Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О “разрушении” решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 879–899

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 09:06:52

О “РАЗРУШЕНИИ” РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

Рассматривается первая начально-краевая задача для многомерного сильно нелинейного уравнения с двойной нелинейностью псевдопараболического типа в ограниченной области с достаточно гладкой границей. Доказана локальная разрешимость данной задачи в слабом обобщенном смысле. Причем в зависимости от рассматриваемых нелинейностей и начальных условий доказана разрешимость в любом конечном цилиндре $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ или разрушение за конечное время.

Библиография: 46 названий.

1. Введение и постановка задачи. Прежде всего приведем вывод задачи, рассматриваемой в дальнейшем. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, — ограниченная область с гладкой границей класса $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$. Причем область Ω занимает полупроводник. Принципиальное свойство полупроводников заключается в том, что нестационарные процессы, наблюдаемые в них, описываются системой уравнений квазистационарного поля, уравнения неразрывности и материальных уравнений. Причем существенным в их описании является явный вид материальных уравнений, связывающих напряженность $\mathbf{E}$ и индукцию электрического поля $\mathbf{D}$, с одной стороны, и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и плотность тока в полупроводнике $\mathbf{J}$ с другой. Искомая система уравнений в некоторой декартовой системе координат в общем случае имеет вид [1]

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi en, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{J} + Q, \quad \mathbf{J}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, причем для некоторых моделей справедливо феноменологическое соотношение вектора поляризации и потенциала электрического поля φ

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = k_1 |\varphi|^q, \quad k_1 > 0. \quad (1.3)$$

Кроме того, относительно тензора проводимости σ_{ij} предположим, что он является нелинейным относительно компонент напряженности электрического поля E_j [2]:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} |E_j|^{p-2}, \quad p > 2. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 02-01-00253, 02-01-06038, и гранта от программы “Молодые ученые России”.

Наконец, предположим, что в полупроводнике имеются источники тока свободных зарядов, распределение которых в самосогласованном электрическом поле полупроводника имеет вид

$$Q = k_2 |\varphi|^{p-2} \varphi, \quad k_2 > 0. \quad (1.5)$$

Из системы уравнений (1.1)–(1.5) вытекает следующее сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \varphi - 4\pi k_1 |\varphi|^q \varphi) + 4\pi e \Delta_p \varphi + 4\pi e k_2 |\varphi|^{p-2} \varphi = 0. \quad (1.6)$$

В предположении, что полупроводник “заземлен” и имеется начальное распределение потенциала электрического поля, в безразмерных переменных приходим к задаче **A**.

Задача A. Рассматриваем следующее уравнение и начальные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + \Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u &= 0, \quad p > 2, \quad q \geq 0, \quad \lambda > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Delta_p u \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

По всей видимости, рассматриваемая задача полному математическому исследованию до последнего времени не подвергалась. Однако отметим, что в работах [3]–[5] рассматривались близкие задачи и был получен набор родственных результатов. Для задачи (1.7) нами будут рассмотрены вопросы глобальной разрешимости и разрушения за конечное время, поэтому мы сочли возможным привести ссылки как на работы, посвященные исследованию псевдопараболических уравнений, так и на работы по исследованию вопросов глобальной неразрешимости и разрушению решений.

Применение полугруппового подхода к общей теории вырождающихся псевдопараболических уравнений получило глубокое и широкое развитие в работах [6]–[9] с приложениями к полулинейным уравнениям псевдопараболического типа [10], [11]. Исследованию псевдопараболических уравнений с незнакоопределенным или необратимым оператором при старшей производной во времени посвящена работа [12]. Кроме того, в абстрактной постановке вырождающиеся уравнения псевдопараболического типа рассматриваются в работе [13]. Широкий спектр результатов для уравнений и систем уравнений, неразрешенных относительно старшей производной, рассматривались в работе [14]. Отметим также работу [15], где рассматривались вопросы локальной разрешимости для уравнений псевдопараболического типа. Исследованию псевдопараболических включений с двойной нелинейностью посвящена работа [16]. Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью рассматривались в работе [17]. Задачи оптимального управления линейных задач для уравнений псевдопараболического типа исследовались в работе [18] (см. также библиографию к этой работе). Разрушение за конечное время и существование глобального во времени ограниченного решения нелинейного уравнения Буссинеска с источником

$$u_t - \Delta \psi(u) - \Delta u_t + q(u) = 0$$

исследовалось в работах [19] и [20]. В работах [21], [22] были предложены физические модели, приводящие к нелинейным уравнениям псевдопараболического типа и линейным уравнениям типа Соболева. Наконец, в [23] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа:

$$u_t = c \Delta u_t + \varphi(u).$$

Отметим также, что исследованием задач для родственных к (1.7) линейных и квазилинейных уравнений составного типа посвящены работы [24]–[28].

Перейдем к обзору результатов и методов доказательства теорем о несуществовании и разрушении решений, применимых и для уравнений псевдопараболического типа.

Прежде всего, отметим классическую работу Фуджиты о несуществовании положительного решения для полулинейного уравнения параболического типа [29]. В другой также классической работе Левина [30] был предложен энергетический подход к исследованию вопроса о разрушении сильного и слабого обобщенного решений для достаточно больших начальных данных задачи. В работе [31] была предложена новая задача, для которой удалось получить оптимальный результат Фуджиты. Широкий спектр результатов по исследованию неограниченных решений был получен в работе [32]. Кроме того, результаты по получению оценок сверху и снизу для скорости разрушения решения были получены в работах [5], [33]–[35]. Метод доказательства несуществования решения некоторых классов краевых задач, основанный на использовании принципа максимума, развит в работе [36]. Принципиально новый подход, называемый методом пробных функций, предложен в работе [37] (см. также работу [38]).

Перейдем теперь к детальному изучению задачи **A**.

2. Локальная разрешимость и единственность в слабом обобщенном смысле. Пусть $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0, 1]$, – граница ограниченной области Ω и натуральное число $s \geq 2$ таково, что $(s-1)/N \geq 1/2 - 1/p$. Рассмотрим следующую задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\langle w_j, v \rangle_s = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^s(\Omega), \quad j = \overline{1, +\infty}, \quad (2.1)$$

где введены обозначения: $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$, а $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$. В силу определения s справедлива следующая цепочка вложений:

$$\mathbb{H}_0^s(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^2(\Omega), \quad p > 2.$$

Поскольку собственные функции задачи (2.1) образуют галёркинский базис одновременно в $\mathbb{H}_0^s(\Omega)$ и в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (см., например, [39, с. 172], [40, с. 4]), то в силу указанных включений собственные функции задачи (2.1) образуют галёркинский базис в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Если $N = 1, 2$, то $q \geq 0$, а если $N > 3$, то $0 \leq q < 4/(N-2)$ и $2 \leq p < 2N/(N-2)$. Тогда найдутся такое $T_0 = T_0(u_0, q, p) > 0$ и функция $u(x, t): (0, T_0) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого $T \in (0, T_0)$ имеют место включения

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad (2.2)$$

где u' – производная по времени, и кроме того, $u(0) = u_0$ почти всюду в Ω , причем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - |u|^q u) + \Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0$$

в смысле $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$,

$$\Delta_p u \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

При условии $q = 0$ функция $u(x, t)$ единственная.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку в условиях теоремы 1 $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in L^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$, то в силу результата работы [39, с. 20] имеем $u(x)(t): [0, T] \rightarrow \mathbb{H}_0^1(\Omega)$ — непрерывная функция. Стало быть, начальное условие имеет смысл.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для доказательства локальной разрешимости воспользуемся методом Галёркина в сочетании с методами монотонности и компактности [39].

