Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мисяков, О некоторых обобщениях радикала идеала и радикала подмодуля, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 900–907

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2762>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 09:08:49

УДК 512.552.12+512.553.12

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ РАДИКАЛА ИДЕАЛА И РАДИКАЛА ПОДМОДУЛЯ

В. М. Мисяков

В статье обобщаются понятия радикала идеала и радикала подмодуля и даются их описания.

Библиография: 4 названия.

В теории коммутативных колец хорошо известно понятие радикала идеала [1]. Напомним, что если I – идеал в коммутативном кольце S с единицей, то *радикалом* идеала I называют множество

$$\sqrt{I} = \{a \in S \mid \exists n \in \mathbb{N}, a^n \in I\},$$

которое также является идеалом. В этом определении на элемент a действует аддитивный эндоморфизм a^{n-1} кольца S . В связи с этим возникает вопрос: какие аддитивные эндоморфизмы $\varphi \in E(S)$ и какой идеал I нужно выбрать в произвольном кольце S с единицей, чтобы множество

$$I' = \{a \in S \mid \exists 0 \neq \varphi \in E(S), \varphi(a) \in I\}$$

было идеалом в S . Как будет отмечено (п. 1, свойство 1) а)) I должен быть вполне характеристическим идеалом (т.е. таким идеалом, который отображается в себя при любом аддитивном эндоморфизме кольца [2]), а ненулевые эндоморфизмы должны выбираться из центра кольца аддитивных эндоморфизмов, который должен в свою очередь быть областью целостности. Таким образом, с каждым вполне характеристическим идеалом I произвольного кольца S с единицей будем связывать вполне характеристический идеал

$$\tilde{I} = \{a \in S \mid \exists 0 \neq \varphi \in C(E(S)), \varphi(a) \in I\},$$

который будем называть *обобщенным радикалом* идеала I . В теореме 1.3 приводятся некоторые необходимые и достаточные условия, описывающие данный объект.

В п. 2, рассматривая модули над произвольным кольцом с единицей, у которых центры колец эндоморфизмов являются областями целостности, мы вводим понятие обобщенного радикала для вполне инвариантного подмодуля (т.е. такого подмодуля, который отображается в себя при любом эндоморфизме модуля [3]). Причем, ограничения

на центр кольца эндоморфизмов и на подмодуль необходимы для того, чтобы обобщенный радикал подмодуля был также подмодулем данного модуля. Стремление избавиться от ограничения на подмодуль, состоящего в том, что он является вполне инвариантным, приводит к понятиям s -модуля и слабого радикала для произвольного подмодуля этого модуля. В теоремах 2.3 и 2.6 описываются обобщенные радикалы вполне инвариантных подмодулей и слабые радикалы подмодулей в соответствующих модулях.

Поскольку каждое кольцо можно рассматривать как левый модуль над своим кольцом эндоморфизмов, причем подмодулями такого модуля являются в точности вполне характеристические идеалы данного кольца, то изучение вполне характеристических идеалов произвольного кольца S с единицей входит в общую проблему изучения структуры подмодулей произвольного модуля. Изучение модулей из п. 2 данной работы тесно связано с проблемами описания абелевых групп, которые имеют специальные кольца эндоморфизмов или специальные центры колец эндоморфизмов. Таких, например, как

[4, проблема 14 (Фукс)]: Какие группы без кручения (группы без кручения конечного ранга) имеют следующие кольца эндоморфизмов: а) нётеровы; б) коммутативные; в) локальные; г) полулокальные?

[4, проблема 16]: Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?

1. Обобщенный радикал вполне характеристического идеала. Введем некоторые обозначения. Всюду в данном пункте через S будем обозначать ненулевое ассоциативное кольцо с единицей, через $E(S)$ – кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы, через $C(S)$ и $C(E(S))$ – центры соответствующих колец, причем $C(E(S))$ здесь является областью целостности [2]. Пусть также S_{cc} есть множество всех вполне характеристических идеалов кольца S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $I \in S_{cc}$, тогда множество

$$\tilde{I} = \{a \in S \mid \exists 0 \neq \varphi \in C(E(S)), \varphi(a) \in I\}$$

будем называть *обобщенным радикалом* идеала I .

