Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О числах Борсука и Эрдеша–Хадвигера, *Матем. заметки*, 2006, том 79, выпуск 6, 913–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm2764>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:57:34

УДК 514.17

О ЧИСЛАХ БОРСУКА И ЭРДЕША–ХАДВИГЕРА

А. М. Райгородский

Настоящая работа посвящена изучению двух классических задач комбинаторной геометрии – проблеме Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра и проблеме Эрдеша–Хадвигера о раскраске евклидова пространства. Для величин $f(d)$ (минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$) и $\chi(\mathbb{R}^d)$ (минимальное число цветов, в которые можно так раскрасить все точки в $\mathbb{R}^d$, чтобы точки на расстоянии 1 получили различные цвета), являющихся основными объектами упомянутых задач, получены новые асимптотические оценки.

Библиография: 25 названий.

1. Введение и формулировка результата

Настоящая работа возникла при исследовании двух тесно связанных между собою задач комбинаторной геометрии – задачи Борсука и задачи Эрдеша–Хадвигера. Первая из этих задач, предложенная Борсуком в 1933 году (см. [1]), состоит по существу в отыскании минимального числа $f(d)$ такого, что всякое ограниченное d -мерное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ненулевого диаметра может быть разбито на $f(d)$ частей меньшего диаметра. Отметим сразу, что в данной постановке не было необходимости говорить обо всех множествах с упомянутыми свойствами: например, можно считать, что $\text{diam } \Omega = \text{const}$ и что, более того, Ω выпукло, компактно и даже имеет постоянную ширину (см. [2]). Вторая задача, впервые рассмотренная Эрдешем и Хадвигером на рубеже тридцатых и сороковых годов двадцатого века (см. [3]), сводится к нахождению минимального числа цветов, в которые можно так раскрасить все пространство $\mathbb{R}^d$, чтобы точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, оказались раскрашенными по-разному. Иными словами, ищется стандартное хроматическое число графа $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$, у которого множество вершин $\mathcal{V}_1$ совпадает со всем $\mathbb{R}^d$, а ребрами соединены те и только те пары вершин, расстояние между которыми равно единице. Подчеркнем, что под $\mathbb{R}^d$ мы, как обычно, понимаем арифметическое d -мерное евклидово пространство с метрикой l_2 . Как и в случае с задачей Борсука, полезно заметить, что изначально вовсе не обязательно было запрещать точкам одного цвета находиться на расстоянии 1. С тем же успехом можно было взять хроматическое число графа $\mathcal{G}_b = (\mathcal{V}_b, \mathcal{E}_b)$ с $\mathcal{V}_b = \mathbb{R}^d$ и $\mathcal{E}_b =$

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы”, грант НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ, МК-3130.2004.1, и гранта ИНТАС, № 03-51-5070.

$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}_b \times \mathcal{V}_b : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b > 0\}$: очевидно, величина b на значение этого числа не влияет. В дальнейшем, искомое число мы будем обозначать через $\chi(\mathbb{R}^d) = \chi(\mathbb{R}^d, b) = \chi(\mathcal{G}_b)$. Кроме того, для удобства мы будем называть величину b *запрещенным* или *критическим расстоянием*.

В этой статье нас будут, главным образом, интересовать оценки величин $f(d)$ и $\chi(\mathbb{R}^d)$, которые удастся получить в предположении неограниченного роста размерности. Для начала мы остановимся на истории вопроса.

Для $f(d)$ в разное время были установлены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} f(d) &\leq (\sqrt{2} + o(1))^d = (1.414 \dots + o(1))^d \text{ (Роджерс [4])}, \\ f(d) &\leq (\sqrt{3/2} + o(1))^d = (1.224 \dots + o(1))^d \text{ (Шрамм [5], Бургейн и Линденштраусс [6])}, \\ f(d) &\geq d+1 \text{ (непосредственно вытекает из рассмотрения множества вершин правильного } d\text{-мерного симплекса)}, \\ f(d) &\geq (1.203 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \text{ (Кан и Калаи [7])}, \\ f(d) &\geq (2/\sqrt{3} + o(1))^{\sqrt{2}\sqrt{d}} = (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \text{ (Райгородский [8])}. \end{aligned}$$

Положим $\zeta_1 = 1.2255 \dots$.