Будем искать “приближенное” решение нашей задачи (1.7) в виде конечной комбинации собственных функций задачи (2.1)

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k, \quad u_{0m} \equiv u_m(0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega),$$

и потребуем выполнения соотношений

$$\begin{aligned} (\nabla u'_m, \nabla w_j) + (q+1)(|u_m|^q u_m, w_j) + (p-1) \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \\ = \lambda(|u_m|^{p-2} u_m, w_j), \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) сразу же получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^N [(\nabla w_k, \nabla w_j) + (q+1)(|u_m|^q w_k, w_j)] c'_{mk} \\ + \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = \lambda(|u_m|^{p-2} u_m, w_j). \end{aligned}$$

Теперь в качестве галёркинских базиса в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ выберем собственные функции задачи (2.1). Введем обозначение

$$a_{kj} \equiv (\nabla w_k, \nabla w_j) + (q+1)(|u_m|^q w_k, w_j).$$

Имеем

$$\sum_{k,j=1,1}^{m,m} a_{kj} \xi_k \xi_j = \sum_{k,j=1,1}^{m,m} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \xi_k \xi_j + (q+1)(|u_m|^q, \eta^2), \quad \eta \equiv \sum_{l=1}^m w_l \xi_l.$$

Поскольку $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — галёркинский базис в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то $\det\{(\nabla w_k, \nabla w_j)\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$, поэтому в силу критерия Сильвестра (см., например, [40]) получаем $\det\{a_{kj}\}_{k,j=1,1}^{m,m} > 0$. Общие результаты о нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [41]) гарантируют существование решения задачи (2.3) на некотором интервале $[0, t_m]$, $t_m > 0$, в смысле $c_{km} \in C^{(1)}[0, t_m]$. В дальнейшем мы получим априорные оценки, из которых следует $t_m = T$, где T не зависит от m . Значит,

$$c_{km} \in C^{(1)}[0, T], \quad u_m \in C^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Займемся выводом априорных оценок.

Умножим обе части равенства (2.3) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p = \lambda \|u_m\|_p^p. \quad (2.4)$$

Отметим, что нормы

$$\left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}, \quad \left(\|v\|_p^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}$$

эквивалентны на пространстве $v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ (см., например, [39, с. 169]). Поэтому сразу же будем рассматривать пространство $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ с нормой

$$\left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Из (2.4) следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} + \int_0^t ds \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \\ &= \frac{1}{2} \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2} + \lambda \int_0^t \|u_m\|_p^p ds. \end{aligned}$$

В силу условий, сформулированных в теореме относительно p, q, N , и теорем вложения Соболева (см., например, [42, с. 100]) выполнено вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} & \|u_m\|_p \leq B_1 \|\nabla u_m\|_2, \\ & \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2} \\ & + \lambda B_1^p \int_0^t ds \left[\|\nabla u_m\|_2^2 + 2 \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \right]^{p/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Значит,

$$\begin{aligned} E_m(t) &\leq E_{m0} + B_2 \int_0^t ds E_m^{p/2}(s), \quad B_2 = \lambda B_1^p 2^{p/2}, \\ E_m(t) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С другой стороны, если $p \leq q+2$, то в силу ограниченности Ω имеем

$$\|u_m\|_p \leq B_3 \|u_m\|_{q+2},$$

стало быть,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2} \\ &+ \lambda B_3^p \int_0^t ds \left[\frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \frac{q+2}{q+1} + \frac{q+2}{q+1} \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 \right]^{p/(q+2)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$E_m(t) \leq E_{m0} + B_4 \int_0^t ds E_m^\alpha(s), \quad \alpha = \frac{p}{q+2}, \quad B_4 = \lambda B_3^p \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^{p/(q+2)},$$

причем в силу условий на $p > 2$ и $q \geq 0$ имеем $\alpha \in (0, 1]$.

Используя леммы Гронуолла–Беллмана и Бихари (см., например, [43]), получим

$$E_m(t) \leq [E_{m0}^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_4 t]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при} \quad \alpha = \frac{p}{q+2} < 1, \quad (2.8)$$

$$E_m(t) \leq E_{m0} \exp\{B_5 t\} \quad \text{при} \quad p = q+2, \quad B_5 = \lambda B_3^p \frac{q+2}{q+1}, \quad (2.9)$$

$$E_m(t) \leq E_{m0} \left[1 - \left(\frac{p}{2} - 1 \right) B_2 E_{m0}^{(p-2)/2} t \right]^{-2/(p-2)} \quad \text{при} \quad p > q+2, \quad B_2 = \lambda B_1^p 2^{p/2}. \quad (2.10)$$

Умножим теперь уравнение (2.3) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. Тогда после интегрирования по времени $s \in [0, t]$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \left[\|\nabla u'_m\|_2^2 + (q+1) \int_\Omega dx |u_m|^q (u'_m)^2 \right] + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p + \lambda \frac{1}{p} \|u_{m0}\|_p^p \\ = \lambda \frac{1}{p} \|u_m\|_p^p + \frac{1}{p} \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В силу условий теоремы $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^p(\Omega)$ из (2.11) получим

$$\int_0^t ds \left[\|\nabla u'_m\|_2^2 + (q+1) \int_\Omega dx |u_m|^q (u'_m)^2 \right] + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq C_1 + B_1^p \frac{\lambda}{p} \|\nabla u_m\|_2^p. \quad (2.12)$$

В силу того, что $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq C_1,$$

где C_1 не зависит от m . Отсюда и из (2.8)–(2.10) следует существование такого $T_0 > 0$, что справедливо неравенство

$$\|\nabla u_m\|_2 \leq A(t), \quad t \in [0, T], \quad T \in (0, T_0),$$

где A не зависит от m . Причем в случаях (2.8) и (2.9) $T_0 = +\infty$.