Если $a \in S$, то обозначим через R_a и L_a такие эндоморфизмы кольца S , что

$$R_a(x) = xa, \quad L_a(x) = ax \quad \text{для } x \in S.$$

Для кольца S справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Пусть $A \in S_{cc}$. Тогда

- а) $\tilde{\tilde{A}} \in S_{cc}$;
- б) $A \subseteq \tilde{\tilde{A}}$;
- в) $\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \tilde{\tilde{A}}$.

Свойство 2. Пусть $A, B \in S_{cc}$. Тогда

- а) если $A \subseteq B$, то $\tilde{\tilde{A}} \subseteq \tilde{\tilde{B}}$;
- б) если $A \subseteq \tilde{\tilde{B}} \subseteq \tilde{\tilde{A}}$, то $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{\tilde{B}}$;
- в) $\tilde{\tilde{A}} \cap \tilde{\tilde{B}} = \tilde{\tilde{A \cap B}}$;
- г) $\widetilde{\tilde{A + B}} = \widetilde{\tilde{A} + \tilde{\tilde{B}}}$.

Свойство 3. *Имеет место равенство $\widetilde{(0)} = \sum_{0 \neq \varphi \in C(E(S))} \text{Ker}(\varphi)$.*

Свойства 1–3 легко доказываются, исходя из определения обобщенного радикала вполне характеристического идеала. Также из определения вытекает, что для своего вполне характеристического идеала обобщенный радикал определяется однозначно.

Пусть A – подкольцо кольца S . Тогда обозначим через $L_A = \{L_a \in E(S) \mid a \in A\}$ подкольцо в $E(S)$, изоморфное подкольцу A .

В следующем утверждении рассмотрим кольцо S без ограничения на его центр кольца эндоморфизмов.

ЛЕММА 1.2. *Для кольца S следующие утверждения справедливы:*

- 1) $\varphi \equiv L_{\varphi(1)} \equiv R_{\varphi(1)}$ для любого $\varphi \in C(E(S))$;
- 2) $\varphi(1) \in C(S)$ для любого $\varphi \in C(E(S))$;
- 3) если $\varphi \in C(E(S))$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi \equiv 0$;
- 4) $C(E(S)) \cong \{\varphi(1) \mid \varphi \in C(E(S))\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in S$ и $\varphi \in C(E(S))$. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi(R_x(1)) = R_x(\varphi(1)) = L_{\varphi(1)}(x)$$

(аналогично для $R_{\varphi(1)}$). Очевидно, что из 1) $\implies$ 2) и 1) $\implies$ 3).

4) Рассмотрим множество $D = \{\varphi(1) \mid \varphi \in C(E(S))\}$ и построим отображение $\eta: C(E(S)) \rightarrow D$ по правилу $\eta(\varphi) = \varphi(1)$. Пусть $\varphi, \psi \in C(E(S))$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta(\varphi\psi) &= (\varphi\psi)(1) = (\psi\varphi)(1) = \psi(\varphi(1) \cdot 1) = \psi(L_{\varphi(1)}(1)) \\ &= L_{\varphi(1)}(\psi(1)) = \varphi(1)\psi(1) = \eta(\varphi)\eta(\psi). \end{aligned}$$

Инъективность для η следует из 3), остальные свойства изоморфизма также очевидны.

ТЕОРЕМА 1.3. I) *Для собственного вполне характеристического идеала A кольца S следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\tilde{A} = S$;
- 2) существует вполне характеристический идеал B такой, что $B \subseteq \tilde{A}$ и $\tilde{B} = S$;
- 3) существует максимальный вполне характеристический идеал B такой, что $B \subseteq \tilde{A}$ и $B \neq \tilde{B}$;
- 4) $L_A \cap C(E(S)) \neq 0$;
- 5) $A \cap D \neq 0$, где $D \subseteq C(S)$ и $D \cong C(E(S))$;
- 6) $\nu(1) \in A$ для некоторого $0 \neq \nu \in C(E(S))$.

II) *Для $A \in S_{cc}$ такого, что $A \neq S$, следующие условия эквивалентны:*

- 1) $A = \tilde{A}$;
- 2) $\varphi(1) \notin A$ для любого $0 \neq \varphi \in C(E(S))$ и $\tilde{A}/A$ – кольцо без делителей нуля.