Для $\chi(\mathbb{R}^d)$ также имеется исторически сложившаяся последовательность оценок:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{R}^d) &\leq (3 + o(1))^d \text{ (Ларман и Роджерс [9])}, \\ \chi(\mathbb{R}^d) &\geq d+2 \text{ (Райский [10])}, \\ \chi(\mathbb{R}^d) &\geq cd^2, \quad c > 0 \text{ (Ларман, Роджерс, Эрлеш, Шош и Надь [9])}, \\ \chi(\mathbb{R}^d) &\geq (1.207 \dots + o(1))^d \text{ (Франкл и Уилсон [11])}, \\ \chi(\mathbb{R}^d) &\geq (1.239 \dots + o(1))^d \text{ (Райгородский [12])}. \end{aligned}$$

Положим $\zeta_2 = 1.239 \dots$.

Таким образом, наилучшими из известных к настоящему моменту являются следующие результаты:

$$\begin{aligned} (\zeta_1 + o(1))^{\sqrt{d}} &\leq f(d) \leq (1.224 \dots + o(1))^d, \\ (\zeta_2 + o(1))^d &\leq \chi(\mathbb{R}^d) \leq (3 + o(1))^d. \end{aligned}$$

Проблема сколько-нибудь нетривиального усиления этих результатов представляется крайне трудной. Тем не менее, именно получением более сильных оценок мы теперь и займемся. Неожиданный результат, к формулировке которого мы собираемся перейти, основан на исключительной близости задач, которая, на первый взгляд, носит не более, чем механический характер.

Для наших целей мы определим величину $\tilde{f} = \tilde{f}(d)$ из соотношения $f(d) = (\tilde{f} + o(1))^{\sqrt{d}}$ и назовем ее *числом Борсука*. Понятно, во-первых, что число Борсука — это, вообще говоря, функция, зависящая от размерности, причем эта функция задана не однозначно, а с точностью до бесконечно малого слагаемого. Понятно, кроме того, что $\zeta_1 + o(1) \leq \tilde{f} \leq (1.224 \dots + o(1))^{\sqrt{d}}$. Разумеется, мы могли определить $\tilde{f}$ и иначе; наш выбор обусловлен лишь тем обстоятельством, что по-видимому более вероятно асимптотика $f(d) \sim (c + o(1))^{\sqrt{d}}$, $c = \text{const}$, чем асимптотика $f(d) \sim (c + o(1))^d$ (т.е. можно “допустить”, что $\tilde{f}$ постоянно). Аналогично, определим $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(d)$ из соотношения $\chi(\mathbb{R}^d) = (\tilde{\chi} + o(1))^d$, причем здесь уже такое $\tilde{\chi}$ заведомо заключено в постоянных пределах: $\zeta_2 + o(1) \leq \tilde{\chi} \leq 3 + o(1)$. Назовем $\tilde{\chi}$ *числом Эрдеша–Хадвигера*.

Ясно, что в силу упомянутых неоднократно оценок имеет место неравенство

$$\tilde{f} + \tilde{\chi} \geq \zeta_1 + \zeta_2 + o(1) = 2.4645 \dots + o(1).$$

Это неравенство допускает нетривиальное усиление. А именно выполнена

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $l_1^0 > 0$ и $l_{-1}^0 > 0$ таковы, что $l_{-1}^0 < l_1^0$ и $l_1^0 + l_{-1}^0 \leq 1/2$. Положим $\lambda^0 = l_1^0 - l_{-1}^0$, $p^0 = (l_1^0 + 3l_{-1}^0)/3$. Пусть далее

$$(\lambda^0)^2 - l_1^0 - l_{-1}^0 + 2p^0 > 0. \quad (1)$$

Положим

$$\begin{aligned} z^0 &= \frac{1}{6}(3p^0 + 1 - \sqrt{(3p^0 + 1)^2 - 12(p^0)^2}), \\ \tilde{P} &= ((l_1^0)^{l_1^0} (l_{-1}^0)^{l_{-1}^0} (1 - l_1^0 - l_{-1}^0)^{1-l_1^0-l_{-1}^0})^{-1}, \\ \tilde{D} &= ((z^0)^{z^0} (p^0 - 2z^0)^{p^0-2z^0} (1 - p^0 + z^0)^{1-p^0+z^0})^{-1}. \end{aligned}$$