Таким образом, из (2.8)–(2.12) следует, что найдется такое $T_0 \equiv T_0(u_0, q, p)$, что для любого $T \in (0, T_0)$ выполнены следующие включения:

$$\begin{aligned} u_m & \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'_m & \text{ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial}{\partial t}(|u_m|^{q/2} u_m) & \text{ограничено в } \mathbb{L}^2(Q), \quad Q \equiv \Omega \times [0, T], \\ |u_m|^q u_m & \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)), \quad q' = \frac{q+2}{q+1}, \\ |u_m|^{p-2} u_m & \text{ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что $t_m = T$, где T не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$u_m = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) w_k \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Из включений (2.13) и результатов [39, с. 24] и [44, с. 180] приходим к выводу, что из последовательности u_m можно выделить такую подпоследовательность, которую мы снова обозначим через u_m , что

$$\begin{aligned} u_m & \rightharpoonup u \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \\ u'_m & \rightharpoonup u' \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \\ \Delta u_m & \rightharpoonup \Delta u \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}^{-1}(\Omega)), \\ -\Delta_p u_m & \rightharpoonup \chi \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{-1,p'}(\Omega)), \\ |u_m|^q u_m & \rightharpoonup w_q \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)), \quad q' = \frac{q+2}{q+1}, \\ |u_m|^{p-2} u_m & \rightharpoonup w_p \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда имеем $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$, $Q = [0, T] \times \Omega$, тогда в силу компактного вложения $\mathbb{H}^1(Q) \Subset \mathbb{L}^2(Q)$ приходим к выводу, что $u_m \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^2(Q)$, а значит, почти всюду (см., например, [15, с. 39]). Тогда в силу леммы 1.3 работы [39, с. 25] получим

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup |u|^q u \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{q'}(\Omega)), \quad q' = \frac{q+2}{q+1},$$

и, таким образом, $w_q = |u|^q u$ и, наконец,

$$|u_m|^{p-2} u_m \rightharpoonup |u|^{p-2} u \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Таким образом, $w_p = |u|^{p-2} u$. Из (2.13) следует, что

$$|u_m|^{q/2} u_m \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad u_m \in \mathbb{H}^1([0, T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)).$$

Используя сходимость последовательности

$$-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p'}(\Omega)),$$

докажем, что $\chi = -\Delta_p u$. С этой целью продолжим $u_m(t)$, $|u_m|^q u_m$, $|u_m|^{p-2} u_m$, $\Delta_p u_m$ на $\mathbb{R}^1$ нулем вне отрезка $[0, T]$. Соответствующие продолжения обозначим через $\tilde{u}_m(t)$, $|\tilde{u}_m|^q \tilde{u}_m$, $|\tilde{u}_m|^{p-2} \tilde{u}_m$, $\Delta_p \tilde{u}_m$. Из (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{u}'_m, w_j \rangle - \langle (|\tilde{u}_m|^q \tilde{u}_m)', w_j \rangle + \langle \Delta_p \tilde{u}_m, w_j \rangle &= -\lambda \langle |\tilde{u}_m|^{p-2} \tilde{u}_m, w_j \rangle \\ &+ \langle \Delta u_{m0}, w_j \rangle \delta(t-0) - \langle \Delta u_m(T), w_j \rangle \delta(t-T) \\ &- \langle |u_{m0}|^q u_{m0} \rangle \delta(t-0) + \langle |u_m|^q u_m(T) \rangle \delta(t-T). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Теперь мы можем перейти к пределу в (2.15) при $m \rightarrow +\infty$ и фиксированном j . Рассмотрим каждое слагаемое в (2.15). Из (2.13), (2.14) следует, что

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{u}'_m, w_j \rangle &\rightharpoonup \langle \Delta \tilde{u}', w_j \rangle \text{ слабо в } \mathbb{L}^2(0, T), \\ -\langle \Delta_p \tilde{u}_m, w_j \rangle &\rightharpoonup \langle \chi, w_j \rangle \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \\ \langle |\tilde{u}_m|^{p-2} \tilde{u}_m, w_j \rangle &\rightharpoonup \langle |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u}, w_j \rangle \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \\ \langle |\tilde{u}_m|^q \tilde{u}_m, w_j \rangle &\rightharpoonup \langle |\tilde{u}|^q \tilde{u}, w_j \rangle \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \\ \Delta \tilde{u}_{m0} &\rightharpoonup \Delta u_0 \text{ слабо в } \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ \Delta \tilde{u}_m(T) &\rightharpoonup \Delta u(T) \text{ слабо в } \mathbb{H}^{-1}(\Omega), \\ |\tilde{u}_{m0}|^q \tilde{u}_{m0} &\rightharpoonup |\tilde{u}_0|^q \tilde{u}_0 \text{ слабо в } \mathbb{L}^{q'}(\Omega), \quad q' = \frac{q+2}{q+1}, \\ |\tilde{u}_m|^q \tilde{u}_m(T) &\rightharpoonup |\tilde{u}|^q \tilde{u}(T) \text{ слабо в } \mathbb{L}^{q'}(\Omega), \quad q' = \frac{q+2}{q+1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (\Delta \tilde{u} - |\tilde{u}|^q \tilde{u}) - \chi + \lambda |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u}, w_j \rangle \\ = \langle (\Delta u_0 - |u_0|^q u_0) \delta(t-0) - (\Delta u(T) - |u|^q u(T)) \delta(t-T), w_j \rangle. \end{aligned}$$

Сужая на интервал $(0, T)$, мы получим, что

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta u - |u|^q u), w_j \rangle - \langle \chi, w_j \rangle + \lambda \langle |u|^{p-2} u, w_j \rangle = 0.$$

Отсюда сразу же получаем

$$\frac{d}{dt} (\Delta u - |u|^q u) - \chi + \lambda |u|^{p-2} u = 0. \quad (2.17)$$

В силу монотонности оператора $A(v) = -\Delta_p v$ относительно скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, справедливо следующее неравенство:

$$X_\mu \equiv \int_0^T dt \langle A(u_\mu) - A(v), u_\mu - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Согласно (2.3)

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle A(u_\mu), u_\mu \rangle dt &= -\lambda \int_0^T \|u_\mu\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u_{\mu 0}\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u_\mu(T)\|_2^2 \\ &+ \frac{q+1}{q+2} \|u_{\mu 0}\|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2} \|u_\mu(T)\|_{q+2}^{q+2}. \end{aligned}$$

Поскольку $u_\mu \rightharpoonup u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то в силу вложений $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \Subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega)$ имеем (см., например, [44, с. 180]).

$$\liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \|\nabla u_\mu(T)\|_2 \geq \|\nabla u(T)\|_2, \quad \liminf_{\mu \rightarrow +\infty} \|u_\mu(T)\|_{q+2}^{q+2} \geq \|u(T)\|_{q+2}^{q+2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} X_\mu &\leq \lambda \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \|u_\mu\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2 \\ &\quad + \frac{q+1}{q+2} \|u_0\|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2} \|u(T)\|_{q+2}^{q+2} - \int_0^T dt \langle \chi, v \rangle - \int_0^T dt \langle A(v), u-v \rangle. \end{aligned}$$

Докажем следующее предельное равенство:

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u_\mu \rangle = \int_0^T dt \|u\|_p^p.$$