III) *Для $A \in S_{cc}$ такого, что $A \neq S$, следующие условия эквивалентны:*

- 1) $A \subset \tilde{A} \subset S$;
- 2) для любого $0 \neq \varphi \in C(E(S))$ следует, что $\varphi(1) \notin A$, и $\tilde{A}/A$ – кольцо с делителями нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) 1) $\implies$ 2). В качестве идеала B можно взять сам идеал A . Доказательство импликации 2) $\implies$ 1) вытекает из свойств.

1) $\implies$ 3). Пусть $\tilde{A} = S$, тогда вполне характеристический идеал A можно вложить в некоторый максимальный вполне характеристический идеал B кольца S . Поскольку $A \subseteq B \subseteq \tilde{A}$, то $\tilde{A} = \tilde{B}$ и $B \neq \tilde{B}$.

3) $\implies$ 1). Пусть B – максимальный вполне характеристический идеал в кольце S такой, что $B \subseteq \tilde{A}$ и $B \neq \tilde{B}$. Тогда $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ и $S = \tilde{B} \subseteq \tilde{A}$.

1) $\implies$ 4). Это следует из леммы 1.2. Докажем 4) $\implies$ 1). Пусть $L_A \cap C(E(S)) \neq 0$, т.е. существует $0 \neq L_a \in L_A \cap C(E(S))$. Тогда $L_a(r) = ar \in A$ и $r \in \tilde{A}$ для $r \in S$.

Эквивалентность условий 4) и 5) получим из леммы 1.2.

Очевидно, что 1) $\implies$ 6). Покажем, что 6) $\implies$ 1). Пусть существует $0 \neq \nu \in C(E(S))$ такое, что $\nu(1) \in A$. Тогда

$$\nu(x) = \nu(x \cdot 1) = \nu(L_x(1)) = L_x(\nu(1)) \in A \quad \text{для } x \in S,$$

т.е. $x \in \tilde{A}$.

II) 2) $\implies$ 1). Рассмотрим произвольное $x \in \tilde{A}$. Тогда существует $0 \neq \varphi \in C(E(S))$ такое, что $\varphi(x) \in A$. Поскольку

$$\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(L_x(1)) = L_x(\varphi(1)) = x\varphi(1) \in A,$$

то $\overline{x\varphi(1)} = \bar{0} = \bar{x} \cdot \overline{\varphi(1)}$ в факторкольце $\tilde{A}/A$. Так как $\varphi(1) \notin A$, то $\overline{\varphi(1)} \neq \bar{0}$ и $x \in A$. Очевидно, что 1) $\implies$ 2).

Эквивалентность условий из III) вытекает из I) и II).

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Обобщенный радикал $\widetilde{(0)} \neq S$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Для кольца S следующие условия равносильны:*

- 1) $\widetilde{(0)} = \widetilde{(0)}$;
- 2) $\widetilde{(0)}$ – кольцо без делителей нуля;
- 3) каждый ненулевой эндоморфизм из $C(E(S))$ является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi(1) \neq 0$ для любого $0 \neq \varphi \in C(E(S))$, то равносильность условий 1) и 2) получаем из II) предыдущей теоремы. Эквивалентность условий 1) и 3) следует из свойства 3.

Идеал, удовлетворяющий эквивалентным условиям I) теоремы 1.3, будем называть **t-идеалом**. Если $a \in S$, то $E(S)a = \{\varphi(a) \mid \varphi \in E(S)\}$ является минимальным вполне характеристическим идеалом, содержащим элемент a .

Пусть в следующем утверждении $D \subseteq C(S)$ и $D \cong C(E(S))$.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. *В кольце S существует t-идеал тогда и только тогда, когда существует элемент $0 \neq a \in D$ такой, что $E(S)a \neq S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – t-идеал в S , и допустим, что для любого $0 \neq a \in D$ выполнено $E(S)a = S$. Тогда для некоторого элемента $0 \neq b \in A \cap D$ имеем $S = E(S)b \subseteq A$, что противоречит собственности идеала A . Обратное утверждение очевидно.

2. Обобщенный и слабый радикалы подмодуля. Пусть S – ассоциативное кольцо с единицей и A – правый S -модуль, обозначим через $\text{End}_S(A)$ кольцо его эндоморфизмов, а через $\text{Lat}(A)$ (соответственно $A_{\text{ф}}$) – множество подмодулей (соответственно вполне инвариантных подмодулей) модуля A . Если A – модуль, у которого $C(\text{End}_S(A))$ является областью целостности, то такой модуль A будем называть *cerd*-модулем (the center of endomorphism ring is a domain). Если B – подмодуль модуля A , то фактормодуль A/B также рассматривается над кольцом S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть A – *cerd*-модуль и $B \in A_{\text{ф}}$. Множество

$$\widetilde{B} = \{a \in A \mid \exists 0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A)), \varphi(a) \in B\}$$

будем называть *обобщенным радикалом подмодуля B* .