Определим $\tilde{x} = \tilde{x}(l_1^0, l_{-1}^0)$ как корень уравнения

$$\tilde{x} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}}\right)^{\sqrt{2}} + \zeta_2$$

на интервале $(1, \tilde{P}/\tilde{D})$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n) \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + \max_{l_1^0, l_{-1}^0} \tilde{x}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Положим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{u+2v}{3}, & A_2 &= \sqrt{-3A_1^2 + 6A_1 + 1}, \\ A_3 &= \frac{1}{6}\left(1 + \frac{A_1-1}{A_2}\right), & A_4 &= \frac{1}{6}(1 + 3A_1 - A_2) \end{aligned}$$

(здесь u и v – независимые вещественные переменные). Обозначим через A_5 выражение

$$A_5 = A_3 \log A_4 + \left(\frac{1}{3} - 2A_3\right) \log(A_1 - 2A_4) + \left(A_3 - \frac{1}{3}\right) \log(1 - A_1 + A_4),$$

где “log” – это натуральный логарифм. Определим далее величины u' , v' как такие корни системы нелинейных уравнений

$$2A_5 - \log y + \log(x - y) = 0, \quad (i)$$

$$A_5 + \log(1 - x) - \log(x - y) = 0, \quad (ii)$$

что $u' = 0.4355 \dots$, а $v' = 0.1091 \dots$. Тогда максимум в оценке из теоремы достигается при $l_1^0 = u' - v'$, $l_{-1}^0 = v'$ и

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n) \geq 1.24318 \dots + \zeta_1 = 2.46868 \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Неожиданность и тонкость усиления прежних результатов, которое получается за счет теоремы и следствия из нее, состоит в том, что мы улучшаем не числа Борсука и Эрдеша–Хадвигера по отдельности, но уточняем неравенство, которому удовлетворяет их сумма. Иными словами, мы доказываем, что *либо* $\tilde{f}$ можно увеличить, *либо*, коль скоро так поступить нельзя, то во всяком случае допустимо увеличение $\tilde{\chi}$. Такая *альтернатива* и впрямь свидетельствует о глубокой связи между нашими задачами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Теорема 1.1 допускает существенное обобщение. В самом деле, пусть $g(u, v)$ – произвольная функция, монотонно возрастающая по каждому из своих аргументов при $u \geq 1, v \geq 1$. Сохраняя неизменными все условия теоремы, кроме последнего, найдем $\tilde{x}$ как корень уравнения

$$g\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}, \tilde{x}\right) = g\left(\left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}}\right)^{\sqrt{2}}, \zeta_2\right)$$

на интервале $(1, \tilde{P}/\tilde{D})$. Тогда

$$g\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n), \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n)\right) \geq g\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}, \tilde{x}\right).$$

Иначе говоря, мы можем нетривиально улучшать не только оценку для суммы чисел Борсука и Эрдеша–Хадвигера, но и для практически любой функции, заданной на паре этих чисел. Например, если $g(u, v) = uv$, то

$$g\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n), \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n)\right) \geq \zeta_1(1.2432\dots),$$

хотя без теоремы мы знали лишь, что

$$g(\tilde{f}, \tilde{\chi}) \geq (\zeta_1 + o(1))(\zeta_2 + o(1)) = (\zeta_1 + o(1))(1.239\dots + o(1)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Условие (1) в теореме 1.1 носит содержательный характер. Скажем, при $l_1^0 = 0.21, l_{-1}^0 = 0.01$ это условие не выполнено, хотя все остальные предположения полностью реализованы. В целом, структуру множества значений параметров, по которым идет оптимизация, можно увидеть на рис. 1. Ясно, что, в частности, параметры из следствия в это множество попадают.

Рис. 1

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Нетрудно проверить, что величины типа z^0 (т.е. величины, содержащие корни и логарифмы) определены корректно. В принципе это будет также видно из доказательств.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Аналог теоремы 1.1 легко сформулировать в ситуации, когда вместе с $f(d)$ исследуется не $\chi(\mathbb{R}^d)$, а $\chi(\mathbb{Q}^d)$, где последняя величина понимается как хроматическое число графа, у которого множество вершин состоит из всех векторов в $\mathbb{R}^d$, имеющих рациональные координаты, а множество ребер стандартным образом порождено запрещенным расстоянием 1. Отметим, что для $\mathbb{Q}^d$ арифметическая природа запрета уже существенна: рациональные и иррациональные критические расстояния суть принципиально различные вещи. Отметим также, что наилучшие известные оценки для $\chi(\mathbb{Q}^d)$ таковы (см. [9] и [13]):

$$(1.173 \dots + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{Q}^d) \leq (3 + o(1))^d.$$

Прежде чем переходить к следующему разделу, где мы приведем доказательства теоремы 1.1 и следствия 1.1, заметим, что с историей задач Борсука и Эрдеша–Хадвигера можно существенно более подробно ознакомиться по обзорам [13] и [14], а также по монографиям [15]–[17].