Действительно,

$$\int_0^T dt \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u_\mu \rangle = \int_0^T dt \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u_\mu - u \rangle + \int_0^T dt \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u \rangle.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt |\langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u_\mu - u \rangle| &\leq \int_0^T dt \| |u_\mu|^{p-2} u_\mu \|_{p/(p-1)} \|u_\mu - u\|_p \\ &= \int_0^T dt \|u_\mu\|_p^{p-1} \|u_\mu - u\|_p \\ &\leq \left(\int_0^T dt \|u_\mu - u\|_p^p \right)^{1/p} \left(\int_0^T dt \|u_\mu\|_p^p \right)^{(p-1)/p} \rightarrow +0 \\ &\text{при } \mu \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

поскольку $u_\mu \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \Subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\Omega))$ и $u_\mu \rightharpoonup u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Кроме того, справедливо предельное равенство

$$\int_0^T dt \langle |u_\mu|^{p-2} u_\mu, u \rangle \rightarrow \int_0^T dt \|u\|_p^p,$$

поскольку

$$|u_\mu|^{p-2} u_\mu \rightharpoonup |u|^{p-2} u \text{ *-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^{p'}(\Omega)), \quad u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{L}^p(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} \limsup_{\mu \rightarrow +\infty} X_\mu &\leq \lambda \int_0^T dt \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_0\|_{q+2}^{q+2} \\ &\quad - \frac{q+1}{q+2} \|u(T)\|_{q+2}^{q+2} - \int_0^T dt \langle \chi, v \rangle - \int_0^T dt \langle A(v), u-v \rangle. \end{aligned}$$

Отметим, что $u \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, $u' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega))$ и в силу условий на p, q, N справедливы вложения

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \Subset \mathbb{H}_0^1(\Omega) \Subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega).$$

Умножим обе части уравнения (2.17) на u и проинтегрируем по частям, что возможно в силу следующих оценок:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt |\langle \Delta u', u \rangle| &\leq \left(\int_0^T dt \|\Delta u'\|_{-1}^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T dt \|u\|_{+1}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq T^{1/2} \sup_{t \in (0, T)} \|u\|_{+1}^2(t) \left(\int_0^T dt \|\Delta u'\|_{-1}^2 \right)^{1/2}, \\ \int_0^T dt |\langle [|u|^q u]', u \rangle| &\leq (q+1) \int_0^T dt \|u'\|_{q+2} \|u\|_{q+2}^{q+1} \\ &\leq (q+1) \left(\int_0^T dt \|u'\|_{q+2}^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T dt \|u\|_{q+2}^{2(q+1)} \right)^{1/2}, \\ \int_0^T dt |\langle \chi, u \rangle| &\leq \int_0^T dt \|\chi\|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)} \|u\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq T \sup_{t \in (0, T)} \|\chi\|_{\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)} \|u\|_{\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_+ \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}_0^1}$, $\|\cdot\|_- \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{H}^{-1}}$. Таким образом, из (2.17) получим

$$\int_0^T dt \langle \chi, u \rangle = \lambda \int_0^T dt \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_0\|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2} \|u(T)\|_{q+2}^{q+2}.$$

С другой стороны, в силу определения X_μ имеем

$$\int_0^T dt \langle \chi - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Положим $v = u - \gamma w$, $\gamma > 0$, $w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$. Тогда

$$\int_0^T dt \langle \chi - A(u - \gamma w), w \rangle \geq 0.$$

Устремляя $\gamma \rightarrow +0$, получим в силу теоремы Лебега, что

$$\int_0^T dt \langle \chi - A(u), w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Следовательно, $\chi = -\Delta_p u$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (2.3). Действительно,

$$\begin{aligned} (\nabla u'_m, \nabla w_j) &\rightharpoonup (\nabla u', \nabla w_j) \quad \text{*слабо в } \mathbb{L}^2(0, T), \\ (|u_m|^q u'_m, w_j) &\rightharpoonup (|u|^q u', w_j) \quad \text{*слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \\ \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) &\rightharpoonup \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{*слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T), \\ (|u_m|^{p-2} u_m, w_j) &\rightharpoonup (|u|^{p-2} u, w_j) \quad \text{*слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T). \end{aligned}$$

В результате из (2.3) получим

$$(\nabla u', \nabla v) + (q+1)(|u|^q u', v) + \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) - \lambda(|u|^{p-2} u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.18)$$

Из полученных результатов о принадлежности функциональным пространствам (2.14) приходим к выводу, что каждое слагаемое в левой части (1.7) заведомо принадлежит классу $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega))$, $p' = p/(p-1)$.

Тем самым разрешимость доказана.

Перейдем к доказательству единственности.

Пусть $u_j(t)$, $j = 1, 2$ — два решения задачи (2.3) с $q = 0$ в классах, сформулированных в условиях теоремы 1, с одним и тем же начальным условием и $w = u_1 - u_2$. Тогда в силу (2.18) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 + \|u_1 - u_2\|_2^2] + \int_0^t ds \langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &= \lambda \int_0^t ds \int_{\Omega} dx [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] [u_1 - u_2], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Кроме того, оператор $-\Delta_p$ монотонный относительно банаховых пространств $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Поэтому из (2.19) получим

$$\begin{aligned} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2 &\leq 2\lambda(p-1) \int_0^t ds \int_{\Omega} dx \max\{|u_1|^{p-2}, |u_2|^{p-2}\} |u_1 - u_2|^2 \\ &\leq 2\lambda(p-1) \int_0^t ds [\|u_1\|_p^{p-2} + \|u_2\|_p^{p-2}] \|u_1 - u_2\|_p^2 \\ &\leq C \int_0^t ds \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Отсюда в силу теоремы Гронвулла–Беллмана [43] получим

$$\|\nabla w\|_2 = 0 \quad \forall t \in [0, T),$$

что и доказывает единственность задачи **A** при условии $q = 0$.

Теорема полностью доказана.

3. Разрешимость в любом конечном цилиндре и “разрушение” за конечное время. Введем обозначения

$$\begin{aligned} E_m(t) &\equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2}, & E_{m0} &\equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2}, \\ E(t) &\equiv \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u\|_{q+2}^{q+2}, & E_{m0} &\equiv \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_0\|_{q+2}^{q+2}, \\ F_{m0} &\equiv \lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p, & F_0 &\equiv \lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p, \\ \alpha &\equiv \frac{p}{q+2}, & B_4 &\equiv \lambda B_3^p \left(\frac{q+2}{q+1} \right)^\alpha, & B_5 &\equiv \lambda B_3^p \frac{q+2}{q+1}, \\ B_2 &\equiv \lambda B_1^p 2^{p/2}, & \|v\|_p &\leq B_1 \|\nabla v\|_2, & \|w\|_p &\leq B_3 \|w\|_{q+2}. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, выполнено дополнительное условие $F_0 > 0$ для справедливости оценок снизу. Тогда существует решение задачи (2.18) такое, что в случае $q + 2 \geq p$ величина T_0 из теоремы 1 равна $+\infty$. Кроме этого, найдутся такие константы B_3 и B_4 , что