Для *cerd*-модуля A справедливы следующие свойства.

Свойство 1. Пусть $B \in A_{\text{ф}}$. Тогда

- а) $\widetilde{B} \in A_{\text{ф}}$;
- б) $B \subseteq \widetilde{B}$;
- в) $\widetilde{\widetilde{B}} = \widetilde{B}$.

Свойство 2. Пусть $B, C \in A_{\text{ф}}$. Тогда

- а) если $B \subseteq C$, то $\widetilde{B} \subseteq \widetilde{C}$;
- б) если $B \subseteq C \subseteq \widetilde{B}$, то $\widetilde{B} = \widetilde{C}$;
- в) $\widetilde{B} \cap \widetilde{C} = \widetilde{B \cap C}$;
- г) $\widetilde{B + C} = \widetilde{B} + \widetilde{C}$.

Свойство 3. Имеет место равенство $\widetilde{(0)} = \sum_{0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A))} \text{Ker}(\varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть B – подмодуль модуля A . Будем говорить, что эндоморфизм $\psi \in \text{End}_S(A/B)$ можно поднять до центрального эндоморфизма по подмодулю B и обозначать ψ_B , если существует эндоморфизм $0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A))$ такой, что $\varphi(B) \subseteq B$ и $\psi(\bar{a}) = \varphi(a) + B$ для любого $\bar{a} \in A/B$.

Следующее утверждение дает некоторое описание обобщенного радикала вполне инвариантного подмодуля произвольного *cerd*-модуля A .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть A – *cerd*-модуль и $B \in A_{\text{ф}}$ такой, что $B \neq A$.

I) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\widetilde{B} = A$;
- 2) существует подмодуль D такой, что $D \subseteq \widetilde{B}$ и $\widetilde{D} = A$;
- 3) $A/B = \sum_{\psi_B \in \text{End}_S(A/B)} \text{Ker}(\psi_B)$.

II) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\widetilde{B} = B$;
- 2) всякий эндоморфизм $0 \neq \psi_B \in \text{End}_S(A/B)$ является мономорфизмом.

III) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $B \subset \widetilde{B} \subset A$;

- 2) существует эндоморфизм $0 \neq \psi_B \in \text{End}_S(A/B)$, не являющийся мономорфизмом, и

$$A/B \neq \sum_{\psi_B \in \text{End}_S(A/B)} \text{Ker}(\psi_B).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Эквивалентность условий 1) и 2) доказывается так же, как доказывается эквивалентность аналогичных условий в теореме 1.3.

1) $\implies$ 3). Пусть $\bar{a} \in A/B$, тогда для элемента $a \in \bar{a}$ существует $0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A))$ такой, что $\varphi(a) \in B$. Поскольку B – вполне инвариантный подмодуль, то эндоморфизм φ будет индуцировать эндоморфизм $\psi \in \text{End}_S(A/B)$ такой, что $\psi(\bar{d}) = \varphi(d) + B$ для любого $\bar{d} \in A/B$. Тогда ψ поднимается до центрального эндоморфизма по подмодулю B и

$$\bar{a} \in \text{Ker}(\psi_B) \subseteq \sum_{\psi_B \in \text{End}_S(A/B)} \text{Ker}(\psi_B).$$