2. Доказательства теоремы 1.1 и следствия 1.1

Для удобства изложения мы разобьем этот раздел на два пункта: в первом из них мы докажем теорему, а во втором – следствие.

2.1. Доказательство теоремы 1.1. Дальнейшие рассуждения будут основаны на разработанной автором технике, которую в более широком контексте мы называем *альтернированием*: подобная техника эффективно применяется для обоснования нетривиальных нижних оценок хроматических чисел конечных геометрических графов (см. [18] и [19]), и ниже мы увидим, как ее частную модификацию удастся использовать для наших нынешних целей.

Пусть фиксированы все параметры, фигурирующие в формулировке теоремы. Пусть, кроме того, n – достаточно большое натуральное число. Положим

$$l_1 = [l_1^0 n], \quad l_{-1} = [l_{-1}^0 n], \quad l_0 = n - l_1 - l_{-1},$$

где через $[t]$ мы обозначаем целую часть числа t . Рассмотрим семейство $(-1, 0, 1)$ -векторов

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : \text{card}\{i = 1, \dots, n : x_i = \nu\} = l_\nu, \quad \nu \in \{-1, 0, 1\}\},$$

у которых в точности l_1 координата равна единице, l_{-1} координата равна минус единице и l_0 компонент совпадают с нулем. Понятно сразу, что $\text{card } \Sigma_1 = P = P(l_1, l_{-1}, l_0)$, где $P(u, v, w) = (u + v + w)! / (u!v!w!)$ – полиномиальный коэффициент. Заметим, что в свою очередь благодаря формуле Стирлинга и специфическому выбору параметров, $P = (\tilde{P} + o(1))^n$, $\tilde{P} > 1$.

Пусть теперь $p = p(n)$ есть минимальное простое число, большее, чем $[(l_1 + 3l_{-1})/3]$. В силу известных результатов аналитической теории чисел с ростом размерности имеет место асимптотика $p = (p^0 + o(1))n$ (между u и $u + O(u^\alpha)$ есть простое число, коль скоро

$u > u'$, а $\alpha \leq 38/61$, — см. [20]). Подчеркнем, что p подобрано так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - 3p = l_1 + l_{-1} - 3p < \min_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -2l_{-1}$$

(здесь $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а последнее соотношение обусловлено тем фактом, что $l_{-1} < l_1$).

Перейдем непосредственно к построению обещанной альтернативы. Первый из двух возможных вариантов будет состоять в предположении, что имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каково бы ни было семейство векторов $Q \subset \Sigma_1$, в котором скалярное произведение любых двух элементов не равно $b'_1 = l_1 + l_{-1} - p$ (эквивалентно, расстояние между любыми двумя элементами не равно $b_1 = \sqrt{2p}$), мощность этого семейства не превосходит*

$$\frac{P}{\tilde{x}^n} = \left(\frac{\tilde{P} + o(1)}{\tilde{x}} \right)^n$$

($\tilde{P}/\tilde{x} > 1$, так как $\tilde{x} \in (1, \tilde{P}/\tilde{D})$, а $\tilde{D} > 1$).

В рамках этого варианта рассмотрим граф $G = (V, E)$, у которого

$$V = \Sigma_1, \quad E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = b_1\}.$$