1) если $q + 2 > p$, то

$$\left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \frac{F_0}{E_0^\alpha} t \right]^{1/(1-\alpha)} \leq E(t) \leq [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) B_4 t]^{1/(1-\alpha)};$$

2) если $p = q + 2$, то

$$E_0 \exp \left\{ \frac{F_0}{E_0} t \right\} \leq E(t) \leq E_0 \exp \{ B_5 t \};$$

3) если же $p > q + 2$ (т.е. $\alpha > 1$), то найдется такое $T_0 = T_0(u_0)$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \sum_{i=1}^N \|\nabla u\|_2^2 = +\infty,$$

$$T_1 \equiv \frac{2}{p-2} \frac{E_0^{\frac{2}{p-2}}}{B_2} \leq T_0 \leq (\alpha-1)^{-1} \frac{E_0^\alpha}{F_0} \equiv T_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходим один вспомогательный результат относительно последовательности $\{u_m\}$ “галёркинских” приближений. Именно, докажем, что найдется подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ такая, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^p(Q), \quad Q \equiv (0, T) \times \Omega.$$

Обозначим

$$\mathbb{A}_i(v) \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Тогда

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}_i(u_m), u_m \rangle \leq - \sum_{j=1, i \neq j}^N \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_p^p + \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle,$$

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle \leq \lambda \int_0^T dt \|u\|_p^p + \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|\nabla u(T)\|_2^2$$

$$+ \frac{q+1}{q+2} \|u_0\|_{q+2}^{q+2} - \frac{q+1}{q+2} \|u(T)\|_{q+2}^{q+2} = - \int_0^T dt \langle \Delta_p u, u \rangle = \int_0^T dt \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p.$$

Значит,

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \leq \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p. \quad (3.1)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^p(Q), \quad Q \equiv (0, T) \times \Omega.$$

Значит,

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \geq \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \geq \int_0^T dt \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p. \quad (3.3)$$

В свою очередь, из (3.3) следует, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^p(Q), \quad i = \overline{1, N}, \quad Q \equiv (0, T) \times \Omega, \quad (3.4)$$

и нужное утверждение доказано.

Установим следующие цепочку неравенства:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} dx \langle \nabla u_m, \nabla u'_{mt} \rangle \right|^2 &\leq \|\nabla u_m\|_2^2 \|\nabla u'_{mt}\|_2^2, \\ \left| \int_{\Omega} dx |u_m|^q u_m u'_{mt} \right|^2 &\leq \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \int_{\Omega} dx |u_m|^q (u'_{mt})^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедлива также цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_m (-\Delta u_m + |u_m|^q u_m)'_t dx \right|^2 &\leq |(\nabla u_m, \nabla u'_{mt})|^2 + (q+1)^2 |(u_m|^q u_m, u'_{mt})|^2 \\ &\quad + 2(q+1) |(\nabla u_m, \nabla u'_{mt})| |(u_m|^q u_m, u'_{mt})| \\ &\leq \|\nabla u_m\|_2^2 \|\nabla u'_{mt}\|_2^2 + (q+1)^2 |(u_m|^q, (u'_{mt})^2)| \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \\ &\quad + 2(q+1) \|\nabla u_m\|_2 \|\nabla u'_{mt}\|_2 \sqrt{|(u_m|^q, (u'_{mt})^2)|} \|u_m\|_{q+2}^{(q+2)/2} \\ &\leq \left(\|\nabla u'_{mt}\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u_m|^q (u'_{mt})^2 \right) [\|\nabla u_m\|_2^2 + (q+1) \|u_m\|_{q+2}^{q+2}] \\ &\leq (q+2) \left[\|\nabla u'_{mt}\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u_m|^q (u'_{mt})^2 \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из неравенств (2.4) и (2.11) следует

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m\|_2^2 + \frac{q+1}{q+2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{q+2}^{q+2} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p = \lambda \|u_m\|_p^p, \quad (3.7)$$

$$\|\nabla u'_{mt}\|_2^2 + (q+1) \int_{\Omega} dx |u_m|^q (u'_{mt})^2 = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \left[\lambda \|u_m\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_p^p \right]. \quad (3.8)$$

Предположим, что

$$\lambda \|u_0\|_p^p > \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p.$$

Поскольку $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\lambda \|u_{m0}\|_p^p > \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p.$$

Из (3.5)–(3.8) получим

$$E_m \frac{d^2 E_m}{dt^2} - \frac{p}{q+2} \left(\frac{dE_m}{dt} \right)^2 \geq 0. \quad (3.9)$$

Пусть u_m – галёркинские приближения, определенные в (2.3). Поскольку $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, а последовательность $u_m \rightharpoonup u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то, переходя в (2.8) и (2.9) к пределу при $m \rightarrow +\infty$, с учетом того, что $E(t) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} E_m(t)$, получим

$$E(t) \leq [E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)B_4 t]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при } \alpha < 1, \quad (3.10)$$

$$E(t) \leq E_0 \exp\{B_5 t\} \quad \text{при } \alpha = 1. \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha > 1$.

Поскольку последовательность $u_{0m} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$, то имеем $E_{0m} \rightarrow E_0$. В этом случае из числовой последовательности $\{E_{0m}\}$ можно выделить либо монотонно неубывающую, либо монотонно невозрастающую подпоследовательность. Будем искомым подпоследовательностям последовательности $\{E_{0m}\}$ и соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ обозначать таким же образом. Рассмотрим неравенство (2.10). Предположим, что $\{E_{0m}\}$ – монотонно невозрастающая последовательность. Введем обозначение $\{E_{0n}^n\}$ – последовательность, полученная из $\{E_{0m}\}$ путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых, тогда неравенство (2.10) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, T_1^n]$, где $T_1^{\{N\}} \equiv 2/(p-2)B_2^{-1}E_{0n}^{2/(p-2)}$. Поскольку $u_m \rightharpoonup u$ *-слабо в $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$, то для всех таких t мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в (2.10) и получить, что

$$E(t) \leq E_0 \left[1 - \left(\frac{p}{2} - 1 \right) B_2 E_0^{(p-2)/2} t \right]^{-2/(p-2)} \quad \text{при } p > q+2, \quad B_2 = \lambda B_1^p 2^{p/2}. \quad (3.12)$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и того, что $T_1^n \uparrow T_1$ при $n \uparrow +\infty$, мы приходим к выводу, что (3.3) имеет место при $t \in [0, T_1]$ и, кроме того, $T_0 \geq T_1$. Пусть теперь $\{E_{0m}\}$ – монотонно неубывающая последовательность. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что (3.12) имеет место для всех $t \in [0, T_1]$ и $T_0 \geq T_1$. Итак, оценки (3.10)–(3.12) получены для всех возможных значений α .

Для дальнейшего нам необходимо доказать, что для почти всех $t \in [0, T]$ при любом $T \in (0, T_0)$ выполнено $E_m(t) \rightarrow E(t)$.