3) $\implies$ 1). Поскольку $B \subseteq \tilde{B}$, то достаточно рассмотреть случай, когда $a \in A \setminus B$, т.е. $\bar{0} \neq \bar{a} \in A/B$. Тогда по условию $\bar{a} = \overline{a_1} + \dots + \overline{a_k}$, где $\overline{a_i} \in \text{Ker}((\psi_i)_B)$ для любого $i = 1, \dots, k$. Поскольку для каждого $i = 1, \dots, k$ найдется $0 \neq \varphi_i \in C(\text{End}_S(A))$ такое, что $(\psi_i)_B(\overline{a_i}) = \varphi_i(a_i) + B$, то $\varphi_i(a_i) \in B$ для любого $i = 1, \dots, k$, выполнено $0 \neq \varphi_1 \dots \varphi_k \in C(\text{End}_S(A))$ и существует индуцированный эндоморфизм $\psi \in \text{End}_S(A/B)$, обладающий свойством $\psi(\bar{x}) = (\varphi_1 \dots \varphi_k)(x) + B$ для любого $\bar{x} \in A/B$. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \dots \varphi_k)(a) + B &= \psi(\bar{a}) = \psi(\overline{a_1}) + \dots + \psi(\overline{a_k}) \\ &= ((\varphi_1 \dots \varphi_k)(a_1) + B) + \dots + ((\varphi_1 \dots \varphi_k)(a_k) + B) \\ &= ((\varphi_2 \dots \varphi_k)(\varphi_1(a_1)) + B) + \dots + ((\varphi_1 \dots \varphi_{k-1})(\varphi_k(a_k)) + B) = \bar{0} \end{aligned}$$

и, следовательно, $(\varphi_1 \dots \varphi_k)(a) \in B$. Поэтому $a \in \tilde{B}$ и $\tilde{B} = A$.

II) 1) $\implies$ 2). Пусть ψ_B – произвольный ненулевой эндоморфизм, который поднимается до центрального эндоморфизма по подмодулю B . Тогда существует эндоморфизм $0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A))$ такой, что $\psi(\bar{a}) = \varphi(a) + B$ для любого $\bar{a} \in A/B$. Пусть элементы $\bar{a}, \bar{b} \in A/B$ и $\psi(\bar{a}) = \psi(\bar{b})$, тогда $\varphi(a) + B = \varphi(b) + B$. Следовательно, $\varphi(a - b) \in B$ и $a - b \in \tilde{B} = B$, т.е. $\bar{a} = \bar{b}$.

2) $\implies$ 1). Пусть $b \in \tilde{B}$, тогда $\varphi(b) \in B$ для некоторого $0 \neq \varphi \in C(\text{End}_S(A))$. Поскольку $B \in A_B$, то существует индуцированный эндоморфизм $\psi \in \text{End}_S(A/B)$ такой, что $\psi(\bar{a}) = \varphi(a) + B$ для любого $\bar{a} \in A/B$. Следовательно, эндоморфизм ψ поднимается до центрального эндоморфизма по подмодулю B . Покажем, что ψ – ненулевой эндоморфизм. Действительно, если предположить, что $\psi = 0$, то $\bar{0} = \psi(\bar{a}) = \varphi(a) + B$ для любого $\bar{a} \in A/B$. Следовательно, $\varphi(a) \in B$ для любого $a \in A$, т.е. $a \in \tilde{B}$ и $\tilde{B} = A$, что противоречит условию. Поскольку $\varphi(b) \in B$, то $\psi(\bar{b}) = \bar{0}$ и $\bar{b} \in \text{Ker}(\psi) = \bar{0}$. Следовательно, $b \in B$ и $\tilde{B} = B$.

Эквивалентность условий из III) следует из I) и II).

Пусть $x \in A$, тогда аннулятор модуля A и аннулятор элемента x [2] будем обозначать соответственно через $\text{Ann}(A)$ и $\text{Ann}(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Модуль A будем называть *с-модулем*, если $C(S) \setminus \text{Ann}(A)$ – мультипликативный моноид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть A – $\mathbf{c}$ -модуль и B – подмодуль в A . Тогда множество

$$\widehat{B} = \{m \in A \mid \exists a \in C(S) \setminus \text{Ann}(A), ma \in B\}$$

будем называть *слабым радикалом* подмодуля B .

Для $\mathbf{c}$ -модуля A справедливы следующие свойства.

СВОЙСТВО 1. Пусть $B \in \text{Lat}(A)$. Тогда

- а) $\widehat{B} \in \text{Lat}(A)$;
- б) $B \subseteq \widehat{B}$;
- в) $\widehat{B} = \widehat{\widehat{B}}$.

СВОЙСТВО 2. Пусть $B, D \in \text{Lat}(A)$. Тогда

- а) если $B \subseteq D$, то $\widehat{B} \subseteq \widehat{D}$;
- б) если $B \subseteq D \subseteq \widehat{B}$, то $\widehat{B} = \widehat{D}$;
- в) $\widehat{B} \cap \widehat{D} = \widehat{B \cap D}$;
- г) $\widehat{B + D} = \widehat{B} + \widehat{D}$.

