3n_m \leq n$, т.е. s — целая часть числа $(n - 3n_{m-1})/(12(n_{m-1} + 1))$.

Из определения n и n_m следует, что $s \geq 1$,

$$\begin{aligned} n_m &\geq 4n_{m-1}, \\ n &< 3(4(s+1)(n_{m-1} + 1) + n_{m-1}) \leq 6 \cdot (4s(n_{m-1} + 1) + n_{m-1}) = 6n_m. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как последовательность $\omega(n)$ не возрастает, то из последнего неравенства вместе с (18) получим неравенство

$$10^{-5}n_m\omega(3n_m) \geq \sum_{j=1}^{n_{m-1}} n_j\omega(3n_j), \quad (20)$$

а вместе с (17) — неравенство

$$5\omega(3n_m) \leq \omega(3n_{m-1}). \quad (21)$$

Пусть $b_k = \omega(k)/(2k^2)$ при $k = 3n_m$, $m = 1, 2, \dots$, и $b_k = 0$ при всех остальных k . Из (21) следует, что ряды

$$\begin{aligned} b_k^* &= \sum_{i=k}^{\infty} b_i, & b_k^{**} &= \sum_{i=k}^{\infty} b_i^* = \sum_{i=k}^{\infty} (i+1-k)b_i, \\ \sum_{i=k}^{\infty} b_i^{**} &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2}(i-k+2)(i-k+1)b_i \end{aligned}$$

сходятся. Положим

$$a_k = \sum_{i=k}^{\infty} b_i^{**}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

так что будет $\Delta a_k = b_k^{**}$, $\Delta^2 a_k = b_k^*$, $\Delta^3 a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots$. Таким образом, выполняются условия (11), и $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Докажем условие (12). Действительно, если $3n_{m-1} < k \leq 3n_m$, то

$$a_k = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(3n_j - k + 2)(3n_j - k + 1)}{2} b_{3n_j} \leq \sum_{j=m}^{\infty} (3n_j)^2 \frac{\omega(3n_j)}{2(3n_j)^2} = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2} \omega(3n_j).$$

Отсюда и из условия (21) будем иметь

$$a_k \leq \frac{1}{2} \omega(3n_m) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{5^i} \leq \omega(3n_m) \leq \omega(k).$$

Для доказательства неравенства (15) оценим сверху отдельно каждое из выражений $A(n_m)$ и $B(n_m)$. Оценим сначала $B(n_m)$ сверху. Так как $\Delta^2 a_n = \sum_{k=n}^{\infty} b_k$, то из формулы (9) при $i = 2$ следует, что

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_{n_m-2} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (\Delta^2 a_{n_m-2+2l(n_m+1)} - \Delta^2 a_{-n_m+(2l+2)(n_m+1)}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l [b_{n_m-2+2l(n_m+1)} + b_{n_m-1+2l(n_m+1)} \\ &\quad + b_{n_m+2l(n_m+1)} + b_{n_m+1+2l(n_m+1)}]. \end{aligned}$$

При $l = 0$ все слагаемые, стоящие в квадратных скобках под знаком последней суммы, равны 0, поскольку в силу (19) их индексы больше числа $3n_m - 1$, но меньше $3n_m$, а при $l = 1$ все слагаемые равны 0, кроме первого: $b_{n_m-2+2(n_m+1)} = b_{3n_m}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Delta^2 a_{n_m-2}^{n_m} &= -b_{3n_m} + \sum_{l=2}^{\infty} (-1)^l (b_{n_m-2+2l(n_m+1)} + b_{n_m-1+2l(n_m+1)} \\ &\quad + b_{n_m+2l(n_m+1)} + b_{n_m+1+2l(n_m+1)}) \\ &\leq -b_{3n_m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} b_{3n_k} \leq -\frac{\omega(3n_m)}{2(3n_m)^2} + \frac{1}{2(3n_m)^2} \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega(3n_k) \\ &\leq \frac{\omega(3n_m)}{2(3n_m)^2} \left(-1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i} \right) = -\frac{3\omega(3n_m)}{8(3n_m)^2}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$B(n_m) = \Delta^2 a_{n_m-2}^{n_m} n_m \sin \frac{\pi}{n_m} \leq \left(-\frac{3\omega(3n_m)}{8(3n_m)^2} \right) n_m \left(\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{n_m} \right) = -\frac{\omega(3n_m)}{12(n_m)^2}. \quad (22)$$

Оценим теперь сверху $A(n_m)$.