Ясно, что G является подграфом в $\mathcal{G}_{b_1}$ (см. начало статьи) и, стало быть, $\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathcal{G}_{b_1}) \geq \chi(G)$. Далее, по принципу Дирихле

$$\chi(G) \geq \frac{\text{card } V}{\alpha(G)} = \frac{P}{\alpha(G)},$$

где $\alpha(G)$ — число независимости графа (см. [21]), т.е. максимальная мощность подмножества его вершин, в котором ни одна пара вершин не соединена ребром. Однако утверждение немедленно влечет оценку $\alpha(G) \leq P/\tilde{x}^n$, а значит, $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \tilde{x}^n$, так что, в свою очередь, $\tilde{x} \geq \tilde{x} + o(1)$. Поскольку неравенство $\tilde{f} \geq (2/\sqrt{3})^{\sqrt{2}} + o(1)$ достигается не зависимо ни от каких допущений, мы автоматически приходим к оценке

$$\tilde{f}(n) + \tilde{\chi}(n) \geq \tilde{x} + 1.2255 \dots + o(1) = \tilde{x} + \zeta_1 + o(1).$$

Второй вариант альтернативы логически дополняет собою первый: утверждение места не имеет, и, следовательно, найдется семейство векторов $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$, которое свободно от пар элементов со скалярным произведением b'_1 и у которого в то же время мощность ограничена снизу величиной $((\tilde{P} + o(1))/\tilde{x})^n$.

ЛЕММА. *Каково бы ни было семейство векторов $Q \subset \Sigma_2$, в котором скалярное произведение любых двух элементов не равно $b'_2 = l_1 + l_{-1} - 2p$ (эквивалентно, расстояние между любыми двумя элементами не равно $b_2 = \sqrt{4p}$), мощность этого семейства не превосходит величины*

$$D = \sum_{k_1, k_2 \in \mathcal{A}} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2},$$

где

$$\mathcal{A} = \{(k_1, k_2) : k_1 + k_2 \leq n, k_1 + 2k_2 \leq p - 1, k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Здесь мы воспользуемся некоторой модификацией линейно-алгебраического метода в комбинаторике (см. [13], [22] и [23]). Прежде всего заметим, что фактически нам нужно доказать следующее утверждение: мощность всякого семейства векторов $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\} \subset \Sigma_1$, свободного от скалярных произведений b'_1, b'_2 , не превосходит D . В самом деле, $\Sigma_2 \subset \Sigma_1$ уже не содержит пар векторов со скалярным произведением b'_1 , а в Q из формулировки леммы присутствует дополнительный запрет b'_2 , так что, доказав утверждение, мы установим и лемму.

Каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma_1$ поставим в соответствие следующий многочлен $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$:

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_n) = \prod_{j=1}^p (j - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle),$$

где $'$ означает, что j не сравнимо с $l_1 + l_{-1}$ по модулю p . От $F_{\mathbf{x}}$ перейдем к $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$ путем кратного применения соотношений $y_{\nu}^3 = y_{\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$, верных для координат $(-1, 0, 1)$ -векторов $\mathbf{y} \in \Sigma_1$: суммарная степень $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$ будет не больше $p - 1$, а его индивидуальные степени по переменным y_{ν} не превзойдут двух. Нетрудно проверить тогда, что для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_1$ значение многочлена $\tilde{F}_{\mathbf{x}}$ на векторе $\mathbf{y}$ есть нуль по модулю p в том и только том случае, когда скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не сравнимо с $l_1 + l_{-1}$. Это обстоятельство вкупе с тем фактом, что $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \equiv l_1 + l_{-1} \pmod{p}$ исключительно при условии, что либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = l_1 + l_{-1}$ (т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$), либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = l_1 + l_{-1} - p = b'_1$, либо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = l_1 + l_{-1} - 2p = b'_2$ (так подбиралось p , и мы об этом уже упоминали), означает в действительности, что многочлены $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_h}$, отвечающие векторам из $Q \subset \Sigma_1$, линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Дабы в этом убедиться, можно, скажем, вести рассуждение от противного и прийти в конечном счете к противоречию, последовательно подставляя в потенциальную невырожденную линейную комбинацию полиномов, тождественно равную нулю, векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h$ в качестве аргументов (скалярное произведение векторов из Q сравнимо с максимально возможным лишь при условии совпадения этих векторов).

Итак, каким бы ни было $Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_h\}$ в лемме, многочлены $\tilde{F}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \tilde{F}_{\mathbf{x}_h}$ линейно независимы. Следовательно, $h = \text{card } Q$ ограничено размерностью пространства таких многочленов, а она, очевидно, равна D (базис состоит из одночленов, в которые k_1 переменных входят в первой степени и k_2 переменных – во второй, $(k_1, k_2) \in \mathcal{A}$). Лемма доказана.