С этой целью заметим, что ранее мы получили (3.4), а значит, в силу вложения

$$\mathbb{L}^p(Q) \subset \mathbb{L}^2(Q), \quad Q = [0, T] \times \Omega \quad \forall T \in [0, T_0),$$

имеем

$$\int_0^t ds E_m(s) \rightarrow \int_0^t ds E(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \quad (3.13)$$

С другой стороны, при выполнении условий $q > 0$, $p > 2$ при $N = 1, 2$ и $0 < q < 4/(N-2)$, $p < 2N/(N-2)$ при $N \geq 3$ имеем компактное вложение $\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^{q+2}(Q)$ и

$\mathbb{H}^1(Q) \subset \mathbb{L}^p(Q)$, а последовательность u_m сходится слабо в $\mathbb{H}^1(Q)$. Стало быть, последовательность $u_m \rightarrow u$ сильно в

$$\mathbb{L}^{q+2}(Q) \cap \mathbb{L}^p(\Omega), \quad Q = [0, T] \times \Omega \quad \forall T \in (0, T_0).$$

Поскольку правая часть выражения для $E_m(t)$ сходится для любого $t \in [0, T]$, $T \in (0, T_0)$, к некоторой функции $\eta(t)$ и из доказательства теоремы 1 вытекает оценка $E_m(t) \leq C < +\infty$, где C не зависит ни от m , ни от t , то в силу теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла Лебега имеем $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$ для всех $T \in (0, T_0)$ и

$$\int_0^t E_m(s) ds \rightarrow \int_0^t ds \eta(s) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0). \quad (3.14)$$

Сравнивая (3.13) с (3.14), приходим к выводу, что

$$\int_0^t ds [E(s) - \eta(s)] = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0), \quad (3.15)$$

причем $E(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $\eta(t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$, поэтому, дифференцируя обе части равенства (3.15) в смысле Лебега на сегменте $[0, T]$ $\forall T \in (0, T_0)$, получим

$$\eta(t) = E(t) \quad \text{для почти всех } t \in [0, T], \quad \forall T \in (0, T_0).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что последовательность $E_m(t)$ при условиях на $q > 0$ и $p > 2$ сходится почти всюду к $E(t)$ на множестве $t \in [0, T]$ при любом $T \in (0, T_0)$.

Теперь рассмотрим обыкновенное дифференциальное неравенство (3.9) в трех случаях: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha$. Без ограничения общности мы можем считать, как и ранее, последовательность E_{0m} монотонной и положительной, тогда последовательность $E_m > 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $F_0 > 0$. Тогда найдется подпоследовательность последовательности F_{0m} такая, что $F_{m0} > 0$. В первом случае ($0 < \alpha < 1$) из (3.9) следует

$$\left(\frac{E'_m}{E_m^\alpha} \right)' \geq 0, \quad \frac{E'_m}{E_m^\alpha} \geq \frac{F_{m0}}{E_{m0}^\alpha}, \quad E_m(t) \geq \left[E_{m0}^{1-\alpha} + (1-\alpha) \frac{F_{m0}}{E_{m0}^\alpha} t \right]^{1/(1-\alpha)}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим теперь второй случай: $\alpha = 1$. Из (3.9) получаем

$$E_m'' E_m - (E'_m)^2 \geq 0, \quad \left(\ln \frac{E'_m}{E_m} \right)' \geq 0, \quad E_m(t) \geq E_{0m} \exp \left\{ \frac{F_{m0}}{E_{0m}} t \right\}. \quad (3.17)$$

Рассмотрим третий случай: $\alpha > 1$. Из (3.9) вытекает

$$\left(\frac{E'_m}{E_m^\alpha} \right)' \geq 0, \quad \frac{E'_m}{E_m^\alpha} \geq \frac{F_{m0}}{E_{m0}^\alpha}, \quad E_m \geq E_{0m} \left[1 - (\alpha - 1) \frac{F_{m0}}{E_{m0}^\alpha} t \right]^{-1/(\alpha-1)}. \quad (3.18)$$

В силу сильной сходимости $u_{0m} \rightarrow u_0$ в $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и из условий теоремы 1 $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^{q+2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^p(\Omega)$ получаем $E_{0m} \rightarrow E_0$ и $\|u_{0m}\|_{q+2} \rightarrow \|u_0\|_{q+2}$. С другой стороны, мы

установили, что $E_m(t) \rightarrow E(t)$ для почти всех $t \in [0, T_0)$. Поэтому, переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенствах (3.16) и (3.17), получим

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \left[E_0^{1-\alpha} + (1-\alpha) \frac{F_0}{E_0^\alpha} t \right]^{1/(1-\alpha)} \quad \text{при } \alpha \in (0, 1), \\ E(t) &\geq E_0 \exp \left\{ \frac{F_0}{E_0} t \right\} \quad \text{при } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Введем обозначение $K_{m0} = F_{m0}/E_{m0}^\alpha$. Без ограничения общности переходом к подпоследовательности мы можем считать последовательность $E_{m0} > 0$ равномерно по m , поскольку $E_0 > 0$. В силу сходимости последовательности $K_{m0} \rightarrow K_0$ при $m \rightarrow +\infty$ мы можем выбрать монотонно сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через K_{m0} . Соответствующие подпоследовательности последовательностей $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$ мы снова будем обозначать $\{u_{0m}\}$ и $\{u_m\}$. Перепишем (3.18) с учетом принятого обозначения:

$$E_m \geq E_{m0} [1 - (\alpha - 1) K_{m0} t]^{-1/(\alpha-1)}. \quad (3.19)$$

Пусть последовательность $\{K_{m0}\}$ монотонно неубывающая, тогда неравенство (3.19) имеет место равномерно по m для всех $t \in [0, (\alpha - 1)^{-1} K^{-1}]$, где $K = \sup_{m \in \mathbb{N}} K_{m0}$. Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$, для таких t в неравенстве (3.19) получим

$$E \geq E_0 [1 - (\alpha - 1) K_0 t]^{-1/(\alpha-1)} \quad \text{при } t \in [0, (\alpha - 1)^{-1} K^{-1}]. \quad (3.20)$$

Но $K = K_0$ в силу того, что последовательность K_{0m} монотонно неубывающая и сходящаяся к $K_0 \equiv F_0/E_0^\alpha$. Отсюда и из (3.20) сразу же получаем, что $T_0 \leq (\alpha - 1)^{-1} F_0/E_0^\alpha \equiv T_2$.