Для оценки сверху выражения

$$(2k+3) \sin \frac{\pi}{n_m} - \sin \left((2k+3) \frac{\pi}{n_m} \right)$$

рассмотрим функцию

$$g(x) = (2k+3) \sin x - \sin((2k+3)x).$$

Видим, что

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, \quad g'(0) = 0, \quad g''(0) = 0, \\ g'''(x) &= -(2k+3) \cos x + (2k+3)^3 \cos((2k+3)x) < (2k+3)^3, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Поэтому по формуле Тейлора

$$\begin{aligned}(2k+3) \sin \frac{\pi}{n_m} - \sin \left((2k+3) \frac{\pi}{n_m} \right) &= g \left(\frac{\pi}{n_m} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot g'''(\theta) \cdot \left(\frac{\pi}{n_m} \right)^3 \leq \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{n_m} \right)^3 \cdot (2k+3)^3,\end{aligned} \quad (23)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi/n_m$.

Теперь докажем, что если $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n_m - 3$, то

$$\Delta^3 a_k^{n_m} \leq b_k.$$

Из (9) следует

$$\begin{aligned}\Delta^3 a_k^{n_m} &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (b_{k+2l(n_m+1)} + b_{-(k+3)+(2l+2)(n_m+1)}) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} b_{k+4l(n_m+1)} + b_{-(k+3)+(4l+2)(n_m+1)} \\ &= b_k + \sum_{l=1}^{\infty} b_{k+4l(n_m+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} b_{-(k+3)+(4l+2)(n_m+1)}.\end{aligned}\quad (24)$$

Из определения последовательности $\{n_m\}_{m=0}^{\infty}$ следует, что $n_{j+1} + 1 = (4s_j + 1) \times (n_j + 1)$, где s_j — некоторое целое, $j = 0, 1, \dots$. Отсюда при $q \geq m$ получаем, что $n_q + 1 = (4s + 1)(n_m + 1)$, где s целое. Тогда разность $k + 4l(n_m + 1) - 3n_q = k + 3 + (4l - 3(4s + 1))(n_m + 1)$ не может при $0 \leq k \leq n_m - 3$ делиться нацело на $n_m + 1$ и, следовательно, $k + 4l(n_m + 1) \neq 3n_q$, $q \geq m$. Поскольку при $l \geq 1$ выполнено $k + 4l(n_m + 1) > 3n_m$, то $k + 4l(n_m + 1) \neq 3n_q$, $q \geq 0$, и, следовательно, при $l \geq 1$ будет $b_{k+4l(n_m+1)} = 0$.

Числа $b_{-(k+3)+(4l+2)(n_m+1)}$, $l = 0, 1, \dots$, также равны нулю, так как разность $-(k+3) + (4l+2)(n_m+1) - 3n_q = -k + (4(l-3s)-1)(n_m+1) \neq 0$ при $0 \leq k \leq n_m - 3$ и, следовательно, $-(k+3) + (4l+2)(n_m+1) \neq 3n_q$, $q \geq m$. Поскольку $-(k+3) + (4l+2) \times (n_m+1) > 3n_{m-1}$, то $-(k+3) + (4l+2)(n_m+1) \neq 3n_q$, $q \geq 0$, и, следовательно, при $l \geq 0$ будет $b_{-(k+3)+(4l+2)(n_m+1)} = 0$.