Продолжим обсуждение второго варианта альтернативы. Положим

$$\lambda = x_1 + \dots + x_n = l_1 - l_{-1},$$

коль скоро $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_2$. Выбор параметров обеспечивает асимптотику $\lambda = (\lambda^0 + o(1))n$. От семейства векторов Σ_2 перейдем к новому семейству Σ_2^* , сопоставляя каждому вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_2$ вектор

$$\mathbf{x} * \mathbf{x} = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n,n}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

по правилу $x_{i,j} = (x_i - \kappa)(x_j - \kappa)$, где координаты $x_{i,j}$ раз и навсегда упорядочены, а $\kappa = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - n(l_1 + l_{-1} - 2p)}$. Корректность определения κ вытекает при больших n из свойства (1) в формулировке теоремы.

Заметим, что $\text{card } \Sigma_2^* = \text{card } \Sigma_2 \geq ((\tilde{P} + o(1))/\tilde{x})^n$ и что размерность аффинного подпространства в $\mathbb{R}^{n^2}$, где реально содержится Σ_2^* , равна $d = n(n+1)/2 - 1$: выполнены линейные соотношения $x_{i,j} = x_{j,i}$ и $x_{1,1} + x_{2,2} + \dots + x_{n,n} = l_1 + l_{-1}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - \kappa)(x_j - \kappa)(y_i - \kappa)(y_j - \kappa) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \kappa)(y_i - \kappa) \right)^2 = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - 2\kappa\lambda + \kappa^2 n)^2. \end{aligned}$$

Однако в силу своего определения κ является одним из корней квадратного уравнения $2\kappa\lambda - \kappa^2 n = l_1 + l_{-1} - 2p = b'_2$. Стало быть, ввиду специфики евклидовой метрики, максимальное расстояние между векторами $\mathbf{x} * \mathbf{x}, \mathbf{y} * \mathbf{y} \in \Sigma_2^*$ (диаметр семейства) достигается тогда и только тогда, когда скалярное произведение их прообразов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma_2$ совпадает с b'_2 .

Допустим, нам удалось разбить семейство Σ_2^* на

$$f < \frac{1}{D} \left(\frac{\tilde{P} + o(1)}{\tilde{x}} \right)^n$$

частей меньшего диаметра: $\Sigma_2^* = \Omega_1^* \sqcup \dots \sqcup \Omega_f^*$. По принципу Дирихле найдется такая часть Ω_i^* , что

$$\text{card } \Omega_i^* \geq \frac{\text{card } \Sigma_2^*}{f} > D.$$

Значит, прообраз $\Omega_i \subset \Sigma_2$ множества Ω_i^* , благодаря однозначности нашего отображения, также имеет мощность, большую D . Применяя к Ω_i лемму, мы убеждаемся, что в этом множестве есть по крайней мере два вектора $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ со скалярным произведением b'_2 . Таким образом, $\text{diam } \Omega_i^* = |\mathbf{x} * \mathbf{x} - \mathbf{y} * \mathbf{y}| = \text{diam } \Sigma_2^*$; противоречие. Следовательно,

$$f(d) \geq \frac{1}{D} \left(\frac{\tilde{P} + o(1)}{\tilde{x}} \right)^n.$$

Однако легко проверить, что $D = (\tilde{D} + o(1))^n$ (для этого достаточно найти максимальное слагаемое в суммировании по $k_1, k_2 \in \mathcal{A}$, пользуясь формулой Стирлинга и стандартными средствами анализа), так что

$$f(d) \geq \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}} + o(1) \right)^n = \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}} + o(1) \right)^{\sqrt{2}\sqrt{d}},$$

а

$$\tilde{f} \geq \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}} \right)^{\sqrt{2}} + o(1).$$

Мы знаем безо всяких дополнительных предположений, что

$$\tilde{\chi} \geq \zeta_2 + o(1) = 1.239 \dots + o(1).$$

Стало быть, в рамках текущего варианта альтернативы

$$\tilde{f}(d) + \tilde{\chi}(d) \geq \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}} \right)^{\sqrt{2}} + 1.239 \dots + o(1).$$

Подытожим полученные результаты. Либо верен первый вариант альтернативы и тогда

$$\tilde{f}(n) + \tilde{\chi}(n) \geq \tilde{x} + \zeta_1 + o(1),$$

либо выполнен второй вариант и тогда

$$\tilde{f}(d) + \tilde{\chi}(d) \geq \left(\frac{\tilde{P}}{\tilde{x}\tilde{D}} \right)^{\sqrt{2}} + \zeta_2 + o(1).$$