Свойства 1, 2 легко доказываются, исходя из определения слабого радикала.

СВОЙСТВО 3. Имеет место равенство $\widehat{(0)} = R$, где

$$R = \{x \in A \mid \text{Ann}(x) \cap (C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \neq \emptyset\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \widehat{(0)}$, тогда существует $a \in C(S) \setminus \text{Ann}(A)$ такой, что $xa = 0$. Так как $a \in \text{Ann}(x)$ и $a \in C(S) \setminus \text{Ann}(A)$, то $a \in \text{Ann}(x) \cap (C(S) \setminus \text{Ann}(A))$ и, следовательно, $x \in R$.

Обратно, пусть $x \in R$; тогда $\text{Ann}(x) \cap (C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \neq \emptyset$, т.е. существует $a \in \text{Ann}(x) \cap (C(S) \setminus \text{Ann}(A))$. Тогда $xa = 0$, т.е. $x \in \widehat{(0)}$.

Следующее утверждение дает некоторое описание слабого радикала подмодуля произвольного $\mathbf{c}$ -модуля A .

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть B – собственный подмодуль $\mathbf{c}$ -модуля A .

I) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\widehat{B} = A$;
- 2) существует собственный подмодуль D такой, что $D \subseteq \widehat{B}$ и $\widehat{D} = A$;
- 3) $(C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap \text{Ann}(\bar{a}) \neq \emptyset$ для любого $\bar{a} \in A/B$.

II) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\widehat{B} = B$;
- 2) $(C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap (\bigcup_{\bar{0} \neq \bar{a} \in \widehat{B}/B} \text{Ann}(\bar{a})) = \emptyset$.

III) Следующие условия эквивалентны:

- 1) $B \subset \widehat{B} \subset A$;
- 2) существует $\bar{a} \in A/B$ такой, что $(C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap \text{Ann}(\bar{a}) = \emptyset$, и

$$(C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap \left(\bigcup_{\bar{0} \neq \bar{a} \in \widehat{B}/B} \text{Ann}(\bar{a}) \right) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Эквивалентность условий 1) и 2) доказывается так же, как доказывается эквивалентность аналогичных условий в теореме 1.3.

1) $\implies$ 3). Пусть $\bar{a} \in A/B$ и $a \in \bar{a}$. Так как $\widehat{B} = A$, то для $a \in A$ существует $r \in C(S) \setminus \text{Ann}(A)$ такой, что $ar \in B$. Тогда $\bar{a}r = (a + B)r = ar + B = \bar{0}$ и поэтому $r \in \text{Ann}(\bar{a})$.

3) $\implies$ 1). Рассмотрим произвольный элемент $m \in A$. Поскольку

$$L = (C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap \text{Ann}(\bar{a}) \neq \emptyset$$

для любого $\bar{a} \in A/B$, то найдется элемент $r \in L$ такой, что $\bar{0} = (m + B)r = mr + B$. Следовательно, $mr \in B$ и $m \in \widehat{B}$.

II) Очевидно, что 1) $\implies$ 2). Покажем, что 2) $\implies$ 1). Если допустить, что существует $b \in \widehat{B} \setminus B$, то найдется $r \in C(S) \setminus \text{Ann}(A)$ такой, что $br \in B$. Тогда $\bar{0} = br + B = (b + B)r = \bar{b}r$. Так как $\bar{0} \neq \bar{b} \in \widehat{B}/B$, то $r \in \bigcup_{\bar{0} \neq \bar{a} \in \widehat{B}/B} \text{Ann}(\bar{a})$. Следовательно,

$$(C(S) \setminus \text{Ann}(A)) \cap \left(\bigcup_{\bar{0} \neq \bar{a} \in \widehat{B}/B} \text{Ann}(\bar{a}) \right) \neq \emptyset,$$

что противоречит условию.

Эквивалентность утверждений из III) следует непосредственно из I) и II).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. М.: ИЛ, 1963.
- [2] Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А. и др. Общая алгебра. Т. 1. М.: Наука, 1990.
- [3] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [4] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. Dordrecht: Kluwer, 2003.

Томский государственный университет

Поступило

30.03.2004

Исправленный вариант

15.11.2004