Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Мотькина, О простых числах специального вида на коротких промежутках, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 908–912

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2763>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 04:24:24

УДК 511

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НА КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ

Н. Н. Мотькина

Пусть справедлива гипотеза Римана. Пусть

$$\psi_1(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \{(1/2)n^{1/c}\} < 1/2}} \Lambda(n),$$

где c – вещественное число, $1 < c \leq 2$. В работе доказывается, что при $H > N^{1/2+10\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, справедлива асимптотическая формула

$$\psi_1(N+H) - \psi_1(N) = \frac{H}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{N^\varepsilon}\right) \right).$$

Библиография: 6 названий.

В 1940 г. в качестве иллюстрации применения своего метода Виноградов [1] рассмотрел задачу о распределении чисел вида $\{f\sqrt{p}\}$, p – простые числа, $p \leq N$, f – произвольная положительная постоянная.

В 1945 г. Линник [2] предложил другой подход к решению этой задачи, связанный с применением явной формулы для функции Чебышева и теорем о плотности распределения нулей дзета-функции в критической полосе.

В 1979 г. Кауфман [3] применила подход Линника к решению подобной задачи.

В 1986 г. Гриценко [4] получил асимптотическую формулу для $\pi_c(M)$ – количества простых чисел p таких, что $p \leq M$, $\{(1/2)p^{1/c}\} < 1/2$, где c – произвольное вещественное число, $1 < c \leq 2$. Очевидно, $\pi_c(M)$ – количество простых чисел, не превосходящих M и принадлежащих промежуткам $[(2x)^c, (2x+1)^c)$, $x = 1, 2, \dots$. Отметим, что чем меньше c , тем короче промежутки. Неизвестно, содержит ли каждый из этих промежутков в отдельности хотя бы одно простое число. Для $1 < c \leq 4/3$ Гриценко доказал, что

$$\pi_c(M) = \frac{\pi(M)}{2} + O(M^{1/2+1/2c+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Если применить метод Линника и вместо плотностных теорем воспользоваться гипотезой Римана, то получить в этой асимптотической формуле остаточный член лучше, чем $O(M^{1/2+1/2c+\varepsilon})$, без дополнительных соображений не удастся.

При $H < N^{1/2+1/2c}$ из асимптотической формулы (1) не следует, что на отрезок $[N, N+H]$ попадает хотя бы одно простое число такое, что $\{(1/2)p^{1/c}\} < 1/2$.

В данной статье решается задача о количестве простых чисел с условием $\{(1/2)p^{1/c}\} < 1/2$ на коротком промежутке. Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H > N^{1/2+10\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Если верна гипотеза Римана, то справедлива асимптотическая формула

$$\psi_1(N+H) - \psi_1(N) = \frac{H}{2} \left(1 + O\left(\frac{1}{N^\varepsilon}\right) \right),$$

где

$$\psi_1(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \{(1/2)n^{1/c}\} < 1/2}} \Lambda(n),$$

c – вещественное число, $1 < c \leq 2$.

Заметим, что при $c > 2$ теорема перестает быть справедливой, поскольку тогда длина промежутка вида $[(2x)^c, (2x+1)^c]$ больше H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$\psi_2(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \{1/2n^{1/c}\} \geq 1/2}} \Lambda(n).$$

Тогда $\psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi(x)$, где $\psi(x)$ – функция Чебышева.

Определим величину $Q(N, H)$ равенством

$$Q(N, H) = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \{\psi((2x+2)^c) - 2\psi((2x+1)^c) + \psi((2x)^c)\}.$$

Очевидно, что

$$Q(N, H) = [\psi_2(N+H) - \psi_2(N)] - [\psi_1(N+H) - \psi_1(N)] + O(N^{1-1/c+\varepsilon}).$$

При справедливости гипотезы Римана известно, что

$$\psi(N+H) - \psi(N) = H + O(N^{1/2+\varepsilon}).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно оценить $Q(N, H)$ как $O(H/N^\varepsilon)$. Идея нижеследующей оценки величины, подобной $Q(N, H)$, принадлежит Линнику [2].