В то же время $\tilde{x}$ подобран так, что правые части обоих неравенств совпадают с точностью до бесконечно малых. Это означает, наконец, что уже безусловно

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n) \geq \tilde{x} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{2}}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. Только что доказанный результат опирается на изучение экстремальных свойств семейств $(-1, 0, 1)$ -векторов. Впервые важность таких семейств для решения различных задач комбинаторной геометрии была замечена автором (см. [8], [12], [13], [24] и [25]). Однако в принципе, можно пытаться рассматривать и более общие конструкции, которые также оказываются полезными весьма часто (см. [13]). В рамках нашей нынешней деятельности подобные конструкции, несомненно, применимы, и мы опишем соответствующие результаты в третьем разделе – в приложении.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Ясно, почему в самом конце доказательства теоремы “неожиданно” возникают верхние пределы: если в первом варианте альтернативы мы работали с размерностью n , то во втором варианте мы перешли к рассмотрению $d = n(n+1)/2 - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. В теореме 1.1 был получен результат для

$$A_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n).$$

Такой же результат верен и для

$$A_2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f}(n) + \tilde{\chi}(n)),$$

что, конечно, несколько более интересно. Вместе с тем, для A_1 оценка может быть слегка улучшена, но улучшение неэффективно, и мы на нем останавливаться не будем.

2.2. Доказательство следствия 1.1. Для обоснования результата нам необходимо найти максимальное значение величины $\tilde{x}(l_1^0, l_{-1}^0)$ при условии, что параметры l_1^0, l_{-1}^0 удовлетворяют всем ограничениям, наложенным на них в теореме 1.1. Во-первых, нетрудно заметить, апеллируя к виду уравнения на $\tilde{x}$, что его корень на известном интервале будет тем больше, чем большей окажется дробь $\tilde{P}/\tilde{D}$. В то же время поиск максимума этой дроби можно осуществить стандартными средствами анализа. В действительности, подобная процедура, требующая определенных технических усилий, уже была однажды проделана автором, а именно, она возникла в совершенно ином контексте в работе [13], где, в частности, автору удалось найти самую сильную из известных на данный момент оценку для “хроматического числа пространства с двумя запрещенными расстояниями”. Конечно, в нынешней ситуации имеется дополнительное ограничение (1), но точка экстремума в область этого ограничения попадает (см. замечание 1.3), так что все в порядке. Приближенное значение максимума дроби $\tilde{P}/\tilde{D}$, найденное в конечном счете как решение системы двух трансцендентных уравнений, возникающих из необходимого условия экстремума (которое в этом случае является одновременно и достаточным), равно $1.439\dots$. В итоге остается просто подставить такое значение в уравнение на $\tilde{x}$ и найти его корень с любой наперед заданной точностью. Следствие доказано.

3. Приложение

В замечании 2.1.1 мы уже говорили, что дальнейшие усиления полученных результатов возможны за счет рассмотрения более сложных геометрических конструкций. Из доказательства теоремы 1.1 видно, в каком направлении здесь следует двигаться. В самом деле, можно взять семейство векторов

$$\Sigma = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{a_1, \dots, a_t\}^n : \text{card}\{i = 1, \dots, n : x_i = \nu\} = l_\nu, \quad \nu \in \{a_1, \dots, a_t\}\},$$

у которых в точности l_ν координат величины ν , $\nu \in \{a_1, \dots, a_t\}$. Здесь мы должны, естественно, предположить, что $l_{a_1}, \dots, l_{a_t}$ суть натуральные числа, сумма которых равна n . Более того, мы предположим, что сами потенциальные значения координат $(a_1, \dots, a_t)$ суть различные целые числа и что $l_\nu \asymp n$, $\nu \in \{a_1, \dots, a_t\}$. Последнее допущение разумно, в свою очередь, конкретизировать, не теряя общности и попадая вместе с тем в контекст теоремы 1.1: $l_\nu = [l_\nu^0 n]$. Заметим, наконец, что число t обязано быть константой, и положим $P = P(l_{a_1}, \dots, l_{a_t}) = \text{card } \Sigma$.