Пусть теперь последовательность $\{K_{m0}\}$ монотонно невозрастающая. Обозначим через $\{K_{m0}^{(n)}\}$ последовательность, полученную из последовательности $\{K_{m0}\}$ путем вычеркивания первых $n \in \mathbb{N}$ слагаемых. Сделаем предположение о том, что

$$T_0 > (\alpha - 1)^{-1} \frac{F_0}{E_0^\alpha} \equiv T_2, \quad (3.21)$$

и пусть, кроме того, $M \equiv \sup_{t \in [0, T_2]} E(t) < +\infty$. Тогда (3.19) имеет место равномерно по $t \in [0, (\alpha - 1)^{-1} K_{0n}^{-1}]$. Переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (3.19), получим в силу сделанного предположения относительно T_0 следующее неравенство:

$$E_0 [1 - (\alpha - 1) K_0 t]^{-1/(\alpha-1)} \leq M < +\infty \quad \text{при } t \in [0, (\alpha - 1)^{-1} K_{0n}^{-1}]. \quad (3.22)$$

Однако в силу того, что $K_{0n} \searrow K_0$ при $n \rightarrow +\infty$, найдутся такое $n \in \mathbb{N}$ и такое $t_n \in (0, (\alpha - 1)^{-1} K_{0n}^{-1})$, что (3.22) потеряет смысл. Значит, наше предположение (3.21) не выполняется. Отсюда сразу же выводим, что при $\alpha > 1$

$$T_0 \leq (\alpha - 1)^{-1} \frac{E_0^\alpha}{F_0} \equiv T_2. \quad (3.23)$$

Последний результат означает, что при $\alpha > 1$ происходит разрушение решения за конечное время T_0 , для которого получена явная оценка сверху (3.23) через данные задачи.

Теорема 2 доказана полностью.

4. Оптимальные оценки сверху и снизу на скорость “разрушения” решения в случае $q = 0$. В случае $q = 0$ можно получить оптимальные двусторонние оценки на скорость разрушения решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, $q = 0$ и $F_0 > 0$. Тогда найдется такое $T_0 > 0$, что

$$\frac{b_1}{(T_0 - t)^{2/(p-2)}} \leq \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \leq \frac{b_2}{(T_0 - t)^{2/(p-2)}}, \quad t \in [0, T_0), \quad p > 2, \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{(p-2)\lambda B_1^p [\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2]^{(p-2)/2}} \leq T_0 \leq \frac{\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2}{(p-2)[\lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\|_p^p]}, \quad (4.2)$$

где

$$b_1 \equiv [(p-2)\lambda B_1^p]^{-2/(p-2)}, \quad b_2 \equiv \frac{[\lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\|_p^p]^2}{[(p-2)[\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2]^p},$$

$$F_0 \equiv \lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u_0}{\partial x_i}\|_p^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$U_m(s, x) \equiv \frac{u_m(s\gamma_m + t^*, x)}{M_m(t^*)}, \quad \gamma_m \equiv \frac{1}{M_m^{q_1}(t^*)}, \quad q_1 = p-2,$$

$$M_m(t^*) \equiv \sqrt{\|\nabla u_m\|_2^2 + \|u_m\|_2^2},$$

где t^* – фиксированный момент времени из интервала $[0, T_0)$. Нетрудно убедиться, что введенная функция $U_m(s, x)$ является решением следующей задачи:

$$\left(\nabla \frac{\partial U_m}{\partial s}, \nabla w_j \right) + \left(\frac{\partial U_m}{\partial s}, w_j \right) + \sum_{i=1}^N \left(\left| \frac{\partial U_m}{\partial x_i} \right|^{q_1} \frac{\partial U_m}{\partial x_i}, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) = \lambda (|U_m|^{q_1} U_m, w_j), \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.3)$$

$$U_m \left(-\frac{t^*}{\gamma_m} \right) \equiv U_{m0}, \quad U_{m0} \equiv \frac{u_{m0}}{M_m(t^*)} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_{mk}}{M_m(t^*)} w_k,$$

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^m \alpha_{mk} w_k \rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Докажем, что найдутся такие $c_{1m}, c_{2m} \in (0, +\infty)$, что

$$0 < c_{2m} \leq \frac{d}{ds} [\|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2]^{1/2} \Big|_{s=0} \leq c_{1m} < +\infty. \quad (4.4)$$

Отметим, что для задачи (4.3) справедливо энергетическое равенство (3.7), из которого следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [\|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2]^{1/2} |_{s=0} \\ \leq \lambda \|U_m\|_p^p |_{s=0} \leq \lambda B_1^p [\|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2]^{p/2} |_{s=0} = \lambda B_1^p \equiv c_{1m}, \\ B_1: \|v\|_p \leq \|\nabla v\|_2, \\ \frac{d}{ds} [\|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2]^{1/2} |_{s=0} \leq c_{1m}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Пусть теперь $\varphi_m \equiv \|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2$. Для функции $\varphi_m(s)$ справедливо неравенство вида (3.9):

$$\varphi_m \frac{d^2 \varphi_m}{ds^2} - \alpha \left(\frac{d\varphi_m}{ds} \right)^2 \geq 0, \quad \alpha \equiv \frac{p}{2}. \quad (4.6)$$

Интегрируя дифференциальное неравенство (4.6) по $s \in (-t^*/\gamma, t)$, получим

$$\frac{d\varphi_m}{ds} \frac{1}{\varphi_m^\alpha} \Big|_{t=s} \geq 2 \frac{\lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\partial u_{m0}/\partial x_i\|_p^p}{[\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \|u_{m0}\|_2^2]^{p/2}}. \quad (4.7)$$

Теперь воспользуемся тем, что по условию теоремы 2

$$\lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p > 0,$$

поэтому найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_{m0}\}$, что

$$\lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p > 0.$$

Из (4.7) следует

$$\frac{d}{ds} [\|\nabla U_m\|_2^2 + \|U_m\|_2^2]^{1/2} \geq \frac{\lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i} \right\|_p^p}{[\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \|u_{m0}\|_2^2]^{p/2}} \equiv c_{2m} > 0.$$

Тем самым, неравенство (4.4) доказано. Неравенство (4.4) эквивалентно следующему неравенству:

$$0 < c_{2m} \leq \frac{1}{M_m(t^*)^{p-1}} \frac{dM_m(t^*)}{dt^*} \leq c_{1m} < +\infty, \quad p > 2, \quad (4.8)$$

где

$$c_{2m} \equiv \frac{\lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\partial u_{m0}/\partial x_i\|_p^p}{[\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \|u_{m0}\|_2^2]^{p/2}}, \quad c_{1m} \equiv \lambda B_1^p, \quad B_1 \text{ такое, что } \|v\|_p \leq \|\nabla v\|_2.$$

Интегрируя (4.8) по t^* в пределах от t до T_{m0} :

$$\limsup_{t^* \uparrow T_{m0}} M_m(t^*) = +\infty,$$

получим

$$\begin{aligned} [(p-2)c_{1m}]^{-1/(p-2)} &\leq M_m(t)(T_{m0}-t)^{1/(p-2)} \\ &\leq [(p-2)c_{2m}]^{-1/(p-2)}, \quad t \in [0, T_{m0}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

При этом справедливы следующие оценки снизу и сверху на время разрушения T_{m0} :

$$A_{1m} \leq T_{m0} \leq A_{2m},$$

где

$$\begin{aligned} A_{1m} &\equiv \frac{1}{(p-2)\lambda B_1^p [\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \|u_{m0}\|_2^2]^{(p-2)/2}}, \\ A_{2m} &\equiv \frac{\|\nabla u_{m0}\|_2^2 + \|u_{m0}\|_2^2}{(p-2)[\lambda \|u_{m0}\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u_{m0}}{\partial x_i}\|_p^p]}. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что найдутся такие постоянные $0 < A_1, A_2 < +\infty$, не зависящие от $m \in \mathbb{N}$, что

$$0 < A_1 \leq T_{m0} \leq A_2 < +\infty.$$

Пусть $T_0 \equiv \liminf_{m \rightarrow +\infty} T_{m0}$. Тогда найдется такая подпоследовательность последовательности $\{T_{m0}\}$, что либо $T_{m0} \uparrow T_0$, либо $T_{m0} \downarrow T_0$.