Воспользуемся представлением функции Чебышева в виде суммы по нетривиальным нулям ρ дзета-функции, выбрав $T = N^{1/c+\varepsilon} \ln^2 N$ (см., например, [5, с. 54]):

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \left\{ (2x+2)^c - 2(2x+1)^c + (2x)^c \right. \\ & \left. - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(2x+2)^{c\rho} - 2(2x+1)^{c\rho} + (2x)^{c\rho}}{\rho} + O\left(\frac{N \ln^2 N}{T}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Принимая гипотезу Римана, представим ρ в виде $1/2 + i\gamma$. Оценим вклад главных членов:

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \{(2x+2)^c - 2(2x+1)^c + (2x)^c\} \\ & \ll \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} x^{c-2} \ll \frac{H}{N^{1/c}} = O\left(\frac{H}{N^\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Оценим вклад остатка:

$$\sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} O\left(\frac{N \ln^2 N}{T}\right) \ll \frac{H}{N^\varepsilon}.$$

Осталось оценить сумму

$$\sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{(2x+2)^{c\rho} - 2(2x+1)^{c\rho} + (2x)^{c\rho}}{\rho}.$$

Введем обозначения

$$Q_1 = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \sum_{|\gamma| \leq T_1} \frac{(2x+2)^{c\rho} - 2(2x+1)^{c\rho} + (2x)^{c\rho}}{\rho},$$

где $T_1 = N^{1/c-\varepsilon}$;

$$Q_2 = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} \frac{(2x+2)^{c\rho} - 2(2x+1)^{c\rho} + (2x)^{c\rho}}{\rho}.$$

Оценим Q_1 . Для оценки воспользуемся тем, что γ в этой сумме по порядку меньше x . Вынесем $(2x)^{c\rho}/\rho$, выражение в скобках будет иметь порядок $O(|\rho^2|/x^2)$. Применим интегральное преобразование Абеля:

$$Q_1 \ll \int_{\frac{1}{2}N^{1/c}}^{\frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \sum_{|\gamma| \leq T_1} |\mathbf{C}(x)| |\gamma| x^{c/2-3} dx + \sum_{|\gamma| \leq T_1} \left| \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}(N+H)^{1/c}\right) \right| |\gamma| N^{1/2-2/c},$$

где

$$\mathbf{C}(x) = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < n \leq x} n^{ic\gamma}.$$

К сумме $\mathbf{C}(x)$ применим известную лемму о приближении ее интегралом (см., например, [5, с. 44]). Получим

$$\mathbf{C}(x) \ll \frac{N^{1/c}}{|\gamma|}, \quad Q_1 \ll \sum_{|\gamma| \leq T_1} N^{1/2-1/c} \ll N^{1/2+2\varepsilon}.$$

Далее оценим Q_2 . Рассмотрим сумму

$$W = \sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}} \frac{(2x+\theta)^{c\rho}}{\rho},$$

где $\theta = 0, 1, 2$. Применим к ней интегральное преобразование Абеля

$$W \ll \int_{1/2N^{1/c}}^{1/2(N+H)^{1/c}} \sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} |\mathbf{C}(x)| \frac{x^{c/2-1}}{|\gamma|} dx + \sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} \left| \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}(N+H)^{1/c}\right) \right| \frac{N^{1/2}}{|\gamma|},$$

где

$$\mathbf{C}(x) = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < n \leq x} n^{ic\gamma}.$$

Пусть для x из промежутка $[\frac{1}{2}N^{1/c}, \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}]$ выражение

$$\sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} \frac{|\mathbf{C}(x)|}{|\gamma|}$$

принимает наибольшее значение при $x = x_0$. Получим

$$W \ll \sum_{T_1 < |\gamma| \leq T} |\mathbf{C}(x_0)| \frac{N^{1/2}}{|\gamma|}.$$

Обозначим

$$f(x) = \frac{c\gamma}{2\pi} \ln x.$$

Выберем k такое, что $\|f'(\frac{1}{2}N^{1/c})\| = |f'(\frac{1}{2}N^{1/c}) - k|$. Введем обозначение $f_1(x) = f(x) - kx$. Поскольку

$$|f'_1(x)| \leq \left| f'_1\left(\frac{1}{2}N^{1/c}\right) \right| + \left| f'(x) - f'\left(\frac{1}{2}N^{1/c}\right) \right| \leq \frac{1}{2} + O\left(\frac{H}{N}N^\varepsilon \ln^2 N\right) \leq 0,51 < 1$$

на узком промежутке $[\frac{1}{2}N^{1/c}, \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}]$, то сумму по x от экспоненциальной функции на этом интервале можно приблизить с помощью интеграла

$$\mathbf{C}(x_0) = \sum_{\frac{1}{2}N^{1/c} < x \leq x_0} e^{2\pi i f_1(x)} = \int_{\frac{1}{2}N^{1/c}}^{x_0} e^{2\pi i f_1(x)} dx + O(1).$$