Таким образом из (24) следует $\Delta^3 a_k^{n_m} \leq b_k$, $1 \leq k \leq n_m - 3$, и поэтому в силу (23) и (14)

$$\begin{aligned}A(n_m) &\leq \sum_{k=0}^{n_m-3} \frac{b_k}{6} \left(\frac{\pi}{n_m}\right)^3 (2k+3)^3 = \sum_{j=0}^{m-1} b_{3n_j} \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{n_m}\right)^3 (2 \cdot 3n_j + 3)^3 \\ &< \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\omega(3n_j)}{2 \cdot (3n_j)^2} \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{n_m}\right)^3 \cdot 9^3 \cdot n_j^3 = \frac{27\pi^3}{4n_m^3} \sum_{j=0}^{m-1} n_j \omega(3n_j).\end{aligned}$$

Из этой оценки и неравенства (20) имеем

$$A(n_m) < \frac{27\pi^3}{4} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\omega(3n_m)}{n_m^2} < 10^{-2} \cdot \frac{\omega(3n_m)}{(n_m)^2}.$$

Отсюда и из (22) следует (15): $A(n_m) + B(n_m) < 0$.

Для доказательства (16) заметим, что из (20) следует неравенство $n_m \omega(3n_m) \geq 10^5$. $n_{m-1} \omega(3n_{m-1})$ и, значит, $n_m \omega(3n_m) \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда в силу (22)

$$\alpha(n_m) = \frac{B(n_m)}{8 \sin^3 \frac{\pi}{n_m}} \leq -\frac{1}{8} \left(\frac{n_m}{\pi}\right)^3 \cdot \frac{\omega(3n_m)}{12(n_m)^2} = -\frac{1}{8 \cdot 12\pi^3} \cdot n_m \cdot \omega(3n_m)$$

и, следовательно, $\alpha(n_m)$ стремится к $-\infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Наконец, так как ряд (8) есть ряд типа Лейбница, то

$$a_{n_m}^{n_m} \leq a_{n_m}.$$

Но из уже доказанного неравенства (12) следует, что $a_{n_m} \leq \omega(n_m)$. Тогда

$$\frac{1}{2} a_{n_m}^{n_m} \leq \frac{1}{2} \omega(n_m) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тем самым лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим

$$\omega(n) = \min \left(c_n, \frac{1 + \ln n}{n} \right) \quad \text{при } n \geq 1, \quad \omega(0) = c_0.$$

Тогда последовательность положительных чисел $\{\omega(n)\}_{n=0}^{\infty}$ не возрастает, монотонно стремится к нулю и удовлетворяет условию (10). Поэтому по лемме можно построить последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющую (11) и (12), такую, что для функции $f(x)$, определяемой рядом (1), последовательность полиномов $T_n(f; x)$ не является равномерно ограниченной снизу.

Применяя дважды преобразование Абеля к ряду (1), получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2 \sin^2(x/2)}$$

и, значит, в силу (6) $f(x) > 0$ при всех действительных x .

Так как

$$a_n \leq \omega(n) \leq \frac{1 + \ln n}{n} \quad \text{при всех } n \geq 1,$$

то нетрудно видеть, что ряд $\sum n^{p-2} a_n n^p < \infty$ сходится при любом $p \in (1, \infty)$. Отсюда по известной теореме Харди и Литтлвуда [6, с. 657] следует, что функция f принадлежит $L_{2\pi}^p$ при $p \in (0, \infty)$. Теорема 2 доказана.

В заключение автор благодарит А. С. Белова за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белов А. С. О коэффициентах неотрицательных косинус-рядов с неотрицательными частными суммами // Тр. МИАН. 1989. Т. 190. С. 3–21.
- [2] Белов А. С. О частных суммах тригонометрического ряда с выпуклыми коэффициентами // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 4. С. 21–27.
- [3] Белов А. С. О тригонометрических рядах с неограниченными снизу частными суммами // Вестн. Ивановского гос. ун-та. 2002. № 3. С. 110–117.
- [4] Крейн А. Е., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [5] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [6] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

Шуйский государственный педагогический университет
E-mail: kolesn@ivanovo.ac.ru

Поступило
08.03.2005