Рассмотрим сначала случай $T_{m0} \uparrow T_0$. Тогда для любого фиксированного $\bar{m} \in \mathbb{N}$ можно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (4.9) равномерно по $t \in [0, T_{\bar{m}0}]$, и тогда получим

$$[(p-2)c_1]^{-1/(p-2)} \leq M(t)[T_0 - t]^{1/(p-2)} \leq [(p-2)c_2]^{-1/(p-2)} \quad \forall t \in [0, T_{\bar{m}0}), \quad (4.10)$$

где

$$c_1 \equiv \lambda B_1^p, \quad c_2 \equiv \frac{\lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \|\partial u_0 / \partial x_i\|_p^p}{[\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2]^{p/2}}.$$

Рассмотрим теперь случай $T_{m0} \downarrow T_0$. Тогда мы можем перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в неравенстве (4.9) равномерно по $t \in [0, T_0]$ и снова получим (4.10). Теорема доказана.

5. Заключение. Отметим, что используемая нами техника без существенных изменений переносится на случай, когда под Δ_p , $p > 2$, понимается оператор $\Delta_p v \equiv \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2} \nabla v)$. Кроме того, с точки зрения физики полупроводников естественным является значение $p = 4$ и соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - |u|^q u) + \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \nabla u) + \lambda u^3 = 0, \quad \lambda > 0.$$

Отметим также, что используемое нами в теоремах 2 и 3 в части результатов о “разрушении” дополнительное условие на λ

$$F_0 \equiv \lambda \|u_0\|_p^p - \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right\|_p^p > 0$$

является в известном смысле оптимальным, поскольку решения задачи

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0, \quad u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad p > 2, \quad (5.1)$$

на собственные функции и собственные значения являются, очевидно, стационарными, а, значит, глобальными во времени решениями задачи **A**, и для начальных функций $u_0 \neq 0$ на множестве положительной меры, удовлетворяющих задаче (5.1) при некотором $\lambda > 0$, имеет место очевидное равенство $F_0 = 0$. По поводу задачи (5.1) см. работы [45], [46], а также библиографию к этим работам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
- [2] Басс Ф. Г., Бочков В. С., Гуревич Ю. С. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках. М.: Наука, 1984.
- [3] Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрешимости сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 7. С. 944–962.
- [4] Корпусов М. О. “Разрушение” решения псевдопараболического уравнения с производной по времени от нелинейного эллиптического оператора // ЖВМиМФ. 2003. Т. 42. № 12. С. 1717–1724.
- [5] Корпусов М. О. Глобальная разрешимость и разрушение за конечное время решений нелинейных уравнений псевдопараболического типа // ЖВМиМФ. 2002. Т. 42. № 6. С. 849–866.
- [6] Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
- [7] Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. № 5. С. 1130–1145.
- [8] Свиридюк Г. А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 5. С. 216–237.
- [9] Свиридюк Г. А., Семенова И. Н. О разрешимости неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1607–1613.
- [10] Свиридюк Г. А., Казак В. А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 2. С. 292–297.
- [11] В. Е. Федоров (ред.) Уравнения соболевского типа. Сборник научных работ. Челябинск: Челябин. гос. ун-т, 2002.
- [12] Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
- [13] Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.
- [14] Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
- [15] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [16] Stefanelli U. On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations // Differential Integral Equations. 2002. V. 15. № 8. P. 897–922.
- [17] Showalter R. E. Monotone operators in Banach space and nonlinear differential equations. Volume 49 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 1997.
- [18] Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. Киев: Наукова думка, 1998.
- [19] Кожанов А. И. Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником // Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 5. С. 1062–1073.
- [20] Кожанов А. И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70.
- [21] Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
- [22] Корпусов М. О., Свешников А. Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
- [23] Гладков А. Л. Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 356.
- [24] Габов С. А., Свешников А. Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
- [25] Плетнер Ю. Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
- [26] Пятков С. Г. Краевые задачи для некоторых уравнений и систем, возникающих в теории электрических цепей // Актуальные вопросы современной математики. 1995. № 1. С. 121–133.

- [27] Guowang C., Shubin W. Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order // *Comm. Math. Univ. Carolinae*. 1995. V. 36. №3. P. 475–487.
- [28] Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Физматгиз, 1998.
- [29] Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // *J. Fac. Univ. Tokyo*. 1966. Sect. IA. V. 13. P. 109–124.
- [30] Levine H. A. Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ // *Arch. Rational. Mech. Analys.* 1973. V. 51. P. 371–386.
- [31] Amann H., Fila M. A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition // *Acta Math. Univ. Comenianae*. 1997. V. 66. №2. P. 321–328.
- [32] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
- [33] Rossi J. D. The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition // *Acta Math. Univ. Comenianae*. 1998. V. 67. №2. P. 343–350.
- [34] Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа // *ЖВМиМФ*. 2000. Т. 40. №11. С. 1647–1654.
- [35] Корпусов М. О. К вопросу о разрушении за конечное время решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения $Au_t = F(u)$ // *Дифференц. уравнения*. 2002. Т. 38. №12. С. 1–6.
- [36] Egorov Yu. V., Kondratiev V. A. On blow-up solutions for parabolic equations of second order // *Differential Equations, Asymptotic Analysis and Mathematical Physics* / ed. M. Demuth, B.-W. Shulxe. Serie: Mathematical Research, 100. Berlin: Akademie Verlag, 1997. P. 77–84.
- [37] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // *Тр. МИАН*. 2001. Т. 234. С. 3–383.
- [38] Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // *Тр. МИАН*. 2001. Т. 232. С. 223–235.
- [39] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [40] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр 2. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
- [41] Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
- [42] Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. М.: Наука, 1988.
- [43] Демидович В. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [44] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [45] Похожаев С. И. О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач // *Матем. сб.* 1970. Т. 82. №2. С. 192–212.
- [46] Lindqvist P. On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \lambda |u|^{p-2} u = 0$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1990. V. 109. P. 157–164.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: korpusov@rsci.ru
 agsveshn@math380b.phys.msu.su

Поступило
 28.10.2003