Сумму W разобьем на не более, чем $O(N^\varepsilon \ln^3 N)$ сумм, в каждой из которых суммирование ведется по таким γ , что

$$\left| \frac{c\gamma}{\pi N^{1/c}} - k \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Оценим сумму

$$\sum_{\left| \frac{c\gamma}{\pi N^{1/c}} - k \right| \leq \frac{1}{2}} \frac{N^{1/2}}{|\gamma|} \left| \int_{\frac{1}{2}N^{1/c}}^{x_0} e^{2\pi i f_1(x)} dx + O(1) \right|.$$

При $k = 0$ для x из промежутка $[\frac{1}{2}N^{1/c}, \frac{1}{2}(N+H)^{1/c}]$

$$|f'_1(x)| = |f'(x)| > \frac{1}{N^\varepsilon},$$

поэтому интеграл от экспоненциальной функции оценим по первой производной (см., например, [6, с. 73]), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{N^{1/c-\varepsilon} < |\gamma| \leq \frac{\pi}{2c}N^{1/c}} \frac{N^{1/2}}{|\gamma|} \left| \int_{1/2N^{1/c}}^{x_0} e^{2\pi i f_1(x)} dx + O(1) \right| \\ & \ll \sum_{N^{1/c-\varepsilon} < |\gamma| \leq \frac{\pi}{2c}N^{1/c}} \frac{N^{1/2}}{|\gamma|} (N^\varepsilon + 1) \ll N^{1/2+2\varepsilon} \ln N = O\left(\frac{H}{N^\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $k \neq 0$. Учтем, что

$$f'(x) = f'(1/2N^{1/c}) + O\left(\frac{H}{N}N^\varepsilon \ln^2 N\right).$$

Сначала рассмотрим сумму

$$S_1(k) = \sum_{\left|\frac{c\gamma}{\pi N^{1/c}} - k\right| \leq \frac{100HN^\varepsilon \ln^3 N}{N}} \frac{N^{1/2}}{|\gamma|} \left| \int_{\frac{1}{2}N^{1/c}}^{x_0} e^{2\pi i f_1(x)} dx + O(1) \right|.$$

Интеграл оценим по второй производной (см., например, [6, с. 73]) как $O(N^{1/c}/\sqrt{|\gamma|})$. Получим

$$S_1(k) \ll \frac{HN^{\varepsilon+1/2c-1/2} \ln^4 N}{k^{3/2}}.$$

Без ограничения общности полагаем, что $N^{\varepsilon+1/2c-1/2} \ln^4 N < N^{-2\varepsilon}$, и получаем оценку

$$\sum_{\substack{|k| \ll N^\varepsilon \ln^3 N \\ k \neq 0}} S_1(k) = O\left(\frac{H}{N^\varepsilon}\right).$$

Теперь оценим сумму

$$S_2(k) = \sum_{\frac{100HN^\varepsilon \ln^3 N}{N} < \left|\frac{c\gamma}{\pi N^{1/c}} - k\right| \leq \frac{1}{2}} \frac{N^{1/2}}{|\gamma|} \left| \int_{N^{1/c}}^{x_0} e^{2\pi i f_1(x)} dx + O(1) \right|.$$

Разобьем $S_2(k)$ на не более, чем $O(\ln N)$ сумм, где суммирование идет по таким γ , что

$$2^{m-1} \frac{100HN^\varepsilon \ln^3 N}{N} < \left|\frac{c\gamma}{\pi N^{1/c}} - k\right| \leq 2^m \frac{100HN^\varepsilon \ln^3 N}{N}.$$

На каждом из таких интервалов оценим интеграл по первой производной как $O(N/(HN^\varepsilon \ln^3 N 2^{m-1}))$. Получим

$$S_2(k) \ll \frac{N^{1/2}}{k}.$$

И окончательно

$$\sum_{\substack{|k| \ll N^\varepsilon \ln^3 N \\ k \neq 0}} S_2(k) = O\left(\frac{H}{N^\varepsilon}\right).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Матем. сб. 1940. № 7. С. 365–372.
- [2] Линник Ю. В. Об одной теореме теории простых чисел // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. С. 7–8.
- [3] Кауфман Р. М. О распределении $\{\sqrt{p}\}$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26. № 4. С. 497–504.
- [4] Гриценко С. А. Об одной задаче И. М. Виноградова // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 625–640.
- [5] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
- [6] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.

Белгородский государственный университет
E-mail: n.motkina@mail.ru

Поступило
07.06.2005
Исправленный вариант
15.11.2005