Допустим теперь, что имеет место

ЛЕММА. Существуют такие числа b'_1, b'_2 , $b'_2 < b'_1$, что, каково бы ни было семейство векторов $Q \subset \Sigma$, в котором скалярное произведение любых двух элементов не совпадает с b'_1, b'_2 , его мощность не превосходит D , причем

$$\frac{P}{D} = (\tilde{\rho} + o(1))^n, \quad \text{где } \tilde{\rho} = \text{const} > 1.439.$$

Тогда выполнена

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\lambda^0 = a_1 l_{a_1}^0 + \dots + a_t l_{a_t}^0$. Предположим, что $(\lambda^0)^2 - b_2' > 0$. Зададим $\tilde{x} = \tilde{x}(l_{a_1}^0, \dots, l_{a_t}^0)$ как корень уравнения

$$\tilde{x} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{x}}\right)^{\sqrt{2}} + \zeta_2 \quad (2)$$

на интервале $(1, \tilde{\rho})$. Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}(n) \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} + \tilde{x}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условие $\tilde{\rho} > 1.439$ в формулировке леммы возникло не случайно: во-первых, оно обеспечивает существование и единственность $\tilde{x}$ в теореме, но этого можно было добиться и меньшими усилиями; во-вторых же, – и это главное, – при $\tilde{\rho} < 1.439$ мы на усиление теоремы 1.1 рассчитывать не можем (ср. доказательство следствия).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. К сожалению, в рамках описанной последовательности действий уже весьма тяжело производить какую-либо оптимизацию параметров. Тем не менее, у автора практически нет сомнений, что на указанном пути можно добиться дальнейших продвижений в вопросе получения нижних оценок на сумму чисел Борсука и Эрдеша–Хадвигера. Заметим, что единственным по-настоящему эффективным способом отыскания чисел b_1' , b_2' , дающих хорошее значение D в лемме, остается, по-видимому, линейно-алгебраический метод.

Автор выражает благодарность рецензенту за указание ряда неточностей в первоначальном варианте работы и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale Euklidische Sphäre // Fundamenta Math. 1993. V. 20. P. 177–190.
- [2] Eggleston H. G. Convexity. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1958.
- [3] Hadwiger H. Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugaliae Math. 1944. V. 4. P. 140–144.
- [4] Rogers C. A. Covering a sphere with spheres // Mathematika. 1963. V. 10. P. 157–164.
- [5] Schramm O. Illuminating sets of constant width // Mathematika. 1988. V. 35. P. 180–189.
- [6] Bourgain J., Lindenstrauss J. On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Lecture Notes in Math. V. 1469. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 138–144.
- [7] Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29. №1. P. 60–62.
- [8] Райгородский А. М. Об одной оценке в проблеме Борсука // УМН. 1999. Т. 54. №2. С. 185–186.
- [9] Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. V. 19. P. 1–24.
- [10] Райский Д. Е. Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n + 1$ часть // Матем. заметки. 1970. Т. 7. С. 319–323.
- [11] Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
- [12] Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства // УМН. 2000. Т. 55. №2. С. 147–148.
- [13] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 107–146.

- [14] Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest // J. Bolyai Math. Soc., Springer. 2002. V. 11. P. 649–666.
- [15] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
- [16] Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S. Excursions into combinatorial geometry, Universitext. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
- [17] Klee V., Wagon S. Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. Math. Association of America, 1991.
- [18] Райгородский А. М. Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Докл. РАН. 2003. Т. 392. №3. С. 313–317.
- [19] Райгородский А. М. Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов // Матем. сб. 2004.
- [20] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
- [21] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [22] Alon N., Babai L., Suzuki H. Multilinear polynomials and Frankl–Ray–Chaudhuri–Wilson type intersection theorems // J. Comb. Theory. Ser. A. 1991. V. 58. P. 165–180.
- [23] Babai L., Frankl P. Linear algebra methods in combinatorics, Part 1, Department of Computer Science, The University of Chicago, Preliminary version 2, September, 1992.
- [24] Райгородский А. М. Задачи Борсука и Хадвигера и системы векторов с запретами на скалярные произведения // УМН. 2002. Т. 57. №3. С. 159–160.
- [25] Raigorodskii A. M. The Borsuk Partition Problem, Lect. Note Ser. of the London Math. Soc., 2004.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23.09.2003
Исправленный вариант
28.07